Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 18/9/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = e^x + e^y - (x + y) + (x + y)^2.$$

i) (5pt) Calcolare tutti i punti critici di f.

ii) (4pt) Stabilire se f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) (1pt) Stabilire se i punti critici trovati sono punti di min/max locale/assoluto.

Risposte: i) punti critici:	ii) f convessa si/no: ;
iii) estremi di f:	

Esercizio 2 Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1 + e^{nx}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) (4pt) Calcolare i limiti puntuali

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

ii) (3pt) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) (3pt) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Risposte: i) $f(x) =$	$g(x) =$;
ii) f_n CU per $x \in$	; iii) f_n' CU per $x \in$

Esercizio 3 Sul quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \arcsin(y)dx + ydy,$$

e sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ la circonferenza unitaria.

i) (2pt) Tracciare il grafico della funzione $t \mapsto \arcsin(\sin t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

ii) (8pt) Calcolare l'integrale di ω lungo γ.

Risposte: i) grafico:	; ii) $\int_\gamma \omega =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 18/9/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = e^x + e^y - (x + y) + (x + y)^2.$$

i) (5pt) Calcolare tutti i punti critici di f.

ii) (4pt) Stabilire se f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) (1pt) Stabilire se i punti critici trovati sono punti di min/max locale/assoluto.

Risposte: i) punti critici:	ii) f convessa si/no: ;
iii) estremi di f:	

Esercizio 2 Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log(1 + e^{nx}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) (4pt) Calcolare i limiti puntuali

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

ii) (3pt) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) (3pt) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Risposte: i) $f(x) =$	$g(x) =$;
ii) f_n CU per $x \in$	; iii) f_n' CU per $x \in$

Esercizio 3 Sul quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \arcsin(y)dx + y^2 dy,$$

e sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ la circonferenza unitaria.

i) (2pt) Tracciare il grafico della funzione $t \mapsto \arcsin(\sin t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

ii) (8pt) Calcolare l'integrale di ω lungo γ.

Risposte: i) grafico:	; ii) $\int_\gamma \omega =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = e^x + e^y - (x+y) + (x+y)^2 .$$

1) Calcolare tutti i punti critici di f;

2) Stabilire se f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$

3) Stabilire se i punti critici trovati sono di max/min locale/assoluto.

Risoluzione. 1) Il gradiente di f è composto dalle derivate parziali

$$f_x = e^x - 1 + 2(x+y),$$

$$f_y = e^y - 1 + 2(x+y).$$

Risolviamo il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$. Sottraendo le due equazioni si trova $e^x = e^y$ che implica $x = y$. Sostituendo nella prima equazione si trova

$$\phi(x) = e^x - 1 + 4x = 0 .$$

Osserviamo che $\phi'(x) = e^x + 4 > 0$ ovvero ϕ è strettamente crescente. Inoltre $\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \infty} \phi(x) = +\infty$.

Quindi per il teorema degli zeri $\phi(x) = 0$ ha una soluzione, che è unica. Questa soluzione è $x = 0$. Dunque $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ è l'unico punto critico di f.

2) Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx} = e^x + 2 \qquad f_{yy} = e^y + 2 \qquad f_{xy} = 2$$

Dunque traccia e determinante della matrice Hessiana sono:

$$\mathrm{tr}\, Hf(x,y) = f_{xx} + f_{yy} = e^x + e^y + 4 > 0$$

$$\det Hf(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (e^x+2)(e^y+2) - 4$$

$$= e^{x+y} + 2e^x + 2e^y > 0 .$$

Dunque

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tr}\, Hf > 0 \\ \det Hf > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Hf > 0 \quad \text{su tutto } \mathbb{R}^2.$$

Quindi f è convessa su $\mathbb{R}^2$.

3) Siccome f è convessa, l'unico punto critico trovato è un punto di minimo assoluto stretto.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log(1+e^{nx}) , \quad x \in \mathbb{R} .$$

1) Calcolare i limiti puntuali

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) \qquad \text{dove esistono.}$$

2.) Studiare la convergenza uniforme delle successioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Risoluzione. 1) Per $x \leq 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(1+e^{nx}) = 0$$

Per $x > 0$ si trova invece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(1+e^{nx}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(e^{nx}\left(1+\frac{1}{e^{nx}}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\frac{1}{n} \log e^{nx}}_{\equiv\, x} + \underbrace{\frac{1}{n} \log(1+e^{-nx})}_{\to\, 0} \right\} = x$$

Dunque $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 . \end{cases}$$

Si ha
$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \frac{n e^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$$

Se $x=0$ vediamo che $f_n'(0) = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dunque
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \frac{1}{2}.$$

Per $x>0$ si ha $e^{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, Dunque
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 1 \quad \text{se} \quad x>0.$$

Se infine $x<0$ si ha $e^{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e dunque
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0 \quad \text{se} \quad x<0.$$

In conclusione
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 1/2 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x<0. \end{cases}$$

