Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 25/1/2018 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Calcolare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga il seguente integrale improprio

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{(x+2)^2[\log(1+x)]^\alpha}dx.$$

Risposta: $\alpha \in$

Esercizio 2 (11 punti) Sia $\beta \geq 0$ un parametro reale e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\beta |y|}{|x| + \sqrt{|y|}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti i valori di $\beta \geq 0$ tali che:

i) f sia continua nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$;

ii) f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$;

iii) f abbia tutte le derivate direzionali nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$;

iv) f sia differenziabile in 0.

Risposte: i) $\beta \in$	; ii) $\beta \in$	; iii) $\beta \in$	; iv) $\beta \in$

Esercizio 3 (10 punti) Dato un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x(x^2 + \gamma y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Al variare di γ, calcolare i punti critici di f.

ii) Al variare di γ, stabilire se i punti critici trovati sono punti di massimo/minimo locale/assoluto.

Risp.: i) Punti critici:	; ii) Max/min loc/ass:

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Stabilire tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga il seguente integrale improprio

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{t}{(t+2)^2 [\log(1+t)]^\alpha} \, dt .$$

Risoluzione. Separiamo lo studio sugli intervalli $[0,1]$ e $[1,\infty)$.

Iniziamo dall'integrale

$$\int_0^1 \frac{t}{(t+2)^2 [\log(1+t)]^\alpha} \, dt .$$

Siccome $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0^+$, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge se e solo se converge il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{t}{t^\alpha} \, dt < \infty \iff \int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}} \, dt < \infty$$

$$\iff \alpha - 1 < 1 \iff \boxed{\alpha < 2}.$$

Passiamo allo studio dell'integrale

$$\circledast = \int_1^\infty \frac{t}{(t+2)^2 [\log(1+t)]^\alpha} \, dt .$$

Prendiamo la funzione di confronto

$$g(t) = \frac{1}{(t+1) [\log(1+t)]^\alpha}$$

Osserviamo che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{t}{(t+2)^2[\log(1+t)]^\alpha}}{g(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t(t+1)}{(t+2)^2} = 1.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale ⊛ converge se e solo se converge l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{(t+1)[\log(1+t)]^\alpha}\,dt < \infty \overset{(\alpha\neq 1)}{\iff} \left[\frac{[\log(1+t)]^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{t=1}^{t=\infty} < \infty$$

$$\iff -\alpha+1 < 0$$

$$\iff \boxed{\alpha > 1}$$

Nel caso $\alpha = 1$, la primitiva è $\log(\log(t+1))$ e l'integrale diverge.

Conclusione: I_α converge $\iff 1 < \alpha < 2$.

□

ESERCIZIO Sia $\beta \geq 0$ un parametro e si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\beta |y|}{|x| + \sqrt{|y|}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti i $\beta \geq 0$ tali che:

i) f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$;

iii) f abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$.

iv) f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) Continuità in $0 \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{|x|^\beta |y|}{|x| + \sqrt{|y|}} \leq \frac{|x|^\beta |y|}{\sqrt{|y|}} = |x|^\beta \sqrt{|y|} \longrightarrow 0$$

se $y \to 0$ indipendentemente da $\beta \geq 0$.

Quindi f cont. in $0 \in \mathbb{R}^2 \iff \beta \geq 0$.

ii) Su $x \neq 0$ f è continua (quoziente di funzioni continue). Studiamo la cont. nel punto $(0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $y_0 \neq 0$. Se $\beta > 0$: $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{|x|^\beta y}{|x| + \sqrt{|y|}} = 0 = f(0, y_0)$.

Se $\beta = 0$: $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{\overbrace{|x|^0}^{=1} y}{|x| + \sqrt{|y|}} = \sqrt{|y_0|} \operatorname{sign}(y_0) \neq 0.$

Quindi: f cont. su $\mathbb{R}^2 \iff \beta > 0$.

iii) Se esiste, la derivata direzionale nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$ nella direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{|t|^{\beta+1} |v_1|^{\beta} |v_2|}{|t|\,|v_1| + \sqrt{|t|}\,\sqrt{|v_2|}}$$

Se $\beta = 0$ si trova

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t\sqrt{|t|}} \frac{|v_2|}{\sqrt{|t|}\,|v_1| + \sqrt{|v_2|}}$$

e il limite esiste solo se $v_2 = 0$.

Se $\beta > 0$ si trova

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t|^{\beta+1}}{t\sqrt{|t|}} \frac{|v_1|^{\beta} |v_2|}{\sqrt{|t|}\,|v_1| + \sqrt{|v_2|}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } |v_2| = 0 \quad \text{indip. da } \beta \\ 0 & \text{se } \beta > 1/2 \\ \text{non esiste finito} & \text{se } \beta \leq 1/2 \end{cases}$$

Conclusione: tutte le derivate direzionali esistono (e sono $= 0$) se e solo se $\beta > 1/2$.

iv) $\cancel{\text{ii}})$ Possiamo limitarci al caso $\beta > 1/2$. In questo caso

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Per essere differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$, f deve verificare:

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\beta \, |y|}{(|x| + \sqrt{|y|}) \sqrt{x^2+y^2}} \qquad (*)$$

Procediamo con delle stime dirette:

$$\frac{|x|^\beta \, \underbrace{|y|}_{= \sqrt{|y|}\cdot\sqrt{|y|}}}{(|x| + \sqrt{|y|})(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{|x|^\beta \sqrt{|y|}}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

Nel caso che

$$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} \iff \beta > \frac{1}{2}$$

il limite in $(*)$ è $= 0$.

Dunque: f differenziabile in $0 \iff \beta > \frac{1}{2}$.

$\square$

ESERCIZIO Dato il parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x (x^2 + \gamma y^2).$$

i) Al variare di γ, calcolare tutti i punti critici di f.

ii) Al variare di γ, stabilire se i punti critici sono punti di max/min locale/globale.

Risoluzione. i) Le derivate parziali di f sono:

$$f_x = e^x (x^2 + \gamma y^2) + e^x \cdot 2x = e^x (x^2 + \gamma y^2 + 2x)$$

$$f_y = e^x \, 2\gamma y.$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ diventa

$$\begin{cases} x^2 + \gamma y^2 + 2x = 0 \\ 2\gamma y = 0 \end{cases}$$

Nel caso $\gamma = 0$ si riduce a $x^2 + 2x = 0$ ovvero $x = 0$ oppure $x = -2$. Si trovano i punti critici

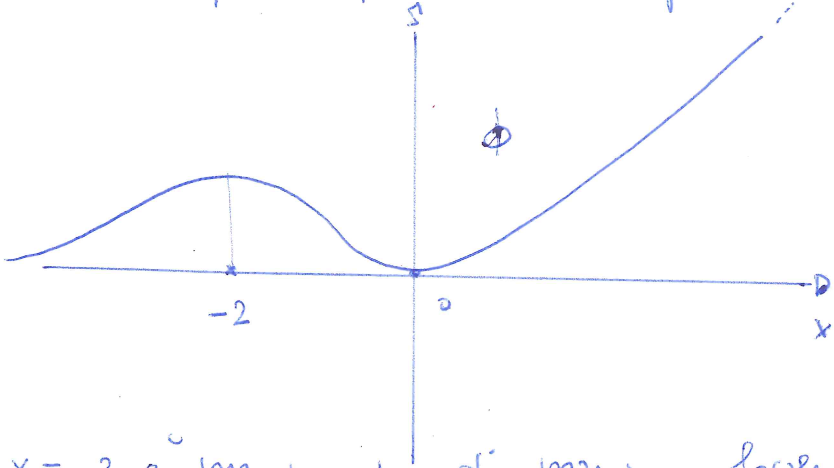
$$(0,y), (-2,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Se $\gamma \neq 0$ la seconda equazione fornisce $y = 0$ e la prima diventa di nuovo $x^2 + 2x = 0$. I punti critici sono $(0,0), (-2,0) \in \mathbb{R}^2$.

ii) Nel caso $\gamma = 0$ la funzione si riduce a

$$f(x,y) = e^x \cdot x^2 = \phi(x).$$

Il grafico di ϕ è fatto nel seguente modo:



dove $x=-2$ è un punto di massimo locale e $x=0$ è di minimo assoluto. Dunque:

$(0,y)$ punti di min. assoluto di f
$(-2,y)$ punti di max. locale di f $\quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Studiamo il caso $\gamma \neq 0$. La matrice Hessiana di f è:

$$f_{xx} = e^x (x^2 + \gamma y^2 + 2x + 2x + 2)$$

$$f_{xy} = e^x (2\gamma y)$$

$$f_{yy} = e^x (2\gamma)$$

Analisi del punto $(0,0)$:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\gamma \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr} Hf(0,0) = 2(\gamma+1)$$

$$\det Hf(0,0) = 4\gamma$$

Dunque:

$\gamma > 0 \Rightarrow Hf(0,0) > 0 \Rightarrow (0,0)$ p.to di minimo locale stretto.

$\gamma < 0 \Rightarrow \det Hf(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0)$ p.to di sella.

In effetti per $\gamma > 0$ si ha $f \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$ e quindi $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ è un (il) punto di minimo assoluto.

Analisi del punto $(-2,0)$:

$$Hf(-2,0) = e^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\gamma \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} Hf(-2,0) = (-2+2\gamma)e^{-2}$$

$$\det Hf(-2,0) = -4\gamma e^{-4}$$

Dunque:

$\gamma > 0 \Rightarrow \det Hf(-2,0) < 0 \Rightarrow (-2,0)$ punto di sella

$\gamma < 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \det Hf(-2,0) > 0 \\ \operatorname{tr} Hf(-2,0) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-2,0)$ punto di massimo locale.

Siccome $\lim_{x \to +\infty} f(x,y) = +\infty$, il punto $(-2,0)$ non può essere un punto di massimo assoluto.

□

Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 18/9/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Sia $\alpha > 0$ in parametro e si consideri l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{\pi/2 - \arcsin x}{\sin^2 x} \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^\alpha dx.$$

i) Calcolare preliminarmente il valore di $\beta > 0$ tale che il seguente limite esista finito e diverso da zero:

$$L = \lim_{x \to 1^-} \frac{\pi/2 - \arcsin x}{(1-x)^\beta}.$$

ii) Determinare tutti i valori di $\alpha > 0$ tali che l'integrale dato converga.

Risposte: i) $\beta =$; ii) $\alpha \in$

Esercizio 2 (11 punti) Si consideri il sottoinsieme del piano

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y^4 \text{ e } \sqrt[3]{x} > |y|\big\}.$$

i) Provare che A è aperto e non vuoto.

ii) Disegnare A.

iii) Stabilire se $\bar{A}$ è compatto.

iv) Descrivere la frontiera di A.

Risposte: iii) $\bar{A}$ compatto Si/No ; iv) $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \dots \quad \}$;

Esercizio 3 (10 punti) Dato un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x(y^2 + \gamma x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Al variare di γ, calcolare i punti critici di f.

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Stabilire se i punti critici trovati sono punti di massimo/minimo locale/assoluto.

Risp.: i) Punti critici: ; ii) $Hf(x,y) =$; iii) Max/min loc/ass:

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Calcolare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che converga il seguente integrale improprio:

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sin^2 x} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha dx.$$

Soluzione. La funzione integranda può avere asintoti verticali sia in $x = 0$ che in $x = 1$.
Studiamo separatamente

$$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sin^2 x} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha dx$$

$$I_2 = \int_{1/2}^{1} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sin^2 x} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha dx.$$

Per il Criterio del Confronto Asintotico:

$$I_1 < \infty \iff \int_0^{1/2} \frac{x^\alpha}{\sin^2 x} dx < \infty$$

$$\sin x = x + o(x), \quad x \to 0$$

$$\iff \int_0^{1/2} \frac{x^\alpha}{x^2} dx < \infty$$

$$\iff 2 - \alpha < 1 \iff \boxed{\alpha > 1}.$$

Passiamo ad I_2. Per confronto Asintotico

$$I_2 < \infty \iff \int_{1/2}^{1} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(1-x)^{\alpha}}\, dx < \infty$$

Cerco $\beta \in \mathbb{R}$ t.c. esista finito $\neq 0$ il limite

$$0 \neq L = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(1-x)^{\beta}} \quad \text{Hôspital}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\beta (1-x)^{\beta-1} \sqrt{1-x^2}}$$

devo scegliere $\beta = 1/2$

$$= \lim_{x \to 1^-} 2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \sqrt{2} \neq 0$$

Quindi per Confronto Asintotico:

$$I_2 < \infty \iff \int_{1/2}^{1} \frac{(1-x)^{1/2}}{(1-x)^{\alpha}}\, dx < \infty$$

$$\iff \alpha - \frac{1}{2} < 1 \iff \alpha < \frac{3}{2}.$$

Conclusione:

$$I \text{ converge} \iff \alpha \in \left(1, 3/2\right).$$

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Si consideri il sottoinsieme del piano

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y^4 \ \text{e} \ \sqrt[3]{x} > |y| \}.$$

1) Provare che A è aperto.

2) Disegnare A.

3) Stabilire se $\overline{A}$ è compatto.

4) Descrivere la frontiera di A.

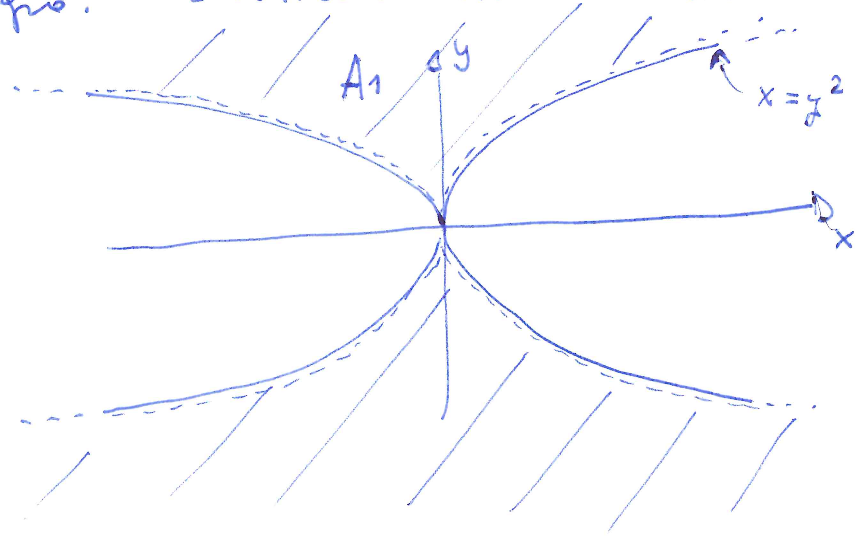
Risoluzione. 1) Le funzioni $f_1(x,y) = x^2 - y^4$ e $f_2(x,y) = \sqrt[3]{x} - |y|$ sono continue. Quindi gli insiemi

$$A_1 = f^{-1}(-\infty, 0) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^4 < 0 \}$$

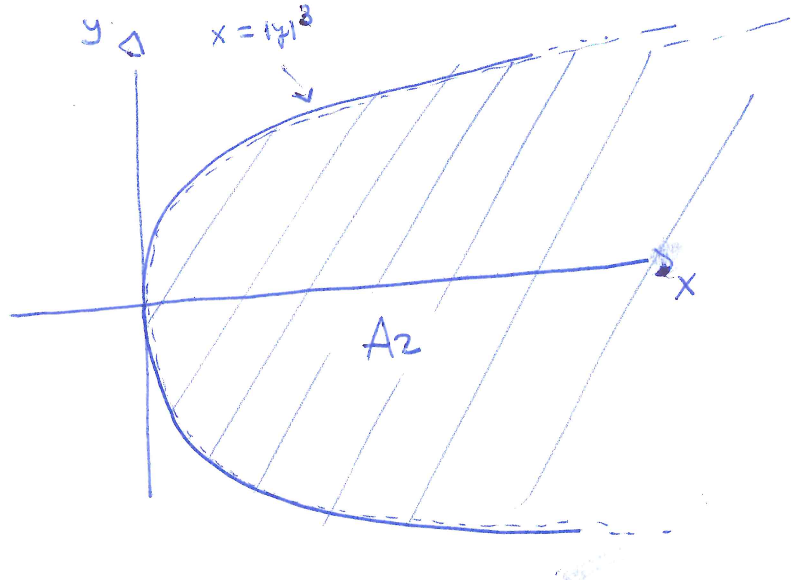
$$A_2 = f^{-1}(0, \infty) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt[3]{x} - |y| > 0 \}$$

sono aperti. Dunque $A = A_1 \cap A_2$ è aperto in quanto intersezione di aperti.

