Lezione 6

venerdì 18 marzo 2016 08:25

# Integrali oscillanti

Esempi tipici sono

$$\int_0^\infty f(x) \sin x \, dx \quad , \quad \int_0^\infty f(x) \cos x \, dx$$

oppure

$$\int_0^\infty f(x) \underbrace{e^{ix}}_{\substack{\| \\ \cos x + i \sin x}} dx = \int_0^\infty f(x) \cos x \, dx + i \int_0^\infty f(x) \sin x \, dx$$

dove $f(x) \geq 0 \ \forall x$ è una funzione non negativa

**Teorema** (criterio di Abel)

Siano $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f \in C([a,\infty))$ con primitiva $F \in C^1([a,\infty))$ limitata e $g \in C^1([a,\infty))$ tali che:

① $g'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq a$

② $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$.

Allora l'integrale improprio

$$\int_a^\infty f(x) g(x) \, dx$$

converge (semplicemente).

Dim. Fisso $b \geq a$

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx \overset{\text{int. per parti}}{=} \Big[F(x) g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x) g'(x) \, dx =$$

$$= \Big( F(b) g(b) - F(a) g(a) \Big) - \int_a^b F(x) g'(x) \, dx.$$

Osserviamo che

$$\lim_{b \to \infty} F(b) g(b) = 0$$

perché $F$ è limitata,

e $g$ è infinitesima

Affermo che l'integrale

$$\int_a^\infty F(x)\, g'(x)\, dx$$

Converge assolutamente. Esamino

$$\int_a^b |F(x)||g'(x)|\, dx \leq C \int_a^b |g'(x)|\, dx =$$

usando l'ipotesi

$$|F(x)| \leq \sup_{x \geq a} |F(x)| := C < \infty$$

$$= -C \int_a^b g'(x)\, dx = -C\big(g(b) - g(a)\big) \xrightarrow[b \to \infty]{} C g(a)$$

$$\wedge \quad \infty$$

$$g(b) \to 0$$

Deduco che

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b |F(x)\, g'(x)|\, dx \leq C \cdot g(a) < \infty$$

Tutto questo prova che esiste finito il

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

$\square$

<u>Esempio</u> $\forall \alpha > 0$ il seguente integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\, dx$$

Infatti: $f(x) = \sin(x)$ ha primitiva
$F(x) = -\cos(x)$ che è limitata

e inoltre

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

ed è decrescente.

Ma abbiamo visto per $\alpha = 1$ che

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Non converge assolutamente.

## Funzione $\Gamma$ di Eulero.

Definiamo la funzione $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \qquad x > 0.$$

Controllo la convergenza dell'integrale separatamente su $(0,1]$ e poi su $[1, \infty)$.

Osservo che

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\cancel{t^{x-1}} e^{-t}}{\cancel{t^{x-1}}} = 1 \neq 0$$

Quindi per il CCA

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^1 t^{x-1}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$1 - x < 1 \iff x > 0$$

Poi ora esamino

$$\int^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$\int_1^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

Osservo che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = \lim_{t\to\infty} t^{x-1}e^{-t/2} = 0$$

Quindi $\exists\, \bar{x} : \forall\, x \geq \bar{x}$ avremo

$$t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$$

E quindi

$$\int_{\bar{x}}^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt \leq \int_{\bar{x}}^\infty e^{-t/2}\, dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-t/2}}{-1/2}\right]_{x=\bar{x}}^{x=b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -2\left[\underbrace{e^{-b/2}}_{\downarrow\ 0} - e^{-\bar{x}/2}\right]$$

$$= 2e^{-\bar{x}/2} < \infty.$$

Conclusione: $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ è ben definita.

Vediamo ora una propr. Calcolo

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

$$= \left[-e^{-t}\, t^x\right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty e^{-t}\, x\, t^{x-1}\, dt$$

$$= 0 + x\cdot \int^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$= 0 + x \cdot \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$= x \cdot \Gamma(x)$$

Osservo ora che

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \left[ -e^{-t} \right]_{t=0}^{t=\infty} = -e^{-\infty} + e^{0} = 1$$

E dunque per induzione trovo che

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1) \cdot \Gamma(n-1)$$

$n \in \mathbb{N}$

$$= \ldots = n!$$

Cioè:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

La $\Gamma$ "interpola" il fattoriale.

