

Lezione 26

mercoledì 10 maggio 2017 10:43

TEOR $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^1(A)$
 — allora f è differenziabile in tutti
 i punti di A .

Dim. Considero $n=2$, $A = \mathbb{R}^2$

Proviamo che f è diff. in $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{E' int. } \nabla f(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0), \frac{\partial f}{\partial y}(0) \right)$$

Test della differenziabilità:

$$0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{|(x,y)|}$$

Voglio provare questo

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= f(x,y) - f(x,0) + f(x,0) - f(0,0) = \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) \cdot y}_{y^* \in [0, y]} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, 0) \cdot x}_{x^* \in [0, x]} \end{aligned}$$

Per Lagrange esistono x^* e y^* come sopra
 che portano alla formula

$$\underbrace{f(x,y) - f(0,0)}_{\text{}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot x}_{\text{}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot y}_{\text{}} \quad (=)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right)$$

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$y \rightarrow 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^* \rightarrow 0$$

$$y^* \rightarrow 0$$

Questo prova la diff. in 0.

□

Derivate di ordine superiore

$\subset \mathbb{R}^n$

Def 1: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in A , ovvero esistono

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in A , ovvero esistono tutte le

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$i = 1, \dots, n$$

Le esistono sono definite le derivate parziali del 2° ordine:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Altre notazioni:

$$D_j D_i f = f_{x_i x_j}$$

Altra notazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Esempio $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{cases}$$

elimi nenti

$$x = y = 0$$

Calcolo:

$$f_x(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + 2xy \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{y(x^4 - y^4) + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{(yx^4)(-)y^5 + (4x^2 y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$x^2 + y^2 \neq 0$

$$f_x(0,0) = 0$$

Voglio calcolare

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - y^5}{y} = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$$

ORA calcolo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = +1.$$

Quindi f ha le deriv. parziali seconde
miste diverse tra loro.

TEOR (Schwarz) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una

funzione che è esistente in un intorno
di $o \in \mathbb{R}^2$ e non è continua in $o \in \mathbb{R}^2$
le derivate seconde esiste. Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(o, o) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(o, o).$$

Dim. Schemo.

DEF Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Diciamo che
 $f \in C^2(A)$ se esistente e non è continua
in tutto A le derivate parziali seconde di f .

Insomma se $f \in C^2(A)$ per il Teor. di
Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

DEF (Matrice Hessian) . Dato $f \in C^2(A)$ e $x_0 \in A$
definiamo la matrice Hessian di f nel punto x_0

$$H(f)(x_0) = H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \end{pmatrix}_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots n}}.$$

$n \times n$

Per il Teor. di Schwarz $H(f)$ è simmetrica
se $f \in C^2$.

Lemma (Formule di Taylor in più variabili al 2° ordine)

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $x_0 \in A$ ed $f \in C^2(A)$.

Per ogni $x \in A$ ha che $[x_0, x] \subset A$ esiste
 $z \in [x_0, x]$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle.$$

In particolare si ha anche lo sviluppo con
resto di Peano

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)} + \underbrace{\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle} + o(|x - x_0|^2).$$

Dim. Chiamo $v = x - x_0$ e considero la
funzione

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv) \quad t \in [0, 1].$$

Per i fatti noti di Analisi 1 $\forall t \in [0, 1]$ esiste
 $\tau \in [0, t]$ tale che

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2} t^2 \varphi''(\tau)$$

Qui prendiamo $t = 1$:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(\tau) \quad \tau \in [0, 1]$$

Però:

$$\varphi(0) = f(x_0 + 0 \cdot v) = f(x_0)$$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} f(x_0 + tv)$$

$$= \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle \quad \leftarrow$$

$$\varphi'(0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Poi

$$\varphi''(t) = \frac{d}{dt} \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n v_i f_{x_i}(x_0 + tv)$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \frac{d}{dt} \left(f_{x_i} \right) (x_0 + tv)$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n v_j f_{x_i x_j}(x_0 + tv)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \left(f_{x_i x_j} \right) (x_0 + tv)$$

$$= \left\langle H_f(x_0 + tv) V, V \right\rangle \quad \leftarrow$$

Quindi

$$f(x) = \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(\tau)$$

$$\varphi(x_0 + t(x - x_0))$$

$$\varphi(x_0 + t(x - x_0))$$

$$= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle$$

$$z := x_0 + \varepsilon v$$

Per avere il tutto in forma di primo ordine di

$$\langle Hf(z)(x - x_0), (x - x_0) \rangle = \langle Hf(x_0)(x - x_0), (x - x_0) \rangle +$$

$$+ \underbrace{\langle (Hf(z) - Hf(x_0))(x - x_0), x - x_0 \rangle}_{\text{II}}$$

$$E = \text{Errore}$$

dove

$$\frac{\bar{E}}{|x - x_0|^2} = \left\langle \underbrace{(Hf(z) - Hf(x_0))}_{\substack{\text{dove } x \rightarrow x_0 \\ \Downarrow \\ z \rightarrow x_0}} \frac{x - x_0}{|x - x_0|}, \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right\rangle$$

dove ne

$$x \rightarrow x_0$$

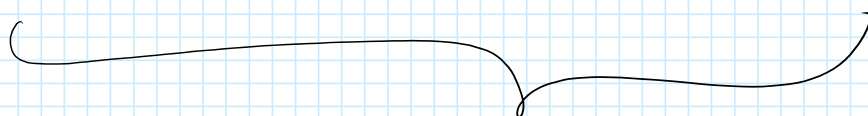
$$\Downarrow$$

$$z \rightarrow x_0$$

$$\downarrow x - x_0$$

$$0$$

↑
sono
limitati



$$\begin{array}{c} \downarrow \\ x - x_0 \\ 0 \end{array} \quad \square$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia ora (X, d) uno spazio metrico.

DEF Diciamo che un insieme $K \subset X$ è compatto se ogni successione di punti in K ammette una sottosuccessione convergente. Sol un punto di K .

Lemma Tutti gli insiemi compatti sono chiusi e limitati.

ATTENZIONE: Ci sono spazi metrici con insiemi che sono sia chiusi che limitati ma non sono compatti.

TUTTAVIA VALE in $\mathbb{R}^n$ con la dist. usuale:

TEOREMA (Heine - Borel) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$.

Allora sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

(A) K è compatto

(B) K è chiuso e limitato.