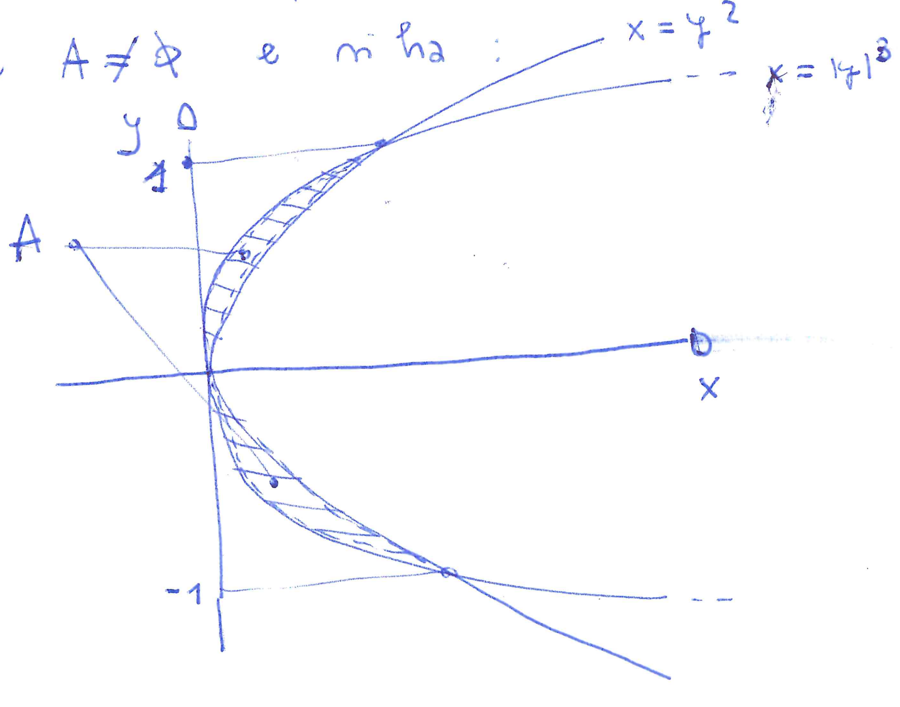
2) Disegno. L'insieme A_1 è descritto da $|x| < y^2$:



L'insieme A_2 è descritto da $x > |y|^3$. Quindi



Osserviamo che per $0 < |y| < 1$ si ha $|y|^3 < y^2$.
Dunque $A \neq \emptyset$ e si ha:



3) La chiusura $\bar{A}$ è chiusa. Inoltre $\bar{A}$ è limitato.
Se infatti $(x,y) \in A$:

$$|y| < \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y^2} \implies |y|^3 < |y|^2 \implies |y| < 1$$

e inoltre $0 < x < y^2 < 1$. Quindi $\bar{A} \subset [0,1] \times [-1,1]$.
Per Heine - Borel l'insieme $\bar{A}$ è compatto.

4) La frontiera di A è l'insieme:

$$\partial A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^4 \text{ e } \sqrt[3]{x} \geq |y| \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^4 \text{ e } \sqrt[3]{x} = |y| \right\}.$$

$\square$

ESERCIZIO Dato un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x (y^2 + \gamma x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Al variare di γ, calcolare i punti critici di f

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Stabilire se i punti critici trovati sono punti di massimo o di minimo locale / assoluto.

Risoluzione. i) Il gradiente di f è

$$f_x = e^x (y^2 + \gamma x) + \gamma e^x = e^x (y^2 + \gamma x + \gamma)$$

$$f_y = 2 y e^x$$

Il sistema $f_x = f_y = 0$ fornisce $y = 0$ e poi

$$e^x (0 + \gamma x + \gamma) = 0 \iff \gamma (x+1) = 0.$$

Se $\gamma = 0$ l'ultima equazione è sempre verificata.

Se $\gamma \neq 0$ l'ultima equazione implica $x = -1$.

Dunque per $\gamma = 0$ c'è una retta di punti critici $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in \mathbb{R}$. Per $\gamma \neq 0$ c'è il solo punto critico $(-1,0) \in \mathbb{R}^2$.

ii) Le derivate seconde sono:

$$f_{xx} = e^x \left(y^2 + \gamma x + 2\gamma \right)$$

$$f_{xy} = 2y e^x$$

$$f_{yy} = 2 e^x$$

La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = e^x \begin{pmatrix} y^2+\gamma x+2\gamma & 2y \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$$

iii) Nel caso $\gamma = 0$ la funzione è $f(x,y) = y^2 e^x$.

I punti critici $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ sono tutti minimi assoluti.

Nel caso $\gamma \neq 0$ c'è il solo punto critico $(-1,0)$.

Abbiamo

$$Hf(-1,0) = e^{-1} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dunque $\operatorname{tr} Hf(-1,0) = e^{-1} (\gamma+2)$

$\det Hf(-1,0) = e^{-2}\, 2\gamma$

Dunque $Hf(-1,0) > 0 \iff \det Hf(-1,0) > 0$ e $\operatorname{tr} Hf(-1,0) \geq 0$.

Le due condizioni forniscono:

$$\begin{cases} \gamma + 2 \geq 0 \\ \gamma > 0 \end{cases} \iff \gamma > 0.$$

Dunque per $\gamma > 0$ si ha $Hf(-1,0) > 0$, e quindi $(-1,0)$ è un p.to di minimo locale stretto.

È anche assoluto in quanto

$$f(x,y) \overset{\forall (x,y)}{=} e^x (y^2 + \gamma x) \geq e^x \cdot \gamma x = f(x,0)$$

e la funzione $x \mapsto f(x,0)$ ha minimo (per $\gamma > 0$) assoluto in $x = -1$.

Se $\gamma < 0$ si ha $\det Hf(-1,0) = 2\gamma e^{-2} < 0$

e quindi $(-1,0)$ è un punto di sella.

$\square$

Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 29/8/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n|x|)}{1+n^2x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare preliminarmente che $\log(1+t) \leq \sqrt{t}$ per ogni $t \geq 0$.

ii) Studiare la convergenza puntuale della serie.

iii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: ii) CP per $x \in$; iii) CU per $x \in$

Esercizio 2 (12 punti) Dato il parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y}{|x|^3 + |y|^5} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$.

iii) Provare che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$.

Risposte: i) f continua in $(0,0)$ per $\alpha \in$; ii) $f_x =$ $f_y =$

Esercizio 3 (9 punti) Sia $\beta \in \mathbb{R}$ un parametro e sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$ consideriamo la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{x - \beta y}{x^2+y^2-1}dx + \frac{y+\beta x}{x^2+y^2-1}dy.$$

i) Calcolare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che ω sia chiusa in A.

ii) Stabilire se per qualche valore di β la forma ω è esatta in A.

Risp.: i) ω chiusa per $\beta =$; ii) ω esatta per $\beta =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 29/8/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{1+n^2x^4}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare preliminarmente che $\log(1+t) \leq \sqrt{t}$ per ogni $t \geq 0$.

ii) Studiare la convergenza puntuale della serie.

iii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: ii) CP per $x \in$; iii) CU per $x \in$

Esercizio 2 (12 punti) Dato il parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{|x|^5+|y|^3} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$.

iii) Provare che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$.

Risposte: i) f continua in $(0,0)$ per $\alpha \in$; ii) $f_x =$ $f_y =$

Esercizio 3 (9 punti) Sia $\beta \in \mathbb{R}$ un parametro e sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$ consideriamo la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{x+\beta y}{x^2+y^2-1}dx + \frac{y-\beta x}{x^2+y^2-1}dy.$$

i) Calcolare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che ω sia chiusa in A.

ii) Stabilire se per qualche valore di β la forma ω è esatta in A.

Risp.: i) ω chiusa per $\beta =$; ii) ω esatta per $\beta =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n|x|)}{1+n^2x^2} .$$

i) Provare che $\log(1+t) \leq \sqrt{t}$ per ogni $t \geq 0$.

ii) Studiare la convergenza ~~p~~ puntuale della serie.

iii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risoluzione. i) Consideriamo la funzione $\phi(t) = \log(1+t) - \sqrt{t}$ per $t \geq 0$. La sua derivata è:

$$\phi'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} .$$

Studiamo

$$\phi'(t) \leq 0 \iff \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \iff 2\sqrt{t} \leq 1+t$$

$$\iff 0 \leq (1-\sqrt{t})^2 \quad \text{sempre verificato.}$$

Quindi ϕ è decrescente. Siccome $\phi(0) = 0$ segue che $\phi(t) \leq 0$ per $t \geq 0$.

ii) Per simmetria basta studiare $x \geq 0$. Serie a termini positivi. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$, converge.

Per $x > 0$ usiamo il punto i):

$$\frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2} \leq \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{(nx)^{3/2}}$$

e quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$;

la serie data converge per confronto.

Conclusione: Convergenza puntuale per $x \in \mathbb{R}$.

iii) Se $x \geq \delta > 0$ allora:

$$\sup_{x \geq \delta} \frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2} \leq \sup_{x \geq \delta} \frac{1}{(nx)^{3/2}} = \frac{1}{\delta^{3/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

Per il Criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$.

iv) (Non richiesto all'esame). Non c'è convergenza uniforme su $[0, \delta]$. Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n|x|)}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo $f(0) = 0$. Inoltre, per ogni $n = 1, 2 \dots$ e per ogni $x > 0$ si ha

$$f(x) \geq \frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2}.$$

In particolare con $x = 1/n$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{\log 2}{2} > 0$$

Quindi f non può essere continua in $x = 0$. Quindi la serie non può convergere uniformemente su $[0, \delta]$.

□

ESERCIZIO Dato il parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y}{|x|^3 + |y|^5} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f è continua in $(0,0)$.

ii) Provare che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$.

Risoluzione. i) Proviamo a fare direttamente la stima di continuità:

$$0 \leq \frac{|x|^\alpha |y|}{|x|^3 + |y|^5} \leq \frac{(|x|^3)^{\frac{\alpha}{3}} (|y|^5)^{\frac{1}{5}}}{|x|^3 + |y|^5} \leq \frac{(|x|^3 + |y|^5)^{\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{5}}}{|x|^3 + |y|^5}$$

$$\leq (|x|^3 + |y|^5)^{\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{5} - 1}$$

Se $\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{5} - 1 > 0$ allora f è continua in $(0,0)$ in quanto per confronto:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|}{|x|^3 + |y|^5} = 0 = f(0),$$

La condizione è $\frac{\alpha}{3} > \frac{4}{5} \iff \alpha > \frac{12}{5}$. Dunque:

$$\alpha > \frac{12}{5} \implies f \text{ è continua in } (0,0)$$

Dobbiamo provare l'implicazione inversa. Il test delle rette con

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad \text{con } \theta \text{ fissato ed } r \to 0^+$$

fornisce:

$$f(x,y) = \frac{r^{1+\alpha}|\cos\theta||\sin\theta|}{r^3|\cos\theta|^3 + r^5|\sin\theta|^5}$$

$$= \frac{1}{r^{2-\alpha}} \frac{|\cos\theta|\,|\sin\theta|}{|\cos\theta|^3 + r^2|\sin\theta|^5}$$

Se $2-\alpha \geq 0$ (ovvero $\alpha \leq 2$) il limite per $r \to 0^+$ NON è 0.

Dunque: $\alpha \leq 2 \Rightarrow f$ NON è continua in $(0,0)$.

Rimangono da studiare i valori $2 < \alpha \leq 12/5$.

Prendiamo la curva

$$x = t^5 \qquad y = t^3 \qquad \text{con } t \to 0^+$$

Si ha

$$f(x,y) = \frac{t^{5\alpha+3}}{2t^{15}} = \frac{1}{2}\,t^{5\alpha+3-15} = \frac{1}{2}\,t^{5\alpha-12}$$

Se $5\alpha - 12 \leq 0$ il limite per $t \to 0^+$ NON è 0. Dunque

$$\alpha \leq \frac{12}{5} \Rightarrow f \text{ non è continua in } (0,0).$$

Conclusione:

$$f \text{ cont. in } (0,0) \Leftrightarrow \alpha > \frac{12}{5}.$$

ii) Siccome $f=0$ per $xy=0$ (sugli assi), si ha

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Test della differenziabilità: trovare $\alpha>0$ tali che

$$\circledast \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha y}{(|x|^3+|y|^5)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Sappiamo che dobbiamo trovare un sottoinsieme di $\left(\frac{12}{5},\infty\right)$.

Il testo suggerisce la risposta $\alpha>3$.

Stime:

$$\frac{|x|^\alpha |y|}{(|x|^3+|y|^5)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|^3+|y|^5} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|^3} = |x|^{\alpha-3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

se $\alpha>3$

Dunque, se $\alpha>3$ il limite in $\circledast$ è 0, e quindi:

$$\alpha>3 \implies f \text{ differenziabile in } (0,0).$$

Facciamo il test delle rette in $\circledast$ con $x=t$ e $y=t$.

Si trova:

$$\frac{t^{\alpha+1}}{(t^3+t^5)\,t\sqrt{2}} = \frac{t^\alpha}{\sqrt{2}\,t^3(1+t^2)} = \frac{t^{\alpha-3}}{\sqrt{2}(1+t^2)}$$

che NON converge a 0 per $t\to 0^+$ se $\alpha\leq 3$. Quindi:

$$\alpha\leq 3 \implies f \text{ non è differenziabile in } (0,0).$$

$\square$

ESERCIZIO Sia $\beta \in \mathbb{R}$ un parametro e sull'insieme aperto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$ consideriamo la 1-forma differenziale:

$$\omega = \frac{x-\beta y}{x^2+y^2-1}\,dx + \frac{y+\beta x}{x^2+y^2-1}\,dy \, ,$$

i) Calcolare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che ω sia chiusa in A

ii) Stabilire se per quello valore di β la forma ω è esatta in A,

Risoluzione. i) La condizione di forma chiusa è:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+\beta x}{x^2+y^2-1}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-\beta y}{x^2+y^2-1}\right)$$

ovvero:

$$\frac{\beta\,(x^2+y^2-1)-(y+\beta x)\,2x}{(x^2+y^2-1)^2} = \frac{-\beta\,(x^2+y^2-1)-(x-\beta y)\,2y}{(x^2+y^2-1)^2}$$

ovvero:

$$\cancel{\beta x^2} + \cancel{\beta y^2} - \beta - \cancel{2xy} - \cancel{2\beta x^2} = -\cancel{\beta x^2} - \cancel{\beta y^2} + \beta - \cancel{2xy} + \cancel{2\beta y^2}$$

ovvero: $-\beta = \beta$ che fornisce $\beta = 0$. Dunque:

$$\omega \text{ chiusa} \iff \beta = 0.$$

ii) ω può essere esatta solo per il valore $\beta = 0$.

