

ES

$$f(x, y) = x + \beta y^2 - \log(x+y)$$

$$A = \{x+y > 0\}$$

(i) Punti critici, $\beta \in \mathbb{R}$

$$f_x = 1 - \frac{1}{x+y}$$

$$f_y = 2\beta y - \frac{1}{x+y}$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+y} = 0 \\ 2\beta y - \frac{1}{x+y} = 0 \end{cases}$$

$$\implies 2\beta y - 1 = 0$$

Se $\beta = 0$ questa eq. diventa $-1 = 0$. Assurdo

$\implies$ se $\beta = 0$ NON ci sono p.li critici.

Se $\beta \neq 0$ hanno la soluzione

$$y = \frac{1}{2\beta}$$

Port. nella 1^ Eq. del sistema hanno:

$$1 - \frac{1}{x+y} = 0 \iff 1 = \frac{1}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow 1 = x+y$$

$$\Leftrightarrow x = 1-y$$

dunque bene

$$x = 1 - \frac{1}{2\beta}$$

le $\beta \neq 0$ c'è un unico punto critico

$$\text{che è } \left(1 - \frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta} \right) \in A$$

o.k

(ii) Per la Hessiana:

$$f_x = 1 - \frac{1}{x+y} \quad \Leftarrow$$

$$f_y = 2\beta y - \frac{1}{x+y} \quad \Leftarrow \Leftarrow$$

$$f_{xx} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f_{yx} = \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f_{yy} = 2\beta + \frac{1}{(x+y)^2}$$

dunque

$$\left[\frac{1}{(x+y)^2}, \frac{1}{(x+y)^2} \right]$$

Immagina

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x+y)^2} & \frac{1}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{(x+y)^2} & 2\beta + \frac{1}{(x+y)^2} \end{bmatrix}$$

(ii) Tutti i β reali $\neq$ n° convengono in A .

Intanto: A è convessa.

Per coprire questo $H_f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in A$.

$$\text{tr } H_f(x, y) = 2\beta + \frac{2}{(x+y)^2}$$

$$\det H_f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2} \left(2\beta + \frac{1}{(x+y)^2} \right) - \frac{1}{(x+y)^4}$$

$$= \frac{2\beta}{(x+y)^2}$$

Però hanno tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ reali

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\beta + \frac{2}{(x+y)^2} \geq 0 \quad \forall (x, y) \in A \\ \frac{2\beta}{(x+y)^2} \geq 0 \quad \forall (x, y) \in A \end{array} \right.$$

Però anche $\beta \geq 0$. In questo caso anche la n° arising è verificata.

dunque

$$f \text{ è convessa } \Leftrightarrow \beta \geq 0$$

(iv) Stabilire se il p.t. critico ha un min/max
loccale / globale.

• Se $\beta > 0$ c'è il p.t. critico

$$\left(1 - \frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta} \right)$$

e inoltre f è convessa.

Questo punto critico è un p.t. di
minimo assoluto / globale.

• Se $\beta < 0$. In questo caso

$$\det H_f(x,y) < 0$$

$$(x,y) \in A$$



Autovettori segno discorde (nullo)

$$\text{Ma allora } H_f(x,y) \text{ non è né } \geq 0 \text{ né } \leq 0.$$

Dunque il p.t. critico trovato non è
né di min né di max locale
(né nemmeno globale).

È un p.t. di sella.

ES 4 del 30/8/2016

Siano $\beta > 0$ e $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$

ed $f: K \rightarrow \mathbb{R}$

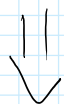
$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - \beta xy$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K e verificare che β

ii) Calcolare tutti i punti di minimo assoluto di f in K , e verificare che β

Soluz. f è continua

K è compatto (chiuso e limitato)



f ha massimo e minimo su K

Quindi esiste un punto in K dove f assume il valore minimo.

Osservazioni di simmetria

$$f(x, y) = f(y, x)$$

$$f(-x, -y) = f(x, y)$$

(i) Punti critici

$$f_x = 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - \beta y$$

$$f_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y - \beta x$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2) = \beta y \\ 4y(x^2 + y^2) = \beta x \end{cases}$$

Certamente $(0,0)$ è un pto criti interno

le $\boxed{x \neq 0 \text{ e } y \neq 0} \Rightarrow \beta \neq 0 \quad (\beta > 0)$
 2 membri le due equazioni e hanno da
 (x,y) dove verificare:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$$

Quindi hanno: dove essere

$$\boxed{x = y}$$

o oppure

$$\boxed{x = -y}$$

Prendiamo la prima $(x=y)$ e mettiamo sopra

$$4x(x^2 + y^2) = \beta y \rightarrow 4x \cdot 2x^2 = \beta y$$

$$\boxed{8x^3 = \beta x}$$

$$\updownarrow \quad x \neq 0$$

$$8x^2 = \beta$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\beta}{8}} \Leftrightarrow$$

$$\updownarrow$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{\beta}{8}}$$

Le poi ora mettiamo $y = -x$ nello 1^a eq.

