Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 29/8/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n|x|)}{1+n^2x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare preliminarmente che $\log(1+t) \leq \sqrt{t}$ per ogni $t \geq 0$.

ii) Studiare la convergenza puntuale della serie.

iii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: ii) CP per $x \in$; iii) CU per $x \in$

Esercizio 2 (12 punti) Dato il parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y}{|x|^3 + |y|^5} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$.

iii) Provare che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$.

Risposte: i) f continua in $(0,0)$ per $\alpha \in$; ii) $f_x =$ $f_y =$

Esercizio 3 (9 punti) Sia $\beta \in \mathbb{R}$ un parametro e sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$ consideriamo la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{x - \beta y}{x^2+y^2-1}dx + \frac{y+\beta x}{x^2+y^2-1}dy.$$

i) Calcolare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che ω sia chiusa in A.

ii) Stabilire se per qualche valore di β la forma ω è esatta in A.

Risp.: i) ω chiusa per $\beta =$; ii) ω esatta per $\beta =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola:

Scritto del 29/8/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{1+n^2x^4}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare preliminarmente che $\log(1+t) \leq \sqrt{t}$ per ogni $t \geq 0$.

ii) Studiare la convergenza puntuale della serie.

iii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: ii) CP per $x \in$	; iii) CU per $x \in$

Esercizio 2 (12 punti) Dato il parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{|x|^5+|y|^3} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$.

iii) Provare che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$.

Risposte: i) f continua in $(0,0)$ per $\alpha \in$	; ii) $f_x =$	$f_y =$

Esercizio 3 (9 punti) Sia $\beta \in \mathbb{R}$ un parametro e sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$ consideriamo la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{x+\beta y}{x^2+y^2-1}dx + \frac{y-\beta x}{x^2+y^2-1}dy.$$

i) Calcolare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che ω sia chiusa in A.

ii) Stabilire se per qualche valore di β la forma ω è esatta in A.

Risp.: i) ω chiusa per $\beta =$	; ii) ω esatta per $\beta =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n|x|)}{1+n^2x^2} .$$

i) Provare che $\log(1+t) \leq \sqrt{t}$ per ogni $t \geq 0$.

ii) Studiare la convergenza ~~p~~ puntuale della serie.

iii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risoluzione. i) Consideriamo la funzione $\phi(t) = \log(1+t) - \sqrt{t}$ per $t \geq 0$. La sua derivata è:

$$\phi'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} .$$

Studiamo

$$\phi'(t) \leq 0 \iff \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \iff 2\sqrt{t} \leq 1+t$$

$$\iff 0 \leq (1-\sqrt{t})^2 \quad \text{sempre verificato.}$$

Quindi ϕ è decrescente. Siccome $\phi(0) = 0$ segue che $\phi(t) \leq 0$ per $t \geq 0$.

ii) Per simmetria basta studiare $x \geq 0$. Serie a termini positivi. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$, converge.

Per $x > 0$ usiamo il punto i):

$$\frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2} \leq \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{(nx)^{3/2}}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty ;$$

La serie data converge per confronto.

Conclusione: Convergenza puntuale per $x \in \mathbb{R}$.

iii) Se $x \geq \delta > 0$ allora:

$$\sup_{x \geq \delta} \frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2} \leq \sup_{x \geq \delta} \frac{1}{(nx)^{3/2}} = \frac{1}{\delta^{3/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

Per il Criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$.

iv) (Non richiesto all'esame). Non c'è convergenza uniforme su $[0, \delta]$. Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n|x|)}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo $f(0) = 0$. Inoltre, per ogni $n = 1, 2 \dots$ e per ogni $x > 0$ si ha

$$f(x) \geq \frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2}.$$

In particolare con $x = 1/n$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{\log 2}{2} > 0$$

Quindi f non può essere continua in $x=0$.
Quindi la serie non può convergere uniformemente su $[0, \delta]$.

$\square$

ESERCIZIO Dato il parametro $\alpha>0$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y}{|x|^3+|y|^5} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha>0$ tali che f è continua in $(0,0)$.

ii) Provare che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha>3$.

Risoluzione. i) Proviamo a fare direttamente la stima di continuità:

$$0 \leq \frac{|x|^\alpha |y|}{|x|^3+|y|^5} \leq \frac{(|x|^3)^{\frac{\alpha}{3}} (|y|^5)^{\frac{1}{5}}}{|x|^3+|y|^5} \leq \frac{(|x|^3+|y|^5)^{\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{5}}}{|x|^3+|y|^5}$$

$$\leq (|x|^3+|y|^5)^{\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{5}-1}$$

Se $\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{5}-1>0$ allora f è continua in $(0,0)$ in quanto per confronto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|}{|x|^3+|y|^5} = 0 = f(0),$$

La condizione è $\frac{\alpha}{3} > \frac{4}{5} \iff \alpha > \frac{12}{5}$. Dunque:

$$\alpha > \frac{12}{5} \implies f \text{ è continua in } (0,0)$$

Dobbiamo provare l'implicazione inversa. Il test delle rette con

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad \text{con } \theta \text{ fissato ed } r \to 0^+$$

fornisce:

$$f(x,y) = \frac{r^{1+\alpha}|\cos\theta||\sin\theta|}{r^3|\cos\theta|^3 + r^5|\sin\theta|^5}$$

$$= \frac{1}{r^{2-\alpha}} \frac{|\cos\theta||\sin\theta|}{|\cos\theta|^3 + r^2|\sin\theta|^5}$$

Se $2-\alpha \geq 0$ (ovvero $\alpha \leq 2$) il limite per $r \to 0^+$ NON è 0.