Tuttavia A non è semplicemente connesso. Quindi dal fatto che ω è chiusa in A non si deduce che ω è esatta in A.

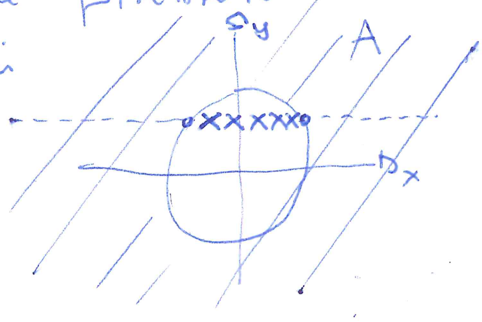
Cerchiamo un potenziale $f \in C^\infty(A)$ tale che

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{x}{x^2+y^2-1}, \\ f_y = \dfrac{y}{x^2+y^2-1}. \end{cases} \quad (*)$$

Integrando la prima equazione:

$$f(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2-1}\,dx =$$

Poco chiaro, perché nell'intervallo di integrazione potrebbero esserci buchi



$$= \frac{1}{2}\log(x^2+y^2-1) + C(y)$$

Da cui $f_y = \dfrac{x}{x^2+y^2-1} + C'(y)$, equazione che confrontata con $(*)$ fornisce $C'(y) = 0$ e quindi (solito problema dei buchi) $C =$ costante.

Prendiamo ad es. $C = 0$. I dubbi precedenti sono superati dalla constatazione che $f(x,y) = \log(x^2+y^2-1)$ è certamente un potenziale di f su A.

D

Analisi Matematica 2 Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 10/7/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(La serie parte da $n = 1$ e non da $n = 0$.)

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

iii) Precisare se la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$; iii) CU su $\mathbb{R}$ si/no:

Esercizio 2 (9 punti) Sia $\gamma : [\pi/2, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

$$\varrho = \Big[\log\Big(1 + \frac{1}{\vartheta}\Big)\Big]^{\alpha}, \qquad \vartheta \geq \frac{\pi}{2},$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro.

i) Disegnare (in modo approssimativo) il supporto della curva.

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che γ sia rettificabile.

Risposte: ii) γ rettificabile per $\alpha \in$; i) Disegno:

Esercizio 3 (12 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x + y - \sqrt{2}\log(1 + x^2 + y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$.

ii) Verificare che f ristretta all'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è una funzione concava.

iii) Provare che f assume valore minimo e massimo su K.

iv) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Risp.: i) p.ti critici: ; ii) Hessiana $H_f =$; iv) val. min= val. max=

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 10/7/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-x}}{x^2+3^n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(La serie parte da $n = 1$ e non da $n = 0$.)

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

iii) Precisare se la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$; iii) CU su $\mathbb{R}$ si/no:

Esercizio 2 (9 punti) Sia $\gamma : [\pi/2, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

$$\varrho = \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{1/\alpha}, \qquad \vartheta \geq \frac{\pi}{2},$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro.

i) Disegnare (in modo approssimativo) il supporto della curva.

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che γ sia rettificabile.

Risposte: ii) γ rettificabile per $\alpha \in$; i) Disegno:

Esercizio 3 (12 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{2}\log(1+x^2+y^2) - x + y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$.

ii) Verificare che f ristretta all'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ è una funzione convessa.

iii) Provare che f assume valore minimo e massimo su K.

iv) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Risp.: i) p.ti critici: ; ii) Hessiana $H_f =$; iv) val. min= val. max=

2 ore e 30 minuti a disposizione

<u>ESERCIZIO</u> Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza semplice della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risoluzione. Studiamo direttamente la convergenza uniforme. Sia $M \in \mathbb{R}$ un parametro.

Allora

$$\sup_{x \leq M} \frac{n^x}{2^n + x^2} \leq \sup_{x \leq M} \frac{n^x}{2^n} = \frac{n^M}{2^n},$$

essendo $x \longmapsto n^x$ crescente. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^M}{2^n} < \infty$$

converge per il criterio della radice (o del rapporto).

Infatti

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^M}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^M}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Per il criterio di Weierstrass la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2}$$

converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $(-\infty, M]$ con $M \in \mathbb{R}$ arbitrariamente grande.

Non c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.
Infatti, per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n+x^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n^x}{2^n+x^2} =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2} \geq \frac{(N+1)^x}{2^{N+1} + x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty .$$

Risposte:

i) convergenza semplice $\forall x \in \mathbb{R}$

ii) convergenza uniforme: su ogni $(-\infty, M]$ $\forall M \in \mathbb{R}$.

$\square$

ESERCIZIO Sia $\gamma : [\frac{\pi}{2}, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

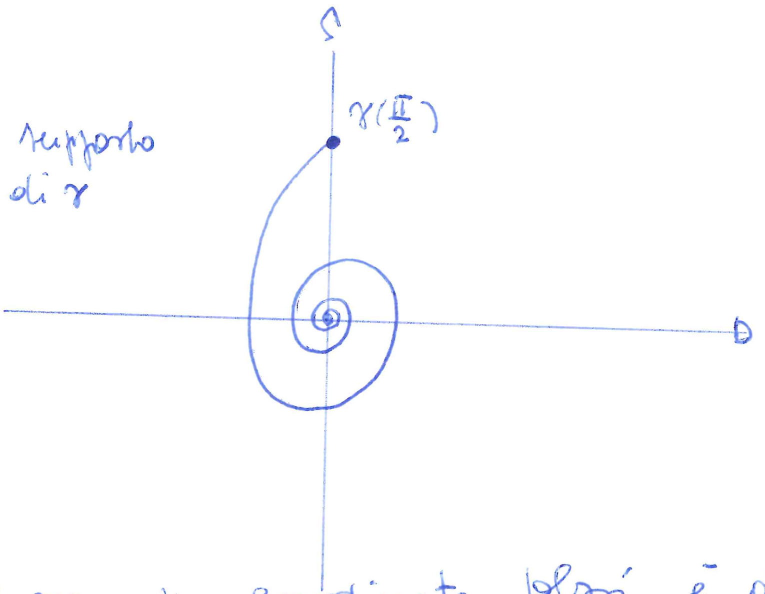
$$\rho = \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{\alpha}, \quad \vartheta \geq \frac{\pi}{2},$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro.

i) Disegnare (in modo approssimativo) il supporto di γ

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che γ sia rettificabile.

Risoluzione. i) La funzione $\vartheta \longrightarrow \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{\alpha} = \rho(\vartheta)$ è decrescente, essendo $\frac{1}{\vartheta}$ decrescente e il logaritmo crescente (ed $\alpha > 0$). Inoltre $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right) = \left[\log\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\right]^{\alpha}(0,1)$. È una spirale che gira in senso antiorario:



ii). La lunghezza in coordinate polari è data dalla formula

$$L(\gamma) = \int_{\pi/2}^{\infty} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\vartheta.$$

La derivata di ρ è:

$$\dot{\rho} = \alpha \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{1}{1+\frac{1}{\vartheta}} \left(-\frac{1}{\vartheta^2}\right)$$

Quindi

$$\sqrt{\rho^2+\dot{\rho}^2} = \left(\left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{2\alpha} + \alpha^2 \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{2\alpha-2} \frac{1}{\vartheta^2(1+\vartheta)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{\alpha-1} \left(\left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{2} + \frac{\alpha^2}{\vartheta^2(1+\vartheta)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ora usiamo l'approssimazione per $\vartheta \to \infty$

$$\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right) = \frac{1}{\vartheta}(1+o(1)) \qquad \text{con } o(1) \xrightarrow[\vartheta\to\infty]{} 0$$

Si trova:

$$\sqrt{\rho^2+\dot{\rho}^2} = \frac{1}{\vartheta^{\alpha-1}}(1+o(1))\left(\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{\alpha^2}{\vartheta^2(1+\vartheta)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\vartheta^\alpha}(1+o(1)) \qquad \text{con } o(1) \xrightarrow[\vartheta\to\infty]{} 0$$

Per il criterio del confronto asintotico per integrali impropri:

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \sqrt{\rho^2+\dot{\rho}^2}\, d\vartheta < \infty \iff \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{\vartheta^\alpha} d\vartheta < \infty \iff \alpha > 1.$$

RISPOSTA: γ rettificabile $\iff \alpha > 1$.

$\square$

ESERCIZIO. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x + y - \sqrt{2}\,\log(1+x^2+y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$.

ii) Verificare che f ristretta all'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ è una funzione concava.

iii) Provare che f assume valore massimo e minimo su K.

iv) Calcolare i valori massimo e minimo di f su K.

Risoluzione. i) Le derivate parziali di f sono

$$f_x = 1 - \sqrt{2}\,\frac{2x}{1+x^2+y^2},$$

$$f_y = 1 - \sqrt{2}\,\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$.

Sottraendo le due equazioni si trova

$$\frac{2\sqrt{2}\,(x-y)}{1+x^2+y^2} = 0 \iff x = y.$$

Sostituendo $y = x$ in una delle due equazioni si ottiene

$$1-2\sqrt{2}\,\frac{x}{1+2x^2}=0 \iff 2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$$
$$\iff (\sqrt{2}x-1)^2=0$$
$$\iff x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dunque c'è un unico punto critico: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Osserviamo che si trova sulla circonferenza $x^2+y^2=1$.

ii) Calcoliamo la matrice Hessiana di f:

$$f_{xx}=-2\sqrt{2}\,\frac{1+x^2+y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$
$$=-2\sqrt{2}\,\frac{1+y^2-x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}=-2\sqrt{2}\,\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy}=-2\sqrt{2}\,\frac{1+x^2+y^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$
$$=-2\sqrt{2}\,\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yx}=f_{xy}$$

Dunque

$$\operatorname{tr}\left(Hf(x,y)\right) = f_{xx} + f_{yy} = \frac{-4\sqrt{2}}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\det\left(Hf(x,y)\right) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 =$$

$$= 8 \frac{1-(x^2-y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4} - 32 \frac{x^2 y^2}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{8}{(1+x^2+y^2)^4} \left[1 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4 - 4x^2y^2 \right]$$

$$= \frac{8}{(1+x^2+y^2)^4} \left[1 - (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \right]$$

$$= 8 \frac{1-(x^2+y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4}$$

Dunque: $\operatorname{tr}(Hf(x,y)) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\det(Hf(x,y)) \geq 0 \iff (x,y) \in K$

Dunque f è concava in K.

iii) K è chiuso e limitato e dunque è compatto (Heine - Borel). f è continua su K e dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo su K.

iv) Dal punto i) sappiamo che f non ha punti critici interni a K. Deduciamo che f deve assumere il minimo e il massimo sulla frontiera.

La restrizione di f su ∂K è:

$$\phi(\vartheta) = f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \cos\vartheta + \sin\vartheta - \sqrt{2}\log 2$$

con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. La sua derivata è

$$\phi'(\vartheta) = -\sin\vartheta + \cos\vartheta$$

si annulla se e solo se $\operatorname{tg}\vartheta = 1 \iff \vartheta = \frac{\pi}{4}$ o $\vartheta = \frac{5}{4}\vartheta$.

Ora si ha

$$\phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\log 2 = \sqrt{2}\,(1-\log 2)$$

$$\phi\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\log 2 = -\sqrt{2}\,(1+\log 2)$$

Risposte:

Valore max di f su K: $\sqrt{2}\,(1-\log 2)$ assunto in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Valore min di f su K: $-\sqrt{2}\,(1+\log 2)$ assunto in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\square$

Analisi Matematica 2 **Tema A**

Nome, cognome, matricola: Scritto del 20/6/2017 – Canale 1

Esercizio 1 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{1+x^{2n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$.

Esercizio 2 Si consideri la curva nel piano $\gamma : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(t^2 - 1, t - \log(1+t)\big), \qquad t > -1.$$

i) Stabilire in quali punti γ è regolare.

ii) Detto $T(t)$ il campo tangente unitario, calcolare i limiti $T^{\pm} = \lim_{t \to 0^{\pm}} T(t)$.

iii) Disegnare il supporto della curva.

Risposte: i) γ reg. per $t \in$; ii) $T^+ =$, $T^- =$; iii) Disegno:

Esercizio 3 Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{2 - (x^2 + y^2)}.$$

i) Provare che f ammette massimo e minimo su K.

ii) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K.

iii) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Risposte: ii) p.ti critici: ; iii) valore min= ; valore max=

Esercizio 4 Data una funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, consideriamo la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \frac{\varphi(y)}{1+x^2} dx + \frac{\varphi(x)}{1+y^2} dy.$$

i) Calcolare tutte le funzioni φ tali che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

ii) Fra le φ del punto i) determinare quella tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = \pi/4$.

iii) Per la φ del punto ii) calcolare un potenziale di ω su $\mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $\varphi =$; ii) $\varphi =$; iii) potenziale =

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 20/6/2017 – Canale 1

Esercizio 1 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$

Esercizio 2 Si consideri la curva nel piano $\gamma : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(t^2 - 1, \log(1+t) - t\big), \qquad t > -1.$$

i) Stabilire in quali punti γ è regolare.

ii) Detto $T(t)$ il campo tangente unitario, calcolare i limiti $T^{\pm} = \lim_{t \to 0^{\pm}} T(t)$.

iii) Disegnare il supporto della curva.

Risposte: i) γ reg. per $t \in$; ii) $T^+ =$, $T^- =$; iii) Disegno:

Esercizio 3 Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{2 - (x^2 + y^2)} - xy.$$

i) Provare che f ammette massimo e minimo su K.

ii) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K.

iii) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Risposte: ii) p.ti critici: ; iii) valore min= ; valore max=

Esercizio 4 Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1, \, y > -1\}$. Data una funzione $\varphi \in C^1(-1, \infty)$, consideriamo la 1-forma differenziale in A

$$\omega = \frac{\varphi(y)}{1+x} dx + \frac{\varphi(x)}{1+y} dy.$$

i) Calcolare tutte le funzioni φ tali che ω sia esatta su A.

ii) Fra le φ del punto i) determinare quella tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = \log 2$.

iii) Per la φ del punto ii) calcolare un potenziale di ω su A.

Risposte: i) $\varphi =$; ii) $\varphi =$; iii) potenziale =

3 ore a disposizione

ESERCIZIO Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

i) studiare la convergenza puntuale

ii) studiare la convergenza uniforme

Soluzione. Basta studiare $x \geq 0$. Per $x=1$ la serie NON converge.

Sia $0 < \delta < 1$. Se $0 \leq x \leq \delta$ si ha

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n \leq \delta^n$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{0 \leq x \leq \delta} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n = \frac{1}{1-\delta} < \infty$$

Dunque c'è convergenza uniforme su $[0, \delta]$ $\forall \delta < 1$

Sia ora $M > 1$. Se $x \geq M$ si ha

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \leq \left(\frac{1}{M}\right)^n$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \geq M} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M}\right)^n = \frac{M}{M-1} < \infty$$

Dunque c'è convergenza uniforme su $[M, \infty)$ $\forall M > 1$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0,1)$.

Dato $\bar{n} \in \mathbb{N}$, il resto della serie è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} - \sum_{n=0}^{\bar{n}} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} .$$

Stimiamo

$$\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{0<x<1}{\geq} \frac{1}{2} \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} x^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{\bar{n}} x^n\right)$$

e quindi

$$\sup_{0<x<1} \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = +\infty .$$

Analogamente si prova che non c'è convergenza uniforme su $(1,\infty)$.

Risposte:

i) CP per $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

ii) CU per $|x| \leq \delta$ $\forall \delta < 1$ e per $|x| \geq M$ $\forall M > 1$.