Then

$$0,3 - 2,1$$

Then

$$8x^3 = -\beta x$$



$$8x^2 = -\beta$$

Non ci sono
soluzioni

ho invece 2 p.ti critici

$$\left(\pm \sqrt{\frac{\beta}{8}}, \pm \sqrt{\frac{\beta}{8}} \right)$$

Vediamo se sono interni al disco

$$\frac{\beta}{8} + \frac{\beta}{8} < 1$$



$$\frac{\beta}{4} < 1$$

$(\Rightarrow)$

$$\beta < 4$$

più altri 4 oltre

Quindi

$(\Rightarrow)$

i p.ti critici

$$\beta < 4.$$

sono interni a k

In tutto ci sono

3 p.ti crit. inter a $\beta < 4$

1 " " " a $\beta > 4$

(ii) p.ti di min. su ∂k .

Il punto di min. assoluto c'è su k

ma' trovarli in $\text{int}(k)$ oppure su ∂k .

Stesio 4 punti sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - \beta xy$$

$$= (1) - \beta xy$$

Metto $x = \cos \theta$ e $y = \sin \theta$ $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\phi(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$= 1 - \frac{\beta}{2} 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - \frac{\beta}{2} \sin(2\theta)$$

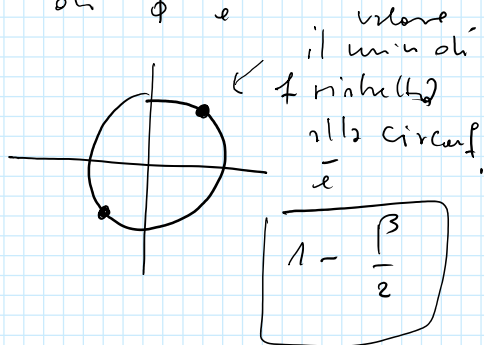
Voglio capire dove ϕ assume il minimo.

Questo succede quando $\sin(2\theta) = 1$

ovvero per $2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pi/4$ (e $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi$)

dove $x = y$ e il valore minimo di ϕ è

$$1 - \frac{\beta}{2}$$



Esamino i p.ti critici interni

- $(x, y) = (0, 0)$ $f(x, y) = f(0, 0) = 0$

- Per $\beta < 4$ ho anche i punti

$$\left(\pm \sqrt{\frac{\beta}{8}}, \pm \sqrt{\frac{\beta}{8}} \right)$$

ovvero f assume il valore;

$$f(\text{---}) = \left(\frac{\beta}{8} + \frac{\beta}{8} \right)^2 - \beta \frac{\beta}{8}$$

$$= \left(\frac{\beta}{4} \right)^2 - \frac{\beta^2}{8}$$

$$= \frac{\beta^2}{16} - \frac{\beta^2}{8}$$

$$= -\frac{\beta^2}{16} < 0$$

Quindi $(0,0)$ NON è un punto di minimo
se $\beta < 4$.

Continuo a lavorare su $\beta < 4$.

Confronto $-\frac{\beta^2}{16}$ con $1 - \frac{\beta}{2}$

Thm:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\beta^2}{16} \stackrel{?}{\leq} 1 - \frac{\beta}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{VERO} \\ \text{?} \end{array} \right\} \\
 & \quad \quad \quad \updownarrow \\
 & = \frac{\beta^2}{16} - \frac{\beta}{2} + 1 \geq 0 \\
 & = \left(\frac{\beta}{4} - 1 \right)^2 \geq 0 \quad \text{indip. da } \beta
 \end{aligned}$$

• Adesso che:

$$\beta < 4 \Rightarrow \left(\pm \sqrt{\frac{\beta}{8}}, \pm \sqrt{\frac{\beta}{8}} \right) \text{ è un p.to di min. relativo interno}$$

• Se poi $\beta \geq 4$. Confronto

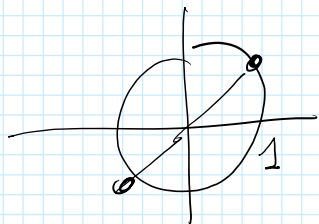
$$\begin{aligned}
 & f(0) = 0 \stackrel{\text{FALSO}}{\leq} 1 - \frac{\beta}{2} \\
 & \quad \quad \quad \updownarrow \\
 & \quad \quad \quad \boxed{}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\beta \leq 2}$$

Altrimenti $\beta > 2$

$$0 > 1 - \frac{\beta}{2}$$

Quindi β non è un p.f. di minimo modulo
i p.f. di minimo modulo si hanno
sulle frontiere e non



dove $\frac{1}{2}$ vale $1 - \beta/2$.