Dunque: $\alpha \leq 2 \Rightarrow f$ NON è continua in $(0,0)$.

Rimangono da studiare i valori $2 < \alpha \leq 12/5$.

Prendiamo la curva

$$x = t^5 \qquad y = t^3 \qquad \text{con } t \to 0^+$$

Si ha

$$f(x,y) = \frac{t^{5\alpha+3}}{2t^{15}} = \frac{1}{2} t^{5\alpha+3-15} = \frac{1}{2} t^{5\alpha-12}$$

Se $5\alpha - 12 \leq 0$ il limite per $t \to 0^+$ NON è 0. Dunque

$$\alpha \leq \frac{12}{5} \Rightarrow f \text{ non è continua in } (0,0).$$

Conclusione:

$$f \text{ cont. in } (0,0) \Leftrightarrow \alpha > \frac{12}{5}.$$

ii) Siccome $f = 0$ per $xy = 0$ (due assi), si ha

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Test della differenziabilità: trovare $\alpha > 0$ tali che

$$\circledast \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha y}{(|x|^3 + |y|^5)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Sappiamo che dobbiamo trovare un sottoinsieme di $\left(\frac{12}{5}, \infty\right)$.

Il testo suggerisce la risposta $\alpha > 3$.

Stime:

$$\frac{|x|^\alpha |y|}{(|x|^3 + |y|^5)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|^3 + |y|^5} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|^3} = |x|^{\alpha-3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

se $\alpha > 3$

Dunque, se $\alpha > 3$ il limite in $\circledast$ è 0, e quindi:

$$\alpha > 3 \implies f \text{ differenziabile in } (0,0).$$

Facciamo il test delle rette in $\circledast$ con $x = t$ e $y = t$.

Si trova:

$$\frac{t^{\alpha+1}}{(t^3+t^5)\, t\sqrt{2}} = \frac{t^\alpha}{\sqrt{2}\, t^3(1+t^2)} = \frac{t^{\alpha-3}}{\sqrt{2}(1+t^2)}$$

che NON converge a 0 per $t \to 0^+$ se $\alpha \leq 3$. Quindi:

$$\alpha \leq 3 \implies f \text{ non è differenziabile in } (0,0).$$

$\square$

ESERCIZIO Sia $\beta \in \mathbb{R}$ un parametro e sull'insieme aperto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$ consideriamo la 1-forma differenziale:

$$\omega = \frac{x-\beta y}{x^2+y^2-1}\,dx + \frac{y+\beta x}{x^2+y^2-1}\,dy ,$$

i) Calcolare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che ω sia chiusa in A

ii) Stabilire se per quel valore di β la forma ω è esatta in A.

Risoluzione. i) La condizione di forma chiusa è:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+\beta x}{x^2+y^2-1}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-\beta y}{x^2+y^2-1}\right)$$

ovvero:

$$\frac{\beta(x^2+y^2-1)-(y+\beta x)\,2x}{(x^2+y^2-1)^2} = \frac{-\beta(x^2+y^2-1)-(x-\beta y)\,2y}{(x^2+y^2-1)^2}$$

ovvero:

$$\cancel{\beta x^2} + \cancel{\beta y^2} - \beta - \cancel{2xy} - \cancel{2\beta x^2} = -\cancel{\beta x^2} - \cancel{\beta y^2} + \beta - \cancel{2xy} + \cancel{2\beta y^2}$$

ovvero: $-\beta = \beta$ che fornisce $\beta = 0$. Dunque:

$$\omega \text{ chiusa} \iff \beta = 0.$$

ii) ω può essere esatta solo per il valore $\beta = 0$.

Tuttavia A non è semplicemente connesso.
Quindi dal fatto che ω è chiusa in A non si deduce che ω è esatta in A.

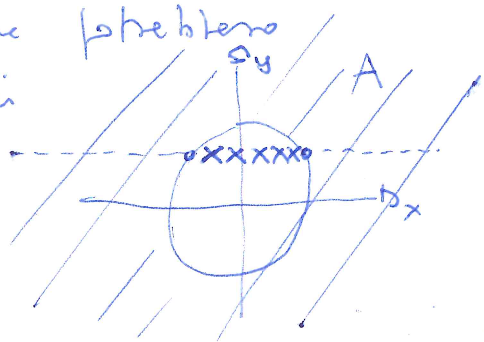
Cerchiamo un potenziale $f \in C^\infty(A)$ tale che

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{x}{x^2+y^2-1}, \\[2ex] f_y = \dfrac{y}{x^2+y^2-1}. \end{cases} \quad ⊛$$

Integrando la prima equazione:

$$f(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2-1}\, dx =$$

Poco chiaro, perché nell'intervallo di integrazione potrebbero esserci buchi



$$= \frac{1}{2} \log(x^2+y^2-1) + C(y)$$

Da cui $f_y = \dfrac{x}{x^2+y^2-1} + C'(y)$, equazione che confrontata con ⊛ fornisce $C'(y) = 0$ e quindi (solito problema dei buchi) $C =$ costante.

Prendiamo ad es. $C = 0$. I dubbi precedenti sono superati dalla constatazione che $f(x,y) = \log(x^2+y^2-1)$ è certamente un potenziale di f su A.

□