□

ESERCIZIO Si consideri la curva piana $\gamma : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(t^2-1,\ t - \log(1+t) \right), \quad t > -1.$$

i) Stabilire in quali punti γ è regolare

ii) Detto $T(t)$ il campo tangente unitario, calcolare i limiti

$$\lim_{t\to 0^\pm} T(t), \quad \lim_{t\to -1} T(t), \quad \lim_{t\to\infty} T(t).$$

iii) Disegnare il supporto della curva.

Soluzione. i) La derivata di γ è

$$\dot\gamma(t) = \left(2t,\ 1 - \frac{1}{1+t} \right).$$

Un punto è regolare se $\dot\gamma(t) \neq 0$. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2t = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+t} = 0 \end{cases}.$$

c'è la soluzione $t=0$. Dunque γ è regolare per $t \neq 0$.

ii) Si ha $|\dot\gamma(t)| = \sqrt{4t^2 + \dfrac{t^2}{(1+t)^2}} = |t| \sqrt{4 + \dfrac{1}{(1+t)^2}}$.

Dunque

$$T(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{\left(2t,\ \dfrac{t}{1+t} \right)}{|t| \sqrt{4 + \dfrac{1}{(1+t)^2}}}$$

$$= \frac{t}{|t|} \frac{\left(2,\ \dfrac{1}{1+t} \right)}{\sqrt{4 + \dfrac{1}{(1+t)^2}}}$$

Si trova

$$\lim_{t\to 0^+} T(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(2, \frac{1}{1+t}\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{(1+t)^2}}} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} := T^+$$

$$\lim_{t\to 0^-} T(0) = -\frac{(2,1)}{\sqrt{5}} := T^-$$

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = (1,0)$$

$$\lim_{t\to -1} T(t) = \lim_{t\to -1} -\frac{(2(1+t),1)}{\sqrt{4(1+t)^2+1}} = (0,-1)$$

iii) Sia $x = t^2-1 \geq -1$. Invertendo:

$$t^2 = 1+x \iff t = \pm\sqrt{1+x}.$$

Bisogna distinguere i casi $t \geq 0$ e $-1 < t \leq 0$.

Caso $t \geq 0$. Allora $t = \sqrt{1+x}$ e la seconda coordinata di γ è

$$f(x) = \sqrt{1+x} - \log\left(1+\sqrt{1+x}\right)$$
$$= \phi\left(\sqrt{1+x}\right) \quad \text{con} \quad \phi(t) = t - \log(1+t)$$

Dunque

$$f'(x) = \phi'\left(\sqrt{1+x}\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad x > -1$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\;\frac{1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\left(1+\sqrt{1+x}\right)} > 0.$$

Quindi f è crescente con $f(-1) = 0$

Caso $t \leq 0$. Allora $t = -\sqrt{1+x}$ e la seconda coordinata di γ è

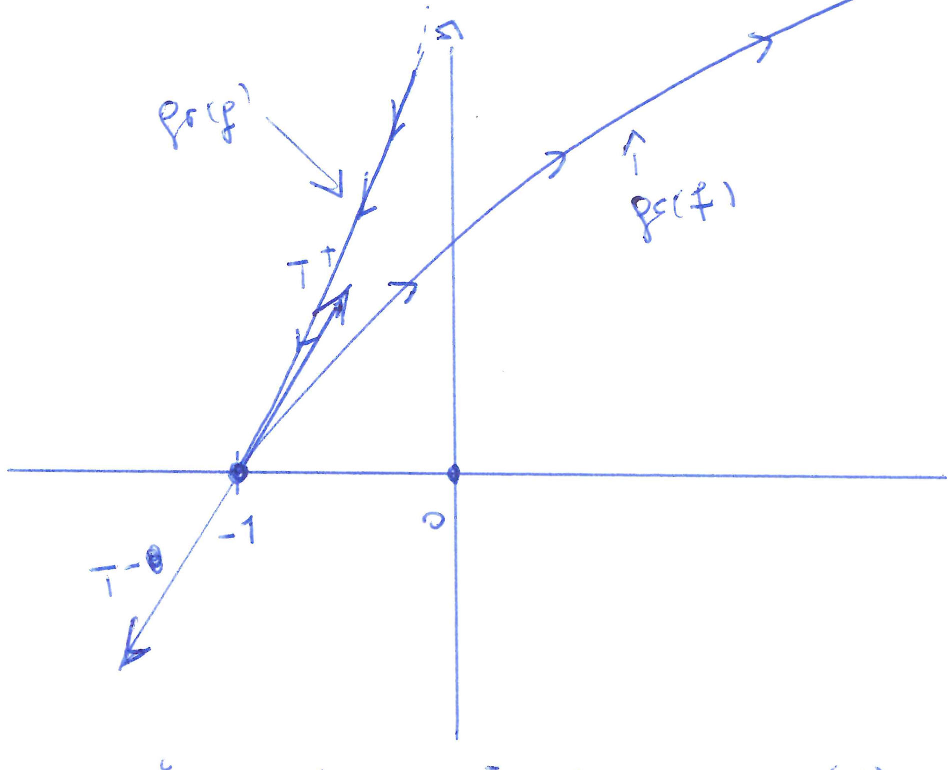
$$g(x) = -\sqrt{1+x} - \log\left(1 - \sqrt{1+x}\right)$$
$$= \psi\left(\sqrt{1+x}\right) \quad \text{con} \quad \psi(t) = -t - \log(1-t)$$

Ora si ha $\psi'(t) = -1 - \frac{-1}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t} = \frac{t}{1-t}$.

Dunque

$$g'(x) = \psi'\left(\sqrt{1+x}\right) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\sqrt{1+x}} > 0$$

Qui deve essere $1 - \sqrt{1+x} > 0 \iff 1 > \sqrt{1+x} \iff -1 < x < 0$.



Dunque g è crescente in $[-1, 0)$ con $g(-1) = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$.

ESERCIZIO Siano $K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \}$ ed $f: K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{2-(x^2+y^2)} .$$

i) Provare che f ammette massimo e minimo su K.
ii) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K.
iii) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Soluzione i) K è chiuso e limitato e quindi è compatto (Teorema di Heine - Borel). K è il disco chiuso unitario. f è continua su K. Per il Teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo su K.

ii) Le derivate parziali di f sono

$$f_x = y + \frac{2x}{[2-(x^2+y^2)]^2} ,$$

$$f_y = x + \frac{2y}{[2-(x^2+y^2)]^2} .$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = 0$ è dunque

$$\begin{cases} y + \dfrac{2x}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0 \\ \\ x + \dfrac{2y}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0 . \end{cases}$$

Il punto $(x,y) = (0,0)$ risolve il sistema.

Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e sottraendo le due equazioni si trova

$$\frac{2\,(x^2-y^2)}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0$$

che implica $x = \pm y$. Inserendo $x = y$ nella prima equazione si trova

$$x\left(1+\frac{2}{[2-2x^2]^2}\right) = 0$$

che implica $x=0$ e quindi $y=0$.

Inserendo $x=-y$ nella prima equazione si trova:

$$x\left(-1+\frac{2}{[2-2x^2]^2}\right) = 0 .$$

Oltre a $x=0$ si trova l'equazione

$$\frac{4}{2\,[1-x^2]^2} = 1$$

che fornisce $[1-x^2]^2 = \frac{1}{2} \iff 1-x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (1-x^2 \geq 0)$

$$\iff x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} .$$

Ci sono tre punti critici

$$\pm\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}},\ -\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \quad e \quad (0,0)$$

Osserviamo che $f(0,0) = \frac{1}{2}$ mentre

$$f\left(\pm\left(\sqrt{1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}}, -\sqrt{1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}}\right)\right) = -\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= -\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}.$$

Osserviamo che $-1+\sqrt{2} < \frac{1}{2}$.

iii) Studiamo f su $\partial K = \{x^2+y^2=1\}$.

Siano $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ con $\theta \in [0,2\pi)$ e studiamo

$$\phi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta\cos\theta + 1$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\theta) + 1$$

Il massimo è preso per $\sin 2\theta = 1$ ed è $\frac{3}{2}$.

Il minimo è preso per $\sin 2\theta = -1$ ed è $+\frac{1}{2}$.

Concludiamo che

$$\max_K f = \frac{3}{2} \quad e \quad \min_K f = \sqrt{2}-1.$$

$\square$

ESERCIZIO Data una funzione $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ consideriamo la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \frac{\phi(y)}{1+x^2}\,dx + \frac{\phi(x)}{1+y^2}\,dy .$$

i) Calcolare tutte le ϕ tali che ω sia chiusa (esatta) su $\mathbb{R}^2$

ii) Fra le ϕ del punto i) determinare quella tale che $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = \pi/4$

iii) Per la ϕ del punto ii) calcolare un potenziale di ω su $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. i) $\mathbb{R}^2$ è convesso ($\Rightarrow$ semplicemente connesso) e dunque ω esatta $\Leftrightarrow$ ω chiusa.

La condizione di chiusura è:

$$\frac{\phi'(y)}{1+x^2} = \frac{\phi'(x)}{1+y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ovvero

$$(1+y^2)\,\phi'(y) = (1+x^2)\,\phi'(x) \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R} .$$

Questo significa che esiste una costante $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che $(1+x^2)\,\phi' = k_1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Integrando

$$\phi'(x) = \frac{k_1}{1+x^2} , \quad x \in \mathbb{R},$$

si trova $\phi(x) = k_1 \operatorname{arctg} x + k_2$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

ii) Il sistema $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = \pi/4$ fornisce

$$\begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\pi/4} = \pi/4 \end{cases}$$

e quindi $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$,

iii) La forma è $\omega = \dfrac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}\, dx + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+y^2}\, dy$.

Cerchiamo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che $df = \omega$ ovvero

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2} \\[2ex] f_y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+y^2} \end{cases}.$$

Integrando la prima equazione:

$$f(x,y) = \int \frac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} y + C(y)$$

e quindi

$$f_y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+y^2} + C'(y).$$

Inserendo nella seconda equazione si trova $C'(y) = 0$ ovvero $C =$ costante. Un potenziale è:

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} y.$$

□

Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 26/1/2017

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{x+y} + x^4 + y^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Provare che f ha un unico punto critico e che si tratta di un punto di minimo assoluto.

Risposte: Collocazione approx. del punto di minimo:

Esercizio 2 Si consideri la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(\cos t, t \sin t\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

i) Calcolare il versore tangente $T(t)$ nei punti regolari t.

ii) Calcolare il limite $\bar{T}(0) = \lim_{t \to 0^+} T(t)$.

iii) Stabilire in quale quandrante si trovano i punti di massima e minima ordinata sul supporto della curva.

iv) Disegnare il supporto della curva (con cura intorno al punto $(1, 0) \in \mathrm{spt}(\gamma)$).

Risposte: i) $T(t) =$; ii) $\bar{T}(0) =$ iii) Quad. max.: Quad. min.: iv) Disegno:

Esercizio 3 Per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale improrprio

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx.$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale improprio converga semplicemente.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale improprio converga assolutamente.

Risposte: i) Convergenza semplice: $\alpha \in$; ii) Convergenza assoluta: $\alpha \in$

Esercizio 4 Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n}.$$

i) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge semplicemente.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) Conv. sempl. per $x \in$; ii) Conv. uniforme per $x \in$

3 ore a disposizione

ESERCIZIO Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x+y} + x^4 + y^4.$$

Provare che f ha un unico punto critico e che risulta di un punto di minimo assoluto.

Soluzione. É $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x+y} + 4x^3,\ e^{x+y} + 4y^3 \right)$$

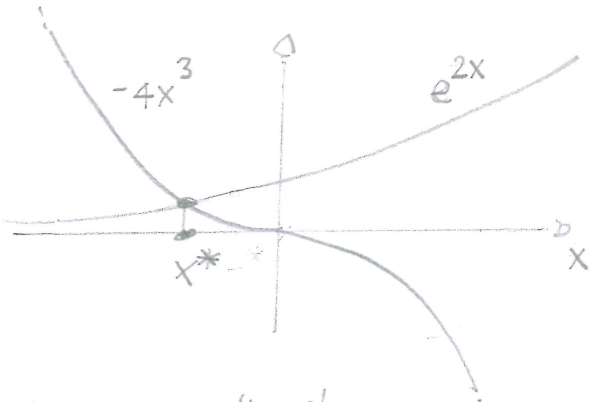
Dunque

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} e^{x+y} + 4x^3 = 0 \\ e^{x+y} + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si trova $x^3 = y^3 \iff x = y$. Sostituendo in una delle due si trova

$$e^{2x} + 4x^3 = 0 \iff e^{2x} = -4x^3$$

L'equazione $e^{2x} = -4x^3$ ha una soluzione unica $x^* < 0$



Quindi (x^*, x^*) è l'unico punto critico.

La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + 8x^2 & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} + 8y^2 \end{pmatrix}$$

Traccia:

$$\operatorname{tr}(Hf(x,y)) = 8(x^2+y^2)+2e^{x+y} > 0$$

Determinante:

$$\det(Hf(x,y)) = (e^{x+y}+8x^2)(e^{x+y}+8y^2) - (e^{x+y})^2 =$$

$$= e^{x+y}\, 8\,(x^2+y^2) + 64x^2y^2 \geqslant 0$$

Quindi $Hf(x,y) \geqslant 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ovvero f è convessa.

Quindi il punto critico (unico) è l'unico punto di minimo assoluto.

$\square$

Esercizio Si consideri la curva $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (\cos t, t \sin t), \qquad t \in [0,2\pi].$$

1) Nei punti regolari calcolare il versore tangente

$$T(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}, \qquad t \in (0,2\pi].$$

2) Calcolare il limite $\lim_{t\to 0^+} T(t)$.

3) Stabilire in quale quadrante si trova il punto di massima (risp. minima) ordinata sul supporto della curva.

4) Disegnare il supporto della curva, con cura in $(1,0)$.