Notazione:

$$C([a,b]) = \{ \text{funzioni continue su } [a,b] \}$$

$$C^1([a,b]) = \{ \text{funzioni } f \text{ su } [a,b] \text{ tali che esiste } f' \in C([a,b]) \}$$

Esercizi

ES 1 Prima calcolo l'int. improprio

$$\int_0^1 \log^2 x \, dx$$

Poi studio la conv. dell'integrale

Poi studio la conv. dell'integrale

$$\int_0^1 \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \cdot \log x \, dx .$$

Risoluzione.

Cerco primitiva

$$\int 1 \cdot \log^2 x \, dx \overset{PP.}{=} x\log^2 x - \int x \, 2(\log x)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\log^2 x - 2\int 1\cdot \log x \, dx$$

$$= x\log^2 x - 2\left[x\log x - x\right] + C$$

Quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \log^2 x \, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[x\log^2 x - 2x\log x + 2x\Big]_{x=\varepsilon}^{x=1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(2 - \underbrace{\varepsilon\log^2\varepsilon}_{\to 0} - \underbrace{2\varepsilon\log\varepsilon}_{\to 0} + \underbrace{2\varepsilon}_{\to 0}\Big)$$

$= 2$ l'integrale converge.

(2) Nell'integr. c'è

$$\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \log\left(\frac{1}{x^2}(1+x^2)\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{x^2}\right) + \log(1+x^2)$$

$$= -2\log x + \log(1+x^2)$$

Uso il criterio del CA:

$$(\log x)\cdot\left(-2\log x + \log(1+x^2)\right) =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log x)\cdot\left(\frac{-2\log x}{} (+) \log(1+x^2)\right)}{\log^{2} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-2 + \frac{\log(1+x^2)}{\log x}\right) = -2 \neq 0$$

Siccome $\int_0^1 \log^2 x \, dx = 2 < \infty$
deduco che il mio integrale converge assolutamente,

ES 2 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri:

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+\frac{1}{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$$

① Det. tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'integr. converge

② Calcolare l'integr. per $\alpha = -2$.

Risoluzione Sappiamo che

$$\log(1+t) \underset{t\to 0}{=} t + o(t) \qquad \text{dove} \quad \frac{o(t)}{t} \underset{t\to 0}{\to 0}$$

$$= t\,(1+o(1))$$

e quindi

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\,(1+o(1)) \qquad x\to\infty$$

$$\frac{x^\alpha}{1+\frac{1}{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{x^\alpha}{1+\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\right)(1+o(1))$$

$$= \left(\frac{1}{\phantom{x}}\right) \cdot (1 + o(1))$$

$$= \frac{1}{x^{1-\alpha}} \cdot \underline{\underline{(1+o(1))}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = (1+o(1))$$

Per il criterio del CA

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+\frac{1}{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx \quad \text{converge}$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}} \, dx < \infty \quad \text{converge}$$

$$\Updownarrow$$

$$1-\alpha > 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\alpha < 0}$$

- $\alpha = -2$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} \boxed{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} dx$$

$\square$

ES 3 Studiare la conv. del reg. integr. improprio

$$I = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x} \, \log\left(\frac{\pi+x}{2\pi}\right)}{(\pi-x)^2} \, dx$$

Sol. Per fare chiarezza faccio un cambio di variabile

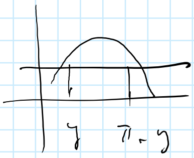
$$\pi - x = y \qquad x = \pi - y$$

$$-dx = dy$$

$x = 0 \rightarrow y = \pi$

$x = \pi \rightarrow y = 0$

$$I = \int_{\pi}^{0} \frac{\sqrt{\sin(\pi - y)}\ \log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right)}{y^2} \, (-dy)$$




$$= \int_0^{\pi} \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{\sin y}\ \log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right)}{y^2}}}_{= f(y)} \, dy$$

Sviluppi infinit.

$$\sin y = y + o(y) = y\,(1 + o(1))$$

$$\sqrt{\sin y} = \sqrt{y}\,(1 + o(1)) \leftarrow$$

$$\log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right) = \boxed{-\frac{y}{2\pi}\,(1 + o(1))}$$

$$f(y) = \frac{\sqrt{y}\,(1 + o(1))\left(-\frac{y}{2\pi}\right)(1 + o(1))}{y^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2\pi}\,(1 + o(1))}{y^{2 - 1/2 - 1}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\ \frac{1 + o(1)}{y^{1/2}}$$

Per il CCA $\int_0^{\pi} f(y)\,dy$ conv.

Per il CCA $\int_0^{\pi} f(y)\,dy$ conv.

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{y^{1/2}}\,dy$$ Converge si

$\frac{1}{2} < 1$ si

L'integ. Conv.