2) Studiamo la convergenza uniforme di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Caso $x\geq 0$:

$$\phi_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n}\log(1+e^{nx}) - x \geq 0 \quad \text{per } x\geq 0$$

$$\phi_n'(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} - 1 = \frac{-1}{1+e^{nx}} < 0 \implies \phi_n \text{ decresce}$$

Di conseguenza

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 0} f_n(x) - f(x) = \underbrace{f_n(0) - f(0)}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} .$$

c'è CU su $[0,\infty)$

Caso $x \leq 0$:

$$\phi_n(x) = f_n(x) - f(x) = f_n(x) - 0 = f_n(x) \geq 0$$

$$\phi_n'(x) = f_n'(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} \geq 0 \quad \Rightarrow \phi_n \text{ cresce}$$

Quindi

$$\sup_{x\leq 0} |f_n(x) - f(x)| = \underset{\substack{\| \\ 0}}{f_n(0) - f(0)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'è CU su $[-\infty, 0)$.

Rimane da studiare la CU di $f_n'(x) = \dfrac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Certamente non c'è CU in un intorno di $x=0$ perché la g non è continua in $x=0$.

Calcoliamo

$$f_n''(x) = \frac{ne^{nx}(1+e^{nx}) - e^{nx}\, ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} = \frac{ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} > 0$$

Dato $\delta > 0$ si ha dunque

$$\sup_{x\geq\delta} |f_n'(x) - 1| = \sup_{x\geq\delta}\left(1 - \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}\right) = 1 - \frac{e^{n\delta}}{1+e^{n\delta}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Quindi c'è CU su $[\delta, \infty)$.

Poi:

$$\sup_{x \leq -\delta} |f_n'(x) - 0| = \sup_{x \leq -\delta} \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{e^{-n\delta}}{1+e^{-n\delta}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Quindi c'è CU su $(-\infty, -\delta]$.

Risposta: (f_n') converge uniformemente su $|x| \geq \delta$ per ogni $\delta > 0$. Ma non su tutto $\mathbb{R}$.

$\square$

ESERCIZIO Su $[-1,1]\times[-1,1]$ si consideri la forma differenziale

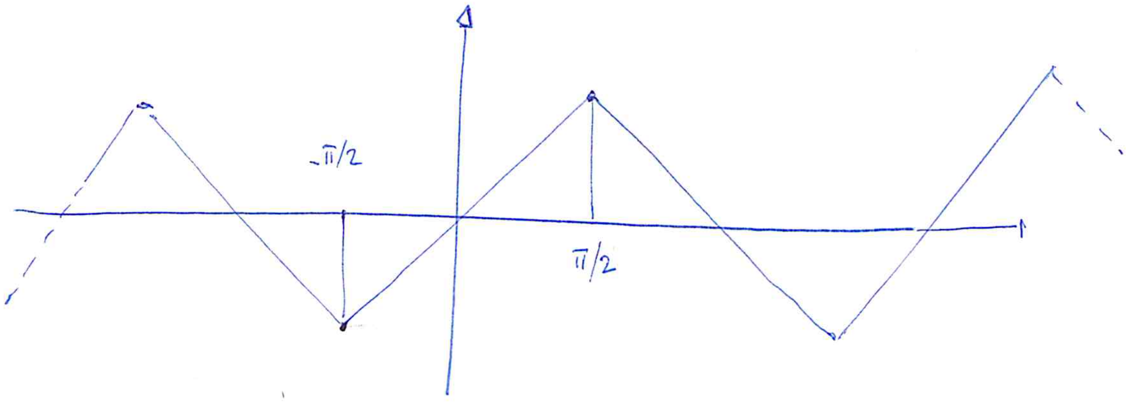
$$\omega = \arcsin(y)\,dx + y\,dy$$

e sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

i) Tracciare il grafico di $t \mapsto \arcsin(\sin t)$ per $t \in \mathbb{R}$.

ii) Calcolare $\int_\gamma \omega$.

Risoluzione i) Per $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha $\arcsin(\sin t) = t$.
Nei punti $\frac{\pi}{2} - t$ e $\frac{\pi}{2} + t$ il sin assume lo stesso valore.
Quindi per $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ si trova il grafico



E poi è 2π-periodica.

ii) Intanto osserviamo che $y\,dy$ è esatta (potenziale $\frac{y^2}{2}$)
Quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \arcsin(y)\,dx \quad \text{perché } \gamma \text{ è chiusa.}$$

Abbiamo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ e $\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$.

Quindi

$$\int_\gamma \arcsin(y)\,dx = \int_0^{2\pi} \arcsin(\sin t)\,(-\sin t)\,dt$$

La funzione $t \mapsto \sin t \arcsin t$ è π-periodica.
Lo si capisce dal grafico al punto i).

Dunque

$$\int_0^{2\pi} \arcsin(\sin t) \sin t \, dt = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \arcsin(t) \sin t \, dt =$$

$$= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin t \, dt \overset{\text{per parti}}{=} 2 \left\{ \Big[-t \cos t \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, dt \right\}$$

$$= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, dt = 2 \Big[\sin t \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4$$

Dunque

$$\int_\gamma \omega = -4$$

$\square$