Soluzione. 1) La derivata di γ è:

$$\dot\gamma(t) = (-\sin t, \sin t + t\cos t)$$

e si ha $\dot\gamma(t) = (0,0) \iff t=0$ unico punto non regolare. Inoltre

$$|\dot\gamma(t)| = \left((\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)\right)^{1/2}$$

$$= \left(2\sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t\right)^{1/2}$$

e quindi

$$\frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{(-\sin t, \sin t + t\cos t)}{\left(2\sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t\right)^{1/2}}.$$

2) Calcoliamo

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{t} \cdot \frac{t}{|\dot\gamma(t)|}$$

dove

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{\sin t}{t}, \frac{\sin t}{t} + \cos t\right)$$

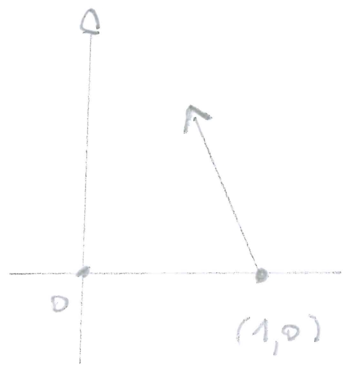
$$= (-1, 2)$$

e analogamente

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|\dot\gamma(t)|}{t} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Quindi

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}$$

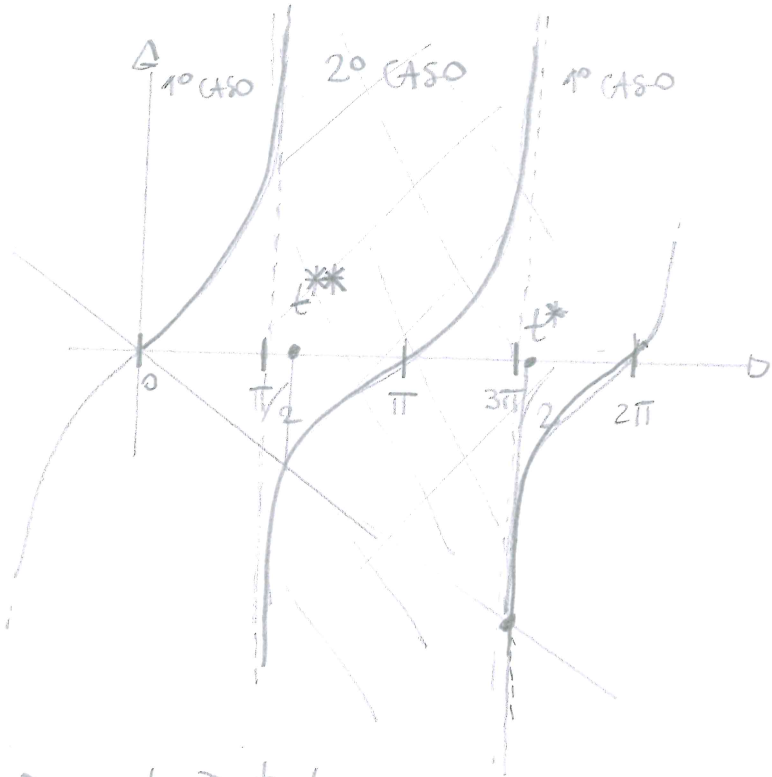


3) Osserviamo che $\cos t$ decresce per $t \in [0, \pi]$ e cresce per $t \in [\pi, 2\pi]$. La derivata di $\phi(t) = t \sin t$ è $\phi'(t) = \sin t + t \cos t$. Studiamo il segno

$$\phi'(t) \geq 0 \iff \sin t + t\cos t \geq 0 \iff \sin t \geq -t \cos t$$

Dividiamo per $\cos t$, 1° CASO: $\cos t > 0$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \geq -t \iff t \geq -\operatorname{tg} t$$
$$\iff -t \leq \operatorname{tg} t$$



ϕ cresce in $[0, \pi/2]$

ϕ cresce in $[t^*, 2\pi]$

dove $t^* \in (\frac{3}{2}\pi, \pi)$

4° Quadrante

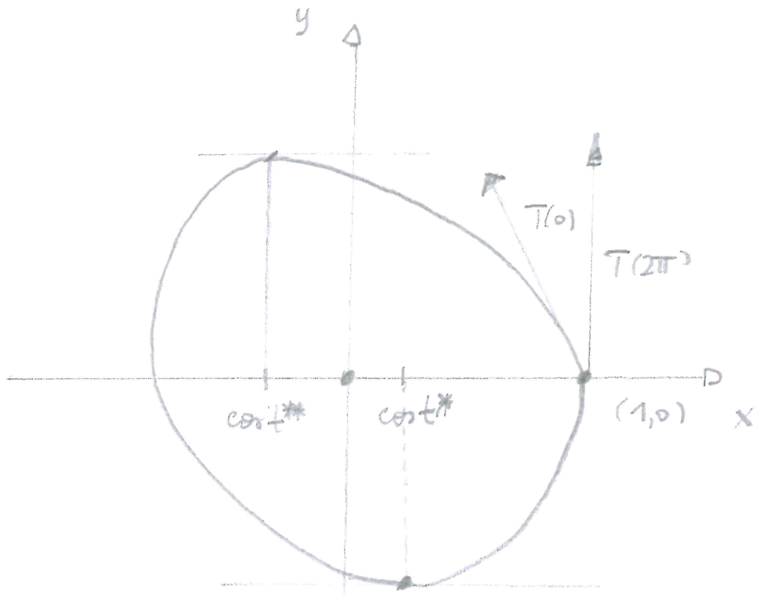
2° CASO : $\cos t < 0$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \leq -t \iff -t \geq \operatorname{tg} t$$

ϕ cresce in $[\frac{\pi}{2}, t^{**}]$ per $t^{**} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 2° Quadrante

ϕ decresce in $[t^{**}, \frac{3}{2}\pi]$

4) Consideriamo $T(2\pi) = (0,1)$



ESERCIZIO Per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

1) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale converga semplicemente.

2) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale converga assolutamente.

Soluzione. Spezziamo

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \cdots\,dx + \int_1^\infty \cdots\,dx,$$

1) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ converge per $\alpha > 0$ per il Criterio di Abel-Dirichlet. Per $\alpha = 0$ NON converge. Inoltre

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \text{ converge } \overset{\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)}{\Longleftrightarrow} \int_0^1 \frac{x}{x^\alpha}\,dx \text{ converge}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha - 1 < 1 \Longleftrightarrow \alpha < 2$$

Risposta: $0 < \alpha < 2$.

2) Come sopra:

$$\int_0^1 \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx < \infty \quad \Longleftrightarrow \int_0^1 \left|\frac{x}{x^\alpha}\right| dx < \infty$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha < 2$$

Studiamo l'integrale

$$I = \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\, dx.$$

Per $\alpha > 1$:

$$I \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx < \infty$$

Per $\alpha = 1$:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \infty \quad \text{visto in classe}$$

Per $0 < \alpha < 1$: $\quad x^{\alpha} \leq x \quad$ (per $x \geq 1$)

$$I = \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\, dx \geq \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \infty$$

Quindi diverge.

Risposta: $1 < \alpha < 2$.

$\square$

ESERCIZIO Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} .$$

1) Stabilire per quali $x \geq 0$ c'è convergenza semplice.

2) Studiare la convergenza uniforme.

3) C'è convergenza uniforme su $[0,\infty)$. Vero o Falso?

Soluzione 1) Per $x = 0$ c'è convergenza e la somma è 0. Per $x > 0$:

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Converge per confronto.

2) Come sopra, per $x \geq \delta > 0$ si trova

$$\sup_{x \geq \delta} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{1}{\delta} \frac{1}{n^2}$$

e quindi c'è convergenza uniforme su $[\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$.

3) Osserviamo che $(2ab \leq a^2+b^2)$;

$$x^2n^2 + \log^4 n \geq 2xn \log^2 n$$

e quindi

$$\frac{x}{x^2n^2+\log^4 n} \leq \frac{x}{2xn\log^2 n} = \frac{1}{2n\log^2 n}$$

La stima è vera $\forall x \geq 0$ e $\forall n \geq 2$.

La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n} < \infty \quad \text{converge.}$$

Lo si vede con il criterio del confronto integrale

$$\int_2^{\infty} \frac{dt}{t\log^2 t}\,dt = \left[-\frac{1}{\log t}\right]_{t=2}^{t=\infty}$$

$$= \frac{1}{\log 2} < \infty$$

Conclusione: per il criterio di Weierstrass la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2n^2+\log^4 n}$$

converge uniformemente su $[0,\infty)$.

$\square$

Analisi Matematica 2 Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 12/9/2016

Esercizio 1 Si consideri l'integrale improprio

$$I_\gamma = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^\gamma \arctan(x)} dx.$$

Calcolare tutti i numeri reali $\gamma > -1$ tali che l'integrale converga semplicemente.

Risposte: $\gamma \in$

Esercizio 2 Dato $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $\alpha \in$

Esercizio 3 Si consideri il sottoinsieme del piano

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1 \text{ e } y^2 \leq \frac{5}{4+x^4}\right\}.$$

i) Stabilire se C è un insieme chiuso.

ii) Stabilire se C è un insieme compatto.

iii) Disegnare C.

Risposte: i) C chiuso: ; ii) C compatto: ; iii) Disegno:

Esercizio 4 Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \sqrt[n]{4^n + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Risposte: i) $f_\infty =$; ii) CU per $x \in$

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 12/9/2016

Esercizio 1 Si consideri l'integrale improprio

$$I_\gamma = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^\gamma \log(1+x)} dx.$$

Calcolare tutti i numeri reali $\gamma \geq -1$ tali che l'integrale converga semplicemente.

Risposte: $\gamma \in$

Esercizio 2 Dato $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y|x|^{2\alpha}}{\arctan(x^2+y^2)} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $\alpha \in$

Esercizio 3 Si consideri il sottoinsieme del piano

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1 \text{ e } y^2 \leq \frac{5}{1+x^2}\right\}.$$

i) Stabilire se C è un insieme chiuso.

ii) Stabilire se C è un insieme compatto.

iii) Disegnare C.

Risposte: i) C chiuso: ; ii) C compatto: ; iii) Disegno:

Esercizio 4 Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Risposte: i) $f_\infty =$; ii) CU per $x \in$

3 ore a disposizione

Esercizio Si consideri il sottoinsieme del piano

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad xy \geq 1 \quad e \quad y^2 \leq \frac{5}{1+x^2} \right\}.$$

i) Stabilire se C è chiuso.

ii) stabilire se C è compatto.

Soluzione. Le due funzioni $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = xy \qquad e \qquad g(x,y) = y^2(1+x^2)$$

sono continue (polinomi). Dunque le antimmagini

$$C_1 = f^{-1}([1,\infty))$$

$$C_2 = g^{-1}((-\infty, 5])$$

sono insiemi chiusi di $\mathbb{R}^2$. Dunque

$$C = C_1 \cap C_2$$

è l'intersezione di due chiusi e quindi è chiuso.

ii) Per il Teorema di Heine-Borel C è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Bisogna vedere se C è limitato.

Osserviamo che $xy \geq 1 > 0$ e quindi x e y sono concordi di segno e quindi C è contenuto nel 1° e nel 3° quadrante. Inoltre $(x,y) \in C$ se e solo se $(-x,-y) \in C$. Quindi C è simmetrico rispetto all'origine. Esaminiamo la porzione di C nel 1° quadrante, dove $x>0$ e $y>0$.

Qui abbiamo

$$y \geq \frac{1}{x} = \varphi(x),$$

$$y \leq \sqrt{\frac{5}{1+x^2}} = \psi(x).$$

Se $\varphi(x) \leq \psi(x)$ allora esistono delle y che verificano le due disuguaglianze. Studiamo:

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \iff \frac{1}{x} \leq \sqrt{\frac{5}{1+x^2}} \overset{x>0}{\iff} \frac{1}{x^2} \leq \frac{5}{1+x^2}$$

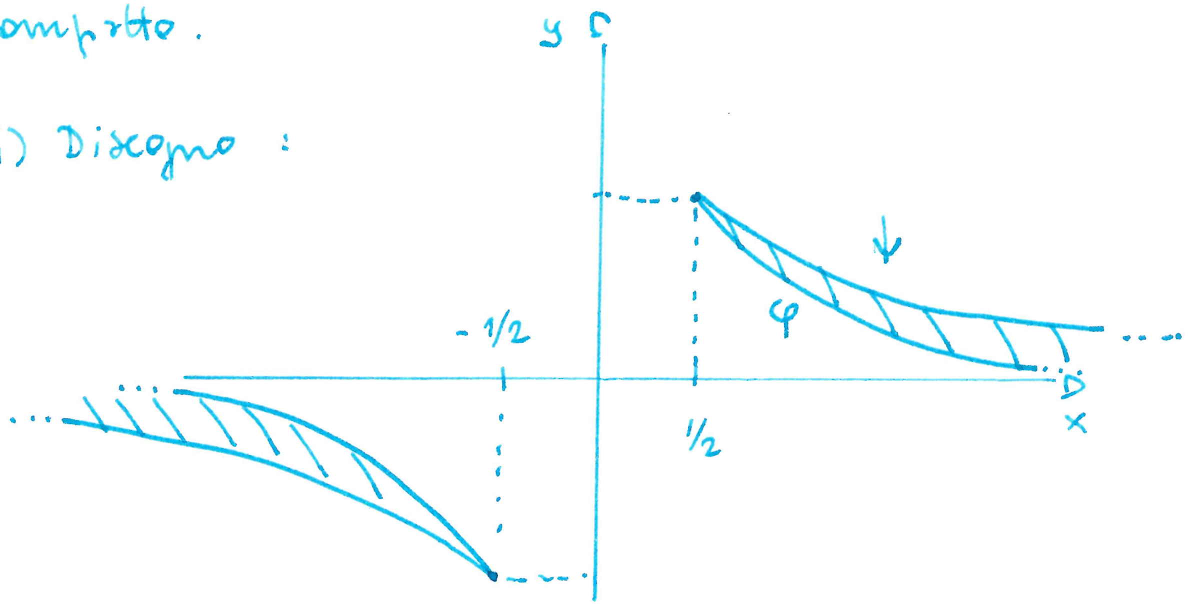
$$\iff 1+x^2 \leq 5x^2 \iff 1 \leq 4x^2$$

$$\iff x \geq \frac{1}{2}.$$

Dunque: $\forall x \geq \frac{1}{2}\ \exists y>0$ tale che $(x,y) \in C$.

Dunque C non è limitato e quindi non è compatto.

iii) Disegno:



Esercizio Sia $\gamma \geq -1$ un numero reale e si consideri l'integrale improprio

$$I_\gamma = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^\gamma \log(1+x)}\, dx .$$

Calcolare tutti i $\gamma \geq -1$ tali che l'integrale I_γ converga.

Soluzione. Devono convergere entrambi gli integrali:

$$I_\gamma^{(1)} = \int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^\gamma \log(1+x)}\, dx \quad e \quad I_\gamma^{(2)} = \int_1^\infty \frac{\sin(x^2)\, dx}{x^\gamma \log(1+x)}$$

Studio $I_\gamma^{(1)}$ con il Criterio del Confronto Asintotico:

$$\begin{aligned} \sin(x^2) &= x^2 (1 + o(1)) \\ \log(1+x) &= x (1 + o(1)) \end{aligned} \quad \text{per } x \to \infty .$$

Quindi

$$\begin{aligned} I_\gamma^{(1)} < \infty \iff & \int_0^1 \frac{x^2}{x^\gamma \cdot x}\, dx < \infty \\ \iff & \int_0^1 \frac{1}{x^{\gamma-1}}\, dx < \infty \\ \iff & \gamma - 1 < 1 \iff \gamma < 2 . \end{aligned}$$

Voglio studiare $I_\gamma^{(2)}$ con il criterio di Abel-Dirichlet. Tuttavia $\sin(x^2)$ non ha primitiva limitata (non chiaro). Facciamo il cambio di variabile $x^2 = t \iff x = \sqrt{t}$ e $dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$.

Quindi:

$$I_\gamma^{(2)} = \int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\gamma/2}\log(1+t^{1/2})} \; \frac{1}{2} \; \frac{dt}{t^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}\log(1+t^{1/2})}\,dt$$

Precisamente per $\gamma \geq -1$ la funzione

$$f(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}\log(1+t^{1/2})}$$

è infinitesima per $t \to \infty$ e decrescente.

Quindi: $\gamma \geq -1 \Rightarrow I_\gamma^2$ converge.

Conclusione: I_γ converge se e solo se $-1 \leq \gamma < 2$.