ES 3 del 12/9/2016

Si consideri il sottoinsieme del piano

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1 \text{ e } y^2 \leq \frac{5}{4+x^4} \right\}$$

- (1) Stabilire se C è chiuso
- (2) Stabilire se C è compatto
- (3) Disegnare C .

Soluzioni

$$(1) \quad C = C_1 \cap C_2 = \{(x, y) \mid \text{Cont.}\} \quad \text{chiuso}$$

$$(i) \quad C = C_1 \cap C_2 = f(x, y)$$

$$E' \quad C_1 = \{ \boxed{xy > 1} \} = f^{-1}([1, \infty))$$

$$E' \text{ chiuso}, \quad C_2 = \left\{ \underbrace{y^2 - \frac{5}{4+x^4}}_{\parallel} \leq 0 \right\} = f^{-1}\left(\underbrace{(-\infty, 0]}_{\text{chiuso}}\right)$$

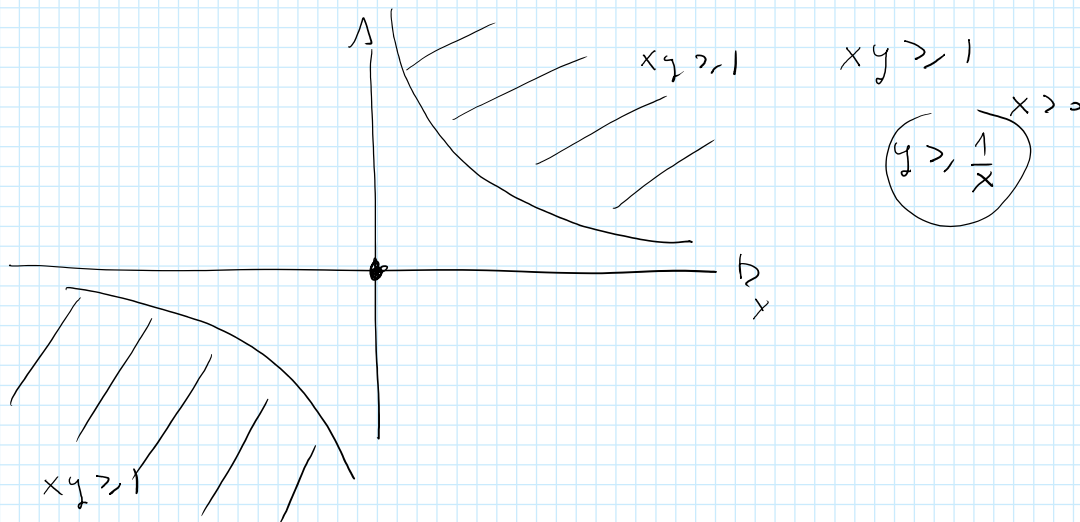
$f(x, y) \in E'$ continuo

Quindi se

$C = C_1 \cap C_2$ è chiuso
intersez. di 2 chiusi,

(ii) Stabilire se C è compatto.

Una coppia se C è limitato.



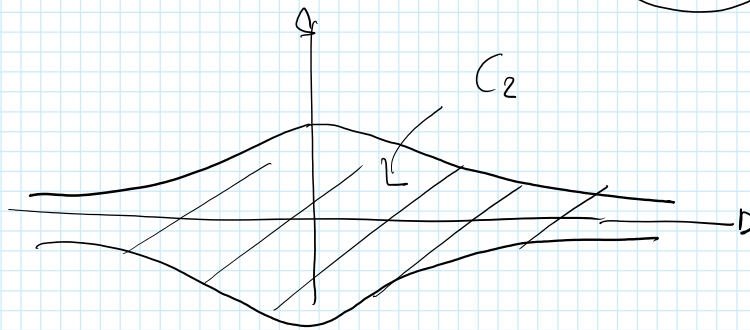
Poi c'è la conol.

$$y^2 \leq \frac{5}{4+x^4}$$

$\Leftrightarrow$

$$|y| \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4+x^4}}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4+x^4}} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4+x^4}} = \phi(x)$$



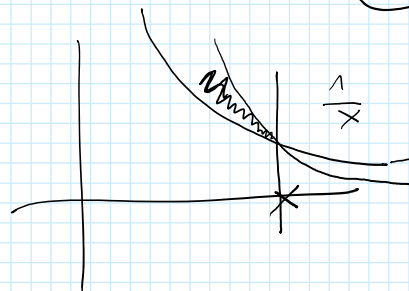
Qui mi circo

$$y \leq \frac{1}{x^2}$$

hoi
pura vena

$$y > \frac{1}{x}$$

sto
no ho
x > 0



Quindi c'è limite

FARE A CASA I DETTAGLI