$\square$

Esercizio Sia $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{4^n + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Soluzione i) Se $4 \le x^2$ si trova:

$$x^2 = \sqrt[n]{x^{2n}} \underset{\text{sempre}}{\le} \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} \le \sqrt[n]{x^{2n} + x^{2n}} = \sqrt[n]{2 \cdot x^{2n}} = \underbrace{x^2 \cdot \sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow{n\to\infty}\ x^2}$$

Per confronto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} = x^2 \quad \text{se } x^2 \ge 4.$$

Se invece si ha $x^2 \le 4$ si trova:

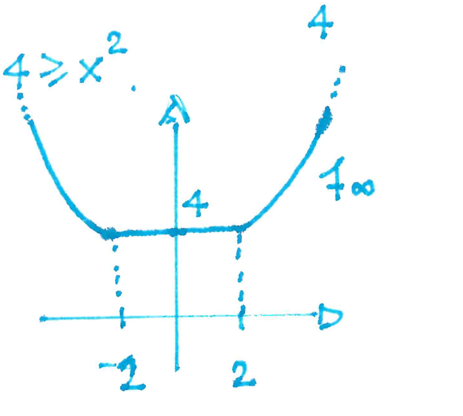
$$4 = \sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} \le \sqrt[n]{4^n + 4^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = \underbrace{4 \cdot \sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow{n\to\infty}\ 4}$$

Per confronto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} = 4 \quad \text{se } 4 \ge x^2.$$

Conclusione

$$f_\infty(x) = \max\{4, x^2\}$$



ii) Studio la convergenza uniforme per $x^2 \leq 4$ ovvero per $x \in [-2,2]$:

$$0 \leq f_n(x) - f_\infty(x) = \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} - 4 \leq \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} - 4 =$$

$$= \underbrace{4(\sqrt[n]{2} - 1)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

Quindi si ha convergenza uniforme su $[-2,2]$.

Studio la convergenza uniforme per $x^2 \geq 4$:

$$0 \leq g_n(x) = f_n(x) - f_\infty(x) = \underbrace{\sqrt[n]{4^n + x^{2n}}}_{\geq 0} - x^2$$

Studio la funzione g_n.

Derivata:

$$g_n'(x) = \frac{d}{dx}\left((4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n}} - x^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{n} (4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n} - 1} \cdot 2n x^{2n-1} - 2x$$

$$= 2x \left[(4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n} - 1} x^{2(n-1)} - 1 \right].$$

Studio il segno. Per simmetria pari di g_n mi limito al caso $x \geq 0$ (ovvero $x \geq 2$).

In questo caso:

$$g_n'(x) \geq 0 \iff (4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n}-1} x^{2(n-1)} \geq 1$$

$$\iff x^{2(n-1)} \geq (4^n + x^{2n})^{1-\frac{1}{n}}$$

$$\overset{(n>1)}{\iff} x^2 \geq (4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n}}$$

$$\iff x^{2n} \geq 4^n + x^{2n} \qquad \underline{\text{MAI}}$$

Quindi $g_n'(x) \leq 0$ per $x \geq 2$ e inoltre $g_n(x) \geq 0$.

Quindi

$$\max_{x \geq 2} g_n(x) = g_n(2) = \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} - 4 = 4(\sqrt[n]{2} - 1) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

e c'è convergenza uniforme per $x^2 \geq 4$.

Conclusione $f_n \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f_\infty$ su tutto $\mathbb{R}$. $\square$

<u>Esercizio</u> Dato $\alpha > 0$ si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione. i) Stime:

$$|f(x,y)| = \frac{|x|\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)} \leq \frac{(x^2+y^2)^{1/2}\,(x^2+y^2)^{\alpha/2}}{\log(1+x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\log(1+x^2+y^2)} = \frac{r^{\alpha+1}}{\log(1+r^2)} \quad \text{dove } r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Siccome $\log(1+r^2) = r^2(1+o(1))$ per $r \to 0^+$, si trova:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^{\alpha+1}}{\log(1+r^2)} = \lim_{r \to 0^+} r^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ \infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Deduciamo che

$$\alpha > 1 \implies f \text{ continua in } (0,0).$$

Esaminiamo il caso $\alpha \leq 1$. Test delle rette $y = mx$:

$$f(x, mx) = \frac{x\, |m|^\alpha\, |x|^\alpha}{\log\,(1+x^2+m^2x^2)} = \begin{bmatrix} o(1) \to 0 \\ \text{per } x \to 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x\, |x|^\alpha\, |m|^\alpha}{x^2\,(1+m^2)\,(1+o(1))} = \frac{|m|^\alpha}{1+m^2}\; \frac{|x|^\alpha}{x\,(1+o(1))}$$

Per $\alpha \leq 1$ il limite $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ non esiste finito oppure dipende da m (quando $\alpha = 1$ e $x \to 0^+$)

Questo prova che:

$$\alpha \leq 1 \implies f \text{ non è continua in } (0,0).$$

ii) Siccome $f = 0$ sui due assi, le derivate parziali in $(0,0)$ esistono e sono

$$f_x(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = 0.$$

Dunque, f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y \to 0}} \frac{x\,|y|^\alpha}{\log\,(1+x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Procedendo come sopra:

$$\left| \frac{x\,|y|^\alpha}{\log\,(1+x^2+y^2)\,\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+1}{2} - \frac{1}{2}}}{\log\,(1+x^2+y^2)} = \frac{r^\alpha}{\log(1+r^2)}$$

dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ora si ha:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^\alpha}{\log(1+r^2)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{\alpha-2}}{1+o(1)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ \infty & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

Questo prova che

$$\alpha > 2 \implies f \text{ differenziabile in } (0,0).$$

Quando $\alpha \leq 2$ con il test delle rette $y = mx$ si vede che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

non esiste finito. Dunque:

$$\alpha \leq 2 \implies f \text{ non è differenziabile in } (0,0).$$

Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 30/8/2016

Esercizio 1 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$:

$$\omega(x,y) = \frac{2x + \alpha e^y}{x^2 + e^y} dx + \frac{\alpha x + e^y}{x^2 + e^y} dy.$$

i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$. Poi per tali α:

ii) Calcolare un potenziale f di ω su $\mathbb{R}^2$.

iii) Data la curva $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\sin t, 1 - \cos(t/2)\big)$ con $t \in [0, \pi]$, calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega.$$

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $f =$; iii) $I =$

Esercizio 2 Siano $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$ il primo quadrante ed $A = \{(x,y) \in Q : x^2 + 4y^2 < 16 \text{ e } y < 2 + \log(xy)\}$.

i) Stabilire se $A \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e provare che $A \neq \emptyset$.

ii) Stabilire se la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme compatto.

iii) Rappresentare A nel piano cartesiano.

Risposte: i) A aperto: ; ii) $\bar{A}$ compatto: ; iii) Disegno:

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2 + e^{-n}}{1 + n^2 x^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$

Esercizio 4 Siano $\beta > 0$ un parametro, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - \beta xy.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K al variare di β.

ii) Calcolare tutti i punti di minimo assoluto di f in K al variare di β.

Risposte: i) p.ti critici int.: ; ii) p.ti min. ass.:

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 30/8/2016

Esercizio 1 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$:

$$\omega(x,y) = \frac{2\alpha x e^y}{x^2 e^y + 1} dx + \frac{x^2 e^{\alpha y}}{x^2 e^y + 1} dy.$$

i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$. Poi per tali α:

ii) Calcolare un potenziale f di ω su $\mathbb{R}^2$.

iii) Data la curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(1-\cos(t/2), \sin t\big)$ con $t \in [0,\pi]$, calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega.$$

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $f =$; iii) $I =$

Esercizio 2 Siano $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$ il primo quadrante ed $A = \{(x,y) \in Q : x^2 + 4y^2 > 16 \text{ e } y < \log(xy)\}$.

i) Stabilire se $A \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e provare che $A \neq \emptyset$.

ii) Stabilire se la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme compatto.

iii) Rappresentare A nel piano cartesiano.

Risposte: i) A aperto: ; ii) $\bar{A}$ compatto: ; iii) Disegno:

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^2 + 1}{e^n + n^3 x^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$

Esercizio 4 Siano $\beta > 0$ un parametro, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = xy - \beta(x^2+y^2)^2.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K al variare di β.

ii) Calcolare tutti i punti di massimo assoluto di f in K al variare di β.

Risposte: i) p.ti critici int.: ; ii) p.ti max. ass.:

3 ore a disposizione

Esercizio Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \frac{2\alpha x e^{y}}{x^2 e^y + 1}\, dx + \frac{x^2 e^{\alpha y}}{x^2 e^y + 1}\, dy .$$

i) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

ii) Per tali α, calcolare un potenziale di ω in $\mathbb{R}^2$

iii) Data $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (1 - \cos(t/2), \sin t)$ con $t \in [0,\pi]$ calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega .$$

Soluzione. i) Siccome $\mathbb{R}^2$ è convesso ($\Rightarrow$ semplicemente connesso) ω è esatta se e solo se è chiusa in $\mathbb{R}^2$.

Imponiamo la condizione di chiusura

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\alpha x e^y}{x^2 e^y + 1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2 e^{\alpha y}}{x^2 e^y + 1}\right)$$

ovvero:

$$\frac{2\alpha x e^y (x^2 e^y + 1) - 2\alpha x e^y \cdot x^2 e^y}{(x^2 e^y + 1)^2} = \cancel{\frac{\alpha x^2 e^{\alpha y}(x^2 e^y + 1) - x^2 e^{\alpha y}}{(x^2 e^y + 1)^2}}$$

$$= \frac{2x e^{\alpha y}(x^2 e^y + 1) - x^2 e^{\alpha y} \cdot 2x e^y}{(x^2 e^y + 1)^2}$$

ovvero:

$$2\alpha x e^y = 2x e^{\alpha y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} .$$

Con $x = 1$ e $y = 0$ deduciamo che $\alpha = 1$.

ii) Dunque con $\alpha = 1$, si ha

$$\omega = \frac{2x e^y}{x^2 e^y + 1}\, dx + \frac{x^2 e^y}{x^2 e^y + 1}\, dy$$

Cerchiamo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{2x e^y}{x^2 e^y + 1} \\ \\ f_y = \dfrac{x^2 e^y}{x^2 e^y + 1} \end{cases}$$

Integriamo la prima equazione:

$$f(x,y) = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\, dx = \int \frac{2x e^y}{x^2 e^y + 1}\, dx$$

$$= \log\left(x^2 e^y + 1\right) + c(y)$$

Quindi:

$$\frac{x^2 e^y}{x^2 e^y + 1} = f_y(x,y) = \frac{x^2 e^y}{x^2 e^y + 1} + c'(y)$$

da cui si trova $c'(y) = 0$ che implica $c(y) = c_0$ costante. Scegliamo $c_0 = 0$. Il potenziale è

$$f(x,y) = \log\left(x^2 e^y + 1\right).$$

iii) Osserviamo che $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(\pi) = (1,0)$.
Siccome ω è esatta con potenziale f:

$$I = \int_\gamma \omega = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0))$$
$$= f(1,0) - f(0,0)$$
$$= \log(1+1) - \log(1) = \log 2.$$

$\square$

Esercizio Sia $Q = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0 \text{ e } y>0 \}$ il primo quadrante e sia $A = \{ (x,y) \in Q : x^2+4y^2 < 16 \text{ e } y<2+\log(xy) \}$.

i) Stabilire se A è aperto e provare che $A \neq \emptyset$.

ii) Stabilire se $\overline{A}$ è compatto.

iii) Rappresentare A nel piano.

Soluzione. i) Q è aperto. Le funzioni

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ed $f_2 : Q \to \mathbb{R}$

$$f_1(x,y) = x^2+4y^2-16$$

$$f_2(x,y) = y-2-\log(xy)$$

sono continue. Quindi

$$A_1 = f_1^{-1}((-\infty,0)) \quad \text{è aperto}$$
$$A_2 = f_2^{-1}((-\infty,0)) \quad \text{è aperto}$$

Quindi $A = Q \cap A_1 \cap A_2$ è aperto.

Osserviamo che $(1,1) \in A$. Infatti:

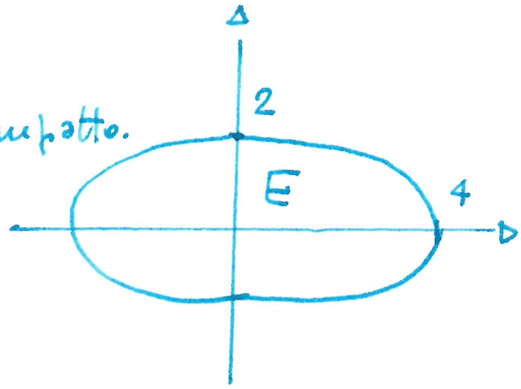
$$1+4 < 16 \quad \text{e} \quad 1 < 2+\log 1 = 2.$$

Quindi $A \neq \emptyset$.

ii) $\overline{A}$ è chiuso (è la chiusura di un insieme).

Vediamo se A è limitato. L'insieme $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 < 16 \}$ è un'ellisse:

Dunque E è limitato e quindi A è limitato essendo $A \subset E$. Per Heine-Borel $\overline{A}$ è compatto.

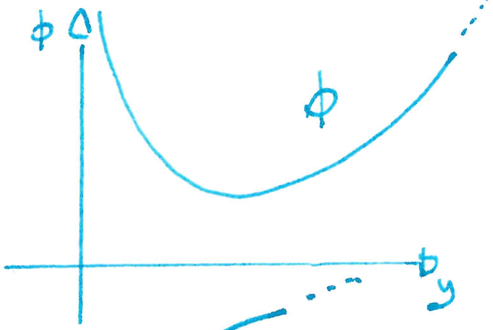


iii) Studiamo la disequazione

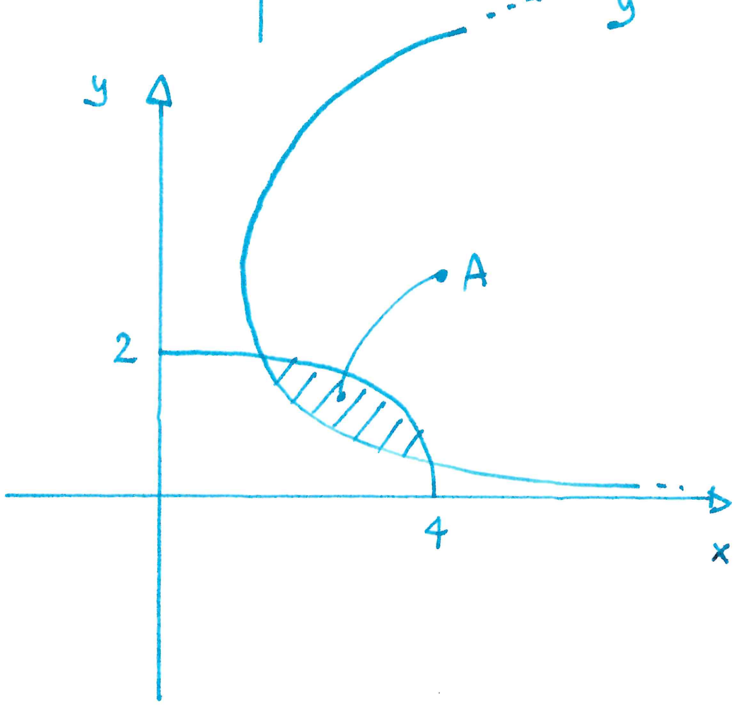
$$y < 2 + \log(xy) \iff y-2 < \log(xy)$$
$$\iff e^{y-2} < xy$$
$$\underset{(y>0)}{\iff} \frac{1}{y}\, e^{y-2} < x\,.$$

Studiamo brevemente la funzione $\phi(y) = \frac{1}{y} e^{y-2}$.

Disegno per $y>0$:



Quindi:



$\square$

Esercizio Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^2 + 1}{e^n + n^3 x^2} .$$

i) Studiare la convergenza puntuale.

ii) Studiare la convergenza uniforme.

Soluzione. i) Serie a termini positivi. Per $x = 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0+1}{e^n + 0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/e} < \infty .$$

Per $x \neq 0$ si ha per confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2 + 1}{e^n + n^3 x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2 + 1}{n^3 x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} <$$

$$< \infty$$

ii) Partiamo da qui:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^2 + 1}{e^n + n^3 x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^2}{e^n + n^3 x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n + n^3 x^2} .$$

La seconda serie converge uniformemente per il Criterio di Weierstrass:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n + n^3 x^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{1 - 1/e} .$$

La prima serie converge uniformemente per il criterio di Weierstrass:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2}{e^n + n^3 x^2} \overset{(x \neq 0)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\frac{e^n}{x^2} + n^3} \overset{(\forall x)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Quindi la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

$\square$

Esercizio. Dato $\beta > 0$, posto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

si consideri $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - \beta xy .$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K

ii) Calcolare tutti i punti di minimo assoluto di f su K.

Soluzione. f è continua e K è compatto. Quindi ci sono in K punti di minimo assoluto

i) Calcoliamo i punti critici:

$$\begin{cases} f_x = 2(x^2+y^2)\cdot 2x - \beta y = 0 \\ f_y = 2(x^2+y^2)\cdot 2y - \beta x = 0 \end{cases}$$

Le due equazioni implicano che $x f_x - y f_y = 0$ ovvero

$$4(x^2+y^2)(x^2-y^2) = 0$$

che implica $x = y = 0$ $(\Leftrightarrow x^2+y^2=0)$ oppure $x = \pm y$.

Dunque $(0,0)$ è un punto critico. Inseriamo $x = \pm y$ ad es. nella prima equazione:

$$2(y^2+y^2)\cdot 2(\pm y) - \beta y = 0 \Leftrightarrow \pm 8y^3 - \beta y = 0$$

Con la scelta $+$ si trova $8y^3 - \beta y = 0$ ovvero $y(8y^2 - \beta) = 0$ che fornisce $y = 0$ oppure $8y^2 - \beta = 0$. Sappiamo che $y = 0 \Rightarrow x = 0$, già considerato. L'altra equazione fornisce

$$(*) \qquad y = \pm\sqrt{\frac{\beta}{8}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}.$$

Con la scelta $-$ si trova $-8y^3 - \beta y = 0$ ovvero $-y(8y^2 + \beta) = 0$ che fornisce $y = 0$ (già fatto) oppure $8y^2 + \beta = 0$, che non ha soluzione.

Troviamo i due punti critici dati da $(*)$:

$$\left(\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \sqrt{\frac{\beta}{8}}\right) \quad e \quad \left(-\sqrt{\frac{\beta}{8}}, -\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right).$$

Sono interni a K se e solo se:

$$\left(\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)^2 < 1 \iff \beta < 4.$$

ii) Studiamo f sulla circonferenza $\partial K = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Per $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\phi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - \beta \sin\theta\cos\theta$$
$$= 1 - \frac{\beta}{2}\sin(2\theta)$$

Dunque ϕ è minimo per $\sin 2\theta = 1$ ovvero $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ e quindi $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{5}{4}\pi$.

Qui ϕ vale $\phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \phi\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 1 - \frac{\beta}{2}$.

Abbiamo i seguenti casi:

1° caso $\beta \geq 4$. Allora $(0,0) \in \mathrm{int}(K)$ è l'unico p.to critico interno. Qui si ha $f(0,0) = 0$. Quindi il valore minimo di f è $1 - \beta/2$ ed è assunto sulla frontiera (anche in $(0,0)$ se $\beta = 4$).

2° caso $0 < \beta < 4$. Nei punti $\left(\pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \pm\sqrt{\frac{\beta}{2}}\right)$ f assume il valore:

$$f\left(\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \sqrt{\frac{\beta}{8}}\right) = \left(\frac{\beta}{4}\right)^2 - \beta\,\frac{\beta}{8} = \beta^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\right)$$

$$= -\frac{\beta^2}{16}.$$

Studiamo la disequazione:

$$-\frac{1}{16}\beta^2 \leq 1 - \frac{\beta}{2} \iff \frac{\beta^2}{16} - \frac{\beta}{2} + 1 \geq 0$$

$$\iff \left(\frac{\beta}{4} - 1\right)^2 \geq 0$$

Dunque $0 < \beta < 4 \Rightarrow -\frac{\beta^2}{16} < 1 - \frac{\beta}{2}$. Dunque i p.ti $\left(\pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)$ sono di minimo assoluto.

$\square$

Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 6/7/2016

Esercizio 1 Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva di equazione polare $\varrho = 1 + \sin\vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

i) Calcolare tutti i $\vartheta \in [0, 2\pi]$ tali che γ sia regolare in ϑ.

ii) Calcolare il campo unitario tangente T nei punti regolari..

iii) Disegnare approx. il supporto $\mathrm{spt}(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$.

iv) Calcolare la lunghezza di γ.

Risposte: i) $\vartheta \in$; ii) $T =$; iii) Disegno: iv) $L(\gamma) =$

Esercizio 2 Si consideri l'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)^2 \leq x + y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

i) Stabilire se K è chiuso.

ii) Stabire se K è compatto.

Risposte: i) K chiuso: ; ii) K compatto:

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n(x-2)^2}}{1 + n^2x^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $(-\infty, 1]$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $[1, \infty)$.

Risposte: i) CP: $x \in$; ii) CU su $(-\infty, 1]$: ; iii) CU su $[1, \infty)$:

Esercizio 4 Siano $\beta \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \beta x^2 + y - \log(x + y).$$

i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, calcolare i punti critici di f.

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Determinare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su A.

iv) Stabilire se i punti critici sono punti di min/max, locale/globale.

Risposte: i) ; ii) $f_{xx} =$ $f_{yy} =$ $f_{xy} =$;   iii) $\beta \in$; iv)

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 6/7/2016

Esercizio 1 Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva di equazione polare $\varrho = 1 - \sin\vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

i) Calcolare tutti i $\vartheta \in [0, 2\pi]$ tali che γ sia regolare in ϑ.

ii) Calcolare il campo unitario tangente T nei punti regolari.

iii) Disegnare approx. il supporto $\mathrm{spt}(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$.

iv) Calcolare la lunghezza di γ.

Risposte: i) $\vartheta \in$; ii) $T =$; iii) Disegno: iv) $L(\gamma) =$

Esercizio 2 Si consideri l'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y)^2 \le x - y \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

i) Stabilire se K è chiuso.

ii) Stabire se K è compatto.

Risposte: i) K chiuso: ; ii) K compatto:

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1 + n^2(x + 2)^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $(-\infty, -1]$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $[-1, \infty)$.

Risposte: i) CP: $x \in$; ii) CU su $(-\infty, -1]$: ; iii) CU su $[-1, \infty)$:

Esercizio 4 Siano $\beta \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x + \beta y^2 - \log(x + y).$$

i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, calcolare i punti critici di f.

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Determinare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su A.

iv) Stabilire se i punti critici sono punti di min/max, locale/globale.

Risposte: i) ; ii) $f_{xx} =$ $f_{yy} =$ $f_{xy} =$; iii) $\beta \in$; iv)

3 ore a disposizione

<u>Esercizio</u> Sia $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva di equazione polare $\rho = 1+\sin\theta$, $\theta \in [0,2\pi]$.

i) Calcolare tutti i θ in cui γ è regolare. Calcolare il campo tangente unitario T.

ii) Calcolare i limiti destro e sinistro di T nei punti non regolare. (Non richiesto nel compito)

iii) Disegnare in modo approssimativo il sostegno di γ

iv) Calcolare la lunghezza di γ.

Risoluzione i) Sappiamo che $|\dot\gamma| = \sqrt{\rho^2+\dot\rho^2}$, dove $\dot\rho = \cos\theta$.
Quindi γ non è regolare nel punto θ se e solo se

$$|\dot\gamma(\theta)| = 0 \iff \sqrt{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta} = 0$$

$$\iff \begin{cases} 1+\sin\theta = 0 \\ \cos\theta = 0 \end{cases} \iff \theta = \frac{3}{2}\pi .$$

In coordinate cartesiane si ha

$$\gamma(\theta) = \left((1+\sin\theta)\cos\theta,\ (1+\sin\theta)\sin\theta\right)$$

$$= \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta),\ \sin\theta + \sin^2\theta\right)$$

e quindi

$$\dot\gamma(\theta) = \left(-\sin\theta + \cos(2\theta),\ \cos\theta + \sin(2\theta)\right)$$

Come sopra : $|\dot\gamma(\theta)| = \sqrt{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta} = \sqrt{2(1+\sin\theta)}$

Il campo tangente per $\theta \neq \frac{3}{2}\pi$ è

$$T = \frac{\left(-\sin\theta + \cos 2\theta,\ \cos\theta + \cancel{\sin}(2\theta)\right)}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sin\theta}}$$

Cambiamo variabile : $\theta = \frac{3}{2}\pi + \phi$

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \phi\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\cos\phi + \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)\sin\phi$$

$$= -\cos\phi$$

$$\cos 2\theta = \cos\left(3\pi + 2\phi\right) = \cos(3\pi)\cos(2\phi) - \sin(3\pi)\sin(2\phi)$$

$$= -\cos(2\phi)$$

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \phi\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)\cos\phi - \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\sin\phi$$

$$= \sin\phi \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\sin(2\phi)$$

Dunque

$$T = \frac{\left(\cos\phi - \cos 2\phi,\ \sin\phi - \cancel{\sin} 2\phi\right)}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi}}$$

Sviluppi:

$$\cos\phi - \cos 2\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}(2\phi)^2\right) + o(\phi^2)$$

$$= -\frac{\phi^2}{2} + 2\phi^2 + o(\phi^2)$$

$$= \frac{3}{2}\phi^2 + o(\phi^2)$$

$$\sin\phi - \sin 2\phi = \phi - \frac{1}{6}\phi^3 - \left(2\phi - \frac{1}{6}(2\phi)^3\right) + o(\phi^3)$$

$$= -\phi + o(\phi)$$

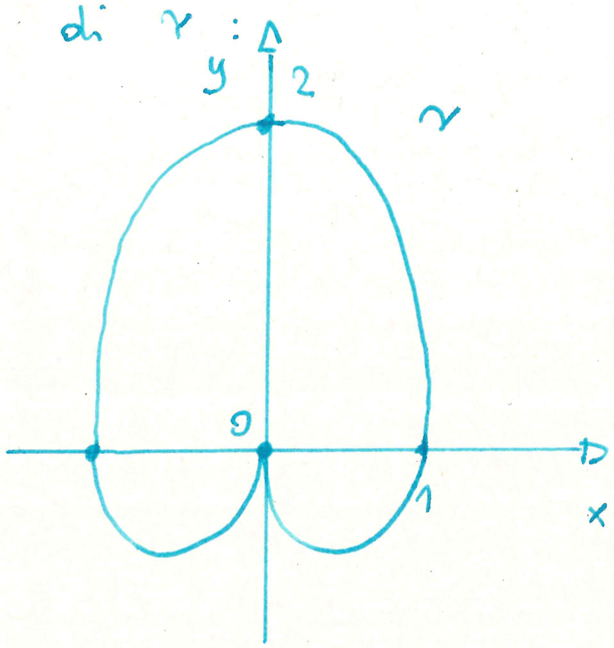
$$\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}\phi^2 + o(\phi^2)} = |\phi| + o(\phi)$$

Dunque

$$\lim_{\theta \to \frac{3}{2}\pi^\pm} T = \lim_{\phi \to 0^\pm} \frac{\left(\frac{3}{2}\phi^2 + o(\phi^2), -\phi + o(\phi)\right)}{|\phi| + o(\phi)}$$

$$= (0, \mp 1)$$

iii) Supporto di γ:



iv) Lunghezza di γ: La lunghezza di γ è il doppio della lunghezza di γ nel semipiano $x \geq 0$.

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}| d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2(1+\sin\theta)}\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\sin\theta} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \left[-2\sqrt{1-\sin\theta}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8.$$

$\square$

Esercizio Siano $\beta \in \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x + \beta y^2 - \log(x+y).$$

i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, calcolare i punti critici di f.

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Determinare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su A.

iv) Stabilire se i punti critici sono punti di min/max locale/globale.

Risoluzione i) Il gradiente di f è:

$$f_x = 1 - \frac{1}{x+y},$$

$$f_y = 2\beta y - \frac{1}{x+y}.$$

Quindi $(x,y) \in A$ è un p.to critico di f se e solo se

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x+y} = 0 \\ 2\beta y - \dfrac{1}{x+y} = 0. \end{cases}$$

Le due equazioni insieme implicano che $2\beta y = 1$. Se $\beta = 0$ l'equazione non ha soluzione e dunque non ci sono punti critici. Se $\beta \neq 0$ si trova

$$y = \frac{1}{2\beta}$$

che implica:

$$0 = 1 - \frac{1}{x+\frac{1}{2\beta}} \iff x + \frac{1}{2\beta} = 1 \iff x = 1 - \frac{1}{2\beta}.$$

Osserviamo che $x+y = \left(1-\frac{1}{2\beta}\right) + \frac{1}{2\beta} = 1 > 0.$

Quindi

$$\left(1-\frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right) \in A$$

è l'unico punto critico di f in A.

ii) Le derivate seconde di f sono:

$$f_{xx} = \frac{1}{(x+y)^2}, \quad f_{yy} = 2\beta + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Dunque

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x+y)^2} & \frac{1}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{(x+y)^2} & 2\beta + \frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

iii) La traccia e il determinante di Hf sono:

$$\det Hf = \frac{1}{(x+y)^2}\left(2\beta + \frac{1}{(x+y)^2}\right) - \frac{1}{(x+y)^4} = \frac{2\beta}{(x+y)^2}$$

$$\operatorname{tr} Hf = 2\beta + \frac{2}{(x+y)^2}.$$

Osserviamo che

$$\beta \geq 0 \implies \left.\begin{matrix} \det Hf(x,y) \geq 0 \\ \mathrm{tr}\, Hf(x,y) \geq 0 \\ \forall (x,y) \in A \end{matrix}\right\} \implies \begin{matrix} Hf(x,y) \geq 0 \\ \forall (x,y) \in A. \end{matrix}$$

Quindi $\beta \geq 0 \implies f$ convessa su A.

Studiamo il caso $\beta < 0$. In questo caso

$$\det Hf(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in A.$$

Quindi gli autovalori di $Hf(x,y)$ hanno segno discorde. Dunque $Hf(x,y)$ non è né ≥ 0 né ≤ 0.

iv) Quando $\beta > 0$ f è convessa ed ha un unico punto critico $\left(1 - \frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right)$. Questo è un punto di minimo globale.

Quando $\beta = 0$ non ci sono punti critici.

Quando $\beta < 0$ il punto critico non è né un min. né un max locale, in quanto Hf in quel punto non è definita (non è né ≥ 0 né ≤ 0). Il punto critico sarà un punto sella (ovvero gli autovalori di $Hf(x,y)$ sono di segno opposto).

$\square$

Esercizio Si consideri l'insieme $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+y)^2\leq x-y\leq 1\}$.

i) Stabilire se K è chiuso.

ii) Stabilire se K è compatto.

Risoluzione. i) Abbiamo $K = K_1 \cap K_2$ dove

$$K_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+y)^2-(x-y)\leq 0\}$$
$$= f_1^{-1}(]-\infty,0]) \quad \text{con} \quad f_1(x,y)=(x+y)^2-(x-y)$$

$$K_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-y)\leq 1\}$$
$$= f_2^{-1}(]-\infty,1]) \quad \text{con} \quad f_2(x,y)=x-y.$$

Siccome $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono continue segue che K_1 e K_2 sono chiusi (in quanto antimmagini di chiusi). Quindi $K=K_1\cap K_2$ è chiuso essendo intersezione di chiusi.

ii) Proviamo che K è limitato. Se $(x,y)\in K$ allora:

$$(x+y)^2\leq x-y \qquad e \qquad x-y\leq 1.$$

Deduciamo che $(x+y)^2\leq 1$ ovvero $-1\leq x+y\leq 1$.
Incrociamo queste disuguaglianze con $0\leq x-y\leq 1$, ovvero $y\leq x\leq 1+y$. Si trova:

$$-1\leq x+y\leq 1+2y \implies y\geq -1$$

$$1\geq x+y\geq 2y \implies y\leq \frac{1}{2}$$

Quindi $y\in[-1,1/2]$. Ora dalla $y\leq x\leq 1+y$

deduciamo che $-1 \leq x \leq 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Quindi $x \in [-1, \frac{3}{2}]$.

Conclusione:

$$K \subset \left[-1, \frac{3}{2}\right] \times \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

è limitato.

Per il Teorema di Heine-Borel K è compatto (essendo $K \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato).

$\square$

<u>Esercizio</u> Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)^2}}{1+n^2x^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale;

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $(-\infty,1]$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $[1,\infty)$.

Risoluzione. i) Serie a termini positivi. Quando $x=2$ si ha
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+4n^2} \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) + 1 < \infty.$$

Quando $x \neq 2$ si ha
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)^2}}{1+n^2x^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-(x-2)^2}\right]^n = \frac{1}{1-e^{-(x-2)^2}} < \infty$$

Quindi la serie converge in ogni punto $x \in \mathbb{R}$.

ii) Se $x \in (-\infty,1]$ allora $|x-2|^2 \geq 1$ e quindi
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)^2}}{1+n^2x^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-1/e} < \infty$$

Per il criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $(-\infty,1]$.

iii) Se $x \in [1,\infty)$ allora si ha $1+n^2x^2 \geq 1+n^2$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)^2}}{1+n^2x^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \infty .$$

Di nuovo, per il Criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $[1,\infty)$.

In definitiva, c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

$\square$

Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 14/6/2016

Esercizio 1 Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri:

X

$$A = \int_1^2 \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}dt, \quad B = \int_2^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}dt, \quad C = \int_1^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}dt.$$

Risposta: $A)$ $\alpha \in$; $B)$ $\alpha \in$; $C)$ $\alpha \in$

Esercizio 2 Data una funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, sia ω la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \big(\varphi(y) - y\sin(xy)\big)dx + \big(1 - x\sin(xy)\big)dy.$$

i) Determinare φ in modo tale che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

ii) Per tale φ calcolare un potenziale $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ di ω.

iii) Calcolare l'integrale $I = \int_\gamma \omega$ lungo la curva γ di equazione polare $\varrho = \sin\vartheta$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$.

Risposte: i) $\varphi =$; ii) $f =$; iii) $I =$

X

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1+|x|)^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su ogni intervallo $[\delta, \infty)$ con $\delta > 0$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su qualche intervallo $[0, \delta]$ per un $\delta > 0$.

Risposte: i) CP: $x \in$; ii) CU su $[\delta, \infty)$: ; iii) CU su $[0, \delta]$:

Esercizio 4 Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2|y|^\alpha}{x^8 + |y|^3} & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

i) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $\alpha \in$

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: — Scritto del 14/6/2016

Esercizio 1 Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri:

$$A = \int_0^1 \frac{t\big(\log(1+t)\big)^\alpha}{(1+t)^2}dt, \quad B = \int_1^2 \frac{t\big(\log(1+t)\big)^\alpha}{(1+t)^2}dt, \quad C = \int_0^\infty \frac{t\big(\log(1+t)\big)^\alpha}{(1+t)^2}dt.$$

Risposta: $A)$ $\alpha \in$; $B)$ $\alpha \in$; $C)$ $\alpha \in$

Esercizio 2 Data una funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, sia ω la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \big(1 + y\cos(xy)\big)dx + \big(\varphi(x) + x\cos(xy)\big)dy.$$

i) Determinare φ in modo tale che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

ii) Per tale φ calcolare un potenziale $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ di ω.

iii) Calcolare l'integrale $I = \int_\gamma \omega$ lungo la curva γ di equazione polare $\varrho = \sin\vartheta$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$.

Risposte: i) $\varphi =$; ii) $f =$; iii) $I =$

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n+2}{n+1}\frac{x}{(1+2|x|)^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su ogni intervallo $[\delta, \infty)$ con $\delta > 0$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su qualche intervallo $[0, \delta]$ per un $\delta > 0$.

Risposte: i) CP: $x \in$; ii) CU su $[\delta, \infty)$: ; iii) CU su $[0, \delta]$:

Esercizio 4 Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

i) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $\alpha \in$

3 ore a disposizione

Esercizio Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}\,dt.$$

Soluzione. Bisogna discutere la convergenza sia in $t=1$ che in $t=\infty$.

Convergenza dell'integrale:

$$(*) \qquad \int_1^2 \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}\,dt = \int_0^1 \frac{s\,ds}{(s+1)^2(\log(1+s))^{\alpha+1}}$$

Ricordiamo che $\log(1+s) = s + o(s) = s\,(1+o(1))$ per $s \to 0$. La funzione integranda si confronta con:

$$\frac{s}{(s+1)^2[s(1+o(1))]^{\alpha+1}} = \frac{1}{s^\alpha(1+o(1))} \qquad s \to 0.$$

Siccome $\int_0^1 \frac{1}{s^\alpha}\,ds < \infty \iff \alpha < 1$, per il Criterio del Confronto Asintotico l'integrale $(*)$ converge se e solo se $\alpha < 1$.

Studiamo ora la convergenza dell'integrale

$$(**) \qquad \int_2^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}\,dt$$

La funzione $\frac{t-1}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{t}\right)$ è asintotica con $\frac{1}{t}$ per $t \to \infty$. Per Confronto Asintotico ci riconduciamo allo studio del seguente integrale: $(\alpha \neq 0)$

$$\int_2^\infty \frac{(\log t)^{-\alpha-1}}{t}\, dt = \left[\frac{(\log t)^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_{t=2}^{t=\infty} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha(\log 2)^\alpha} & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

Quando $\alpha = 0$ si trova $+\infty$.

Quindi

$$\int_2^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}\, dt < \infty \iff \alpha > 0.$$

La conclusione generale è questa:

$$\int_1^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}\, dt < \infty \iff 0 < \alpha < 1.$$

$\square$

Esercizio Sia $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $\phi(0)=0$. Si consideri la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \big(1+y\cos(xy)\big)\,dx + \big(\phi(x)+x\cos(xy)\big)\,dy .$$

(i) Determinare ϕ in modo tale che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

(ii) Per tale ϕ calcolare un potenziale di ω.

(iii) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ lungo la curva γ di equazione polare $\rho = \sin(\theta)$ con $\theta \in [0, \pi/2]$.

Soluzione (i) Siccome $\mathbb{R}^2$ è contraibile, ω è esatta in $\mathbb{R}^2$ se e solo se ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$ (Teorema di Poincaré). Imponiamo

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(1+y\cos(xy)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\phi(x)+x\cos(xy)\big)$$

ovvero:

$$\cos(xy)+xy\,(-\sin(xy)) = \phi'(x)+\cos(xy)+xy\,(-\sin(xy))$$

ovvero $\phi'(x)=0$ su $\mathbb{R}$ $\iff$ ϕ costante su $\mathbb{R}$

Siccome $\phi(0)=0$ deve essere $\phi(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

La forma è

$$\omega = \big(1+y\cos(xy)\big)\,dx + x\cos(xy)\,dy .$$

(ii) Cerchiamo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} f_x = 1+y\cos(xy) \\ f_y = x\cos(xy) \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Integriamo la seconda equazione nella variabile y:

$$f(x,y) = \int x \cos(xy)\, dy = x \int \cos(xy)\, dy$$

$$= \sin(xy) + C(x)$$

dove $C(x)$ è indipendente da y.

Deriviamo in x e inseriamo nella prima equazione:

$$y \cos(xy) + C'(x) = 1 + y \cos(xy)$$

ovvero $C'(x) = 1$. Dunque $C(x) = x + C_0$ con $C_0 \in \mathbb{R}$ costante.

Il potenziale di ω è $f(x,y) = \sin(xy) + x + C_0$ con $C_0 \in \mathbb{R}$ costante. Possiamo scegliere $C_0 = 0$.

(iii) La curva $\gamma(\theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ verifica $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(\pi/2) = (0,1)$.

Siccome ω è esatta con potenziale f si ha:

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0))$$

$$= f(0,1) - f(0,0)$$

$$= 0 - 0 = 0.$$

$\square$

Esercizio Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1+|x|)^n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Studiare la convergenza puntuale.

(ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Soluzione (i) Per $x=0$ la serie converge e la somma è 0. Proviamo che la serie converge assolutamente in ogni punto $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{|x|}{(1+|x|)^n} < \infty .$$

Per il criterio della Radice:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2} \frac{|x|}{(1+|x|)^n}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}}\right) \cdot \frac{1}{1+|x|} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{1+|x|} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Dunque $L < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Quindi c'è convergenza assoluta (e quindi semplice) in ogni punto.

(ii) Studiamo la convergenza uniforme. È sufficiente studiare il caso $x \geq 0$. Consideriamo la funzione

$$\phi_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}, \qquad x \geq 0.$$

La derivata è:

$$\phi_n'(x) = (1+x)^{-n} + x(-n)(1+x)^{-n-1}$$

$$= (1+x)^{-n-1}\left\{(1+x) - nx\right\}$$

Quindi $\phi_n'(x) \geq 0 \iff 1+x-nx \geq 0 \iff 1 \geq (n-1)x$

$$\iff x \leq \frac{1}{n-1} \qquad (\text{per } n \geq 2)$$

Di conseguenza $x = \frac{1}{n-1}$ è il p.to di max assoluto (per $n \geq 2$):

$$\phi_n(x) \leq \frac{1}{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 2$$

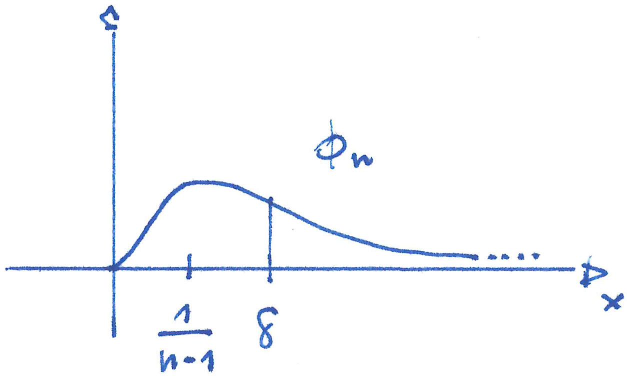
Tuttavia la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \infty$$

diverge perché il termine generale è asintotico con $\frac{1}{n}$, essendo $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = e \neq 0$.

Il criterio di Weierstrass <u>non</u> si applica con successo su tutto $[0,\infty)$.

Fissiamo $\delta > 0$. Per tutti gli n grandi il grafico di ϕ_n è questo:



Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \sup_{x \geq \delta} \frac{x}{(1+x)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{\delta}{(1+\delta)^n} < \infty .$$

Per il criterio di Weierstass c'è convergenza uniforme su ogni intervallo $[\delta, \infty)$ con $\delta > 0$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0, \infty)$. Infatti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1+x)^n} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x} \right)^n \overset{(x \neq 0)}{=}$$

$$= \frac{x}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}} = \frac{x}{2} \frac{x+1}{x+1-1} = \frac{x+1}{2}$$

e quindi $\lim_{x \to 0^+} f(x) \geq \frac{1}{2}$, mentre $f(0) = 0$.

Quindi la somma f <u>non</u> è continua in $x = 0$. Quindi non può esserci convergenza uniforme su $[0, \delta]$, altrimenti la somma dovrebbe essere continua. $\square$

Esercizio Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

(i) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua.

(ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Soluzione (i) Proviamo con il test delle rette. Sia $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$. Allora:

$$f(x,mx) = \frac{x\,|x|^\alpha |m|^\alpha}{x^4 + |x|^3 |m|^3} = \frac{x\,|x|^\alpha}{|x|^3} \; \frac{|m|^\alpha}{|x| + |m|^3}$$

Vediamo che per $\alpha + 1 \leq 3 \iff \alpha \leq 2$ il limite

$$\lim_{x \to 0} f(x,mx)$$

o non esiste oppure non è zero. Dunque:

$$\alpha \leq 2 \implies f \text{ \underline{non} è continua in } 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Consideriamo ora il caso $\alpha > 2$.

Stime:

$$\left| \frac{x\,|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} \right| = \frac{|x|\,|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} \leq \frac{(x^4 + |y|^3)^{\frac{1}{4}} (x^4 + |y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{x^4 + |y|^3} =$$

$$= (x^4 + |y|^3)^{\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} - 1}$$

Imponiamo

$$\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} - 1 > 0 \iff \frac{\alpha}{3} > \frac{3}{4} \iff \alpha > \frac{9}{4}$$

Deduciamo che:

$$\alpha > \frac{9}{4} \implies f \text{ è continua in } 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Rimane da esaminare il caso $2 < \alpha \leq 9/4$.

Consideriamo la curva $\gamma(t) = (t, t^{4/3})$.

Si ha (per $t>0$)

$$f(\gamma(t)) = \frac{t\, t^{\frac{4}{3}\alpha}}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}\, t^{1+\frac{4}{3}\alpha - 4}.$$

Imponiamo

$$1 + \frac{4}{3}\alpha - 4 \leq 0 \iff \frac{4}{3}\alpha \leq 3 \iff \alpha \leq \frac{9}{4}$$

Per questi α si ha

$$\lim_{t \to 0^+} f(\gamma(t)) \neq 0$$

e quindi f non è continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Conclusione:

$$f \text{ cont. in } 0 \iff \alpha > \frac{9}{4}.$$

(ii) Le derivate parziali di f in $0 \in \mathbb{R}^2$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Quindi f è differenziabile in 0 se e solo se

$$\circledast \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|^\alpha}{(x^4 + |y|^3)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Lungo la curva $r(t) = (t, t^{4/3})$ si trova

$$\frac{t\, t^{\frac{4}{3}\alpha}}{(t^4+t^4)\sqrt{t^2+t^{8/3}}} = t^{1+\frac{4}{3}\alpha-4-1} \frac{1}{\sqrt{1+t^{2/3}}}$$

Deduciamo che per $\frac{4}{3}\alpha - 4 \leq 0 \iff \alpha \leq 3$ il limite in ⊛ non può essere zero. Dunque

$$\alpha \leq 3 \Rightarrow f \text{ \underline{non} è differenziabile in } 0.$$

Studiamo il caso $\alpha > 3$. Stime:

$$\left|\frac{x\,|y|^\alpha}{(x^4+|y|^3)\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|y|^\alpha}{(x^4+|y|^3)} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{(x^4+|y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{(x^4+|y|^3)} \cdot 1 :$$

$$= (x^4+|y|^3)^{\frac{\alpha}{3}-1}$$

Per confronto deduciamo che per $\frac{\alpha}{3} - 1 > 0$ si ha la validità del limite ⊛.

Conclusione:

$$f \text{ è differenziabile in } 0 \iff \alpha > 3.$$

$\square$

VARIANTI

① $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t\,(\log(1+t))^{\alpha}}{(1+t)^2}\,dt$ Risp $-2 < \alpha < -1$

② $\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{x}{1+2|x|}\right)^n$ Risp. Stesse

③ $\boxed{2}$ $\omega = (\phi(y) - y \sin(xy))dx + (1 - x\sin(xy))\,dy$

$\rho = \sin\theta$

Risp (i) $\phi = 0$ (ii) $f = y + \cos(xy)$ (iii) $I = 1$

④ $\boxed{4}$ $f(x,y) = \dfrac{x^2 |y|^{\alpha}}{x^8 + |y|^3}$

Risp (i) $\alpha > 9/4$ (ii) $\alpha > \dfrac{21}{8}$