Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 24/1/2019 – Canale 1

Esercizio 1 Si consideri la curva nel piano $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t^3 - t^5, 1 - t^2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

i) (1pt) Stabilire se $\gamma >$ é iniettiva.

ii) (2pt) Nei punti regolari calcolare il campo tangente unitario $T = T(t)$.

iii) (3pt) Calcolare i limiti

$$T(0^\pm) = \lim_{t\to 0^\pm} T(t), \qquad T(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty} T(t).$$

iv) (4pt) Disegnare il supporto della curva, con precisione intorno al punto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) γ iniettiva si/no; ; ii) $T(t) =$; iii) $T(0^\pm) =$; $T(\pm\infty) =$ iv) Disegno:

Esercizio 2 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} - x^{2n+2}}{1 + x^{4n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) (4pt) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) (6pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = e^{-(x+y)} + \alpha xy$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) (6pt) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare l'insieme $A_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ dove f è convessa.

ii) (4pt) Per $\alpha \geq 0$, stabilire se f ha punti critici e dire se sono punti di min/max locale/assoluto.

Risposte: i) $A_\alpha =$; ii) punti critici: ; min/max:

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3 - t^5, 1 - t^2)$ con $t \in \mathbb{R}$.

1) Stabilire se γ è iniettiva.

2) Nei punti regolari calcolare il vettore tangente unitario $T(t)$

3) Calcolare i limiti $T(0^\pm) = \lim_{t \to 0^\pm} T(t)$ e $T(\pm\infty) = \lim_{t \to \pm\infty} T(t)$

4) Disegnare il supporto di γ.

Risoluzione 1) Abbiamo $\gamma(t) = (t^3(1-t^2), 1-t^2)$ e quindi $\gamma(\pm 1) = (0,0)$. γ non è iniettiva.

2) Derivata: $\dot\gamma(t) = (3t^2 - 5t^4, -2t)$ e quindi $\dot\gamma(t) = (0,0) \iff t = 0$. Il punto $t=0$ non è regolare. Per $t \neq 0$:

$$T(t) = \frac{(3t^2 - 5t^4, -2t)}{\sqrt{(3t^2-5t^4)^2 + 4t^2}} = \frac{t}{|t|} \frac{(3t - 5t^3, -2)}{\sqrt{t^2(3-5t^2)^2 + 4}}$$

3) Limiti

$$T(0^\pm) = \lim_{t \to 0^\pm} \frac{t}{|t|} \frac{(3t - 5t^3, -2)}{\sqrt{t^2(3-5t^2)^2+4}} = \pm(0,-1)$$

$$= (0, \mp 1)$$

$$T(\pm\infty) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{\cancel{t^4}\left(\frac{3}{t^2} - 5, \frac{-2}{t^3}\right)}{\cancel{t^4}\sqrt{\left(\frac{3}{t^2}-5\right)^2 + \frac{4}{t^6}}} = (-1, 0)$$

4) Poniamo $y = 1 - t^2 \iff t^2 = 1 - y$

e quindi $1 - y \geq 0$ ovvero $y \leq 1$. Ci sono due soluzione $t = \pm\sqrt{1-y}$.

Studio il caso $t = \sqrt{1-y}$:

$$r(t) = \left(t^3 (1-t^2), 1-t^2 \right) = \left((1-y)^{\frac{3}{2}} \cdot y, y \right)$$

Studio il grafico di $f(y) = (1-y)^{\frac{3}{2}} y$, $y \leq 1$.

Derivata:

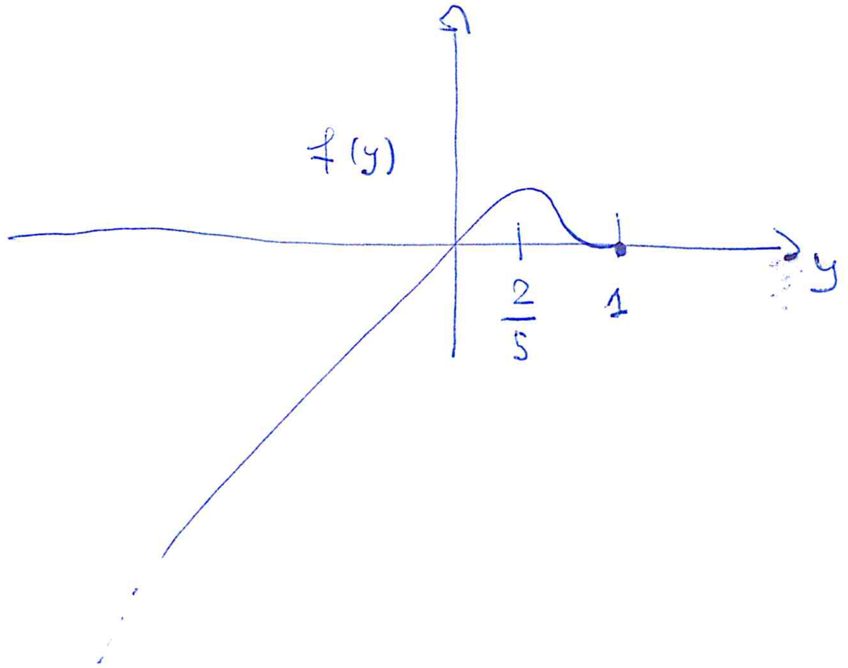
$$f'(y) = (1-y)^{\frac{3}{2}} + y \frac{3}{2} (1-y)^{\frac{1}{2}} (-1)$$

$$= (1-y)^{\frac{1}{2}} \left[1 - y - \frac{3}{2} y \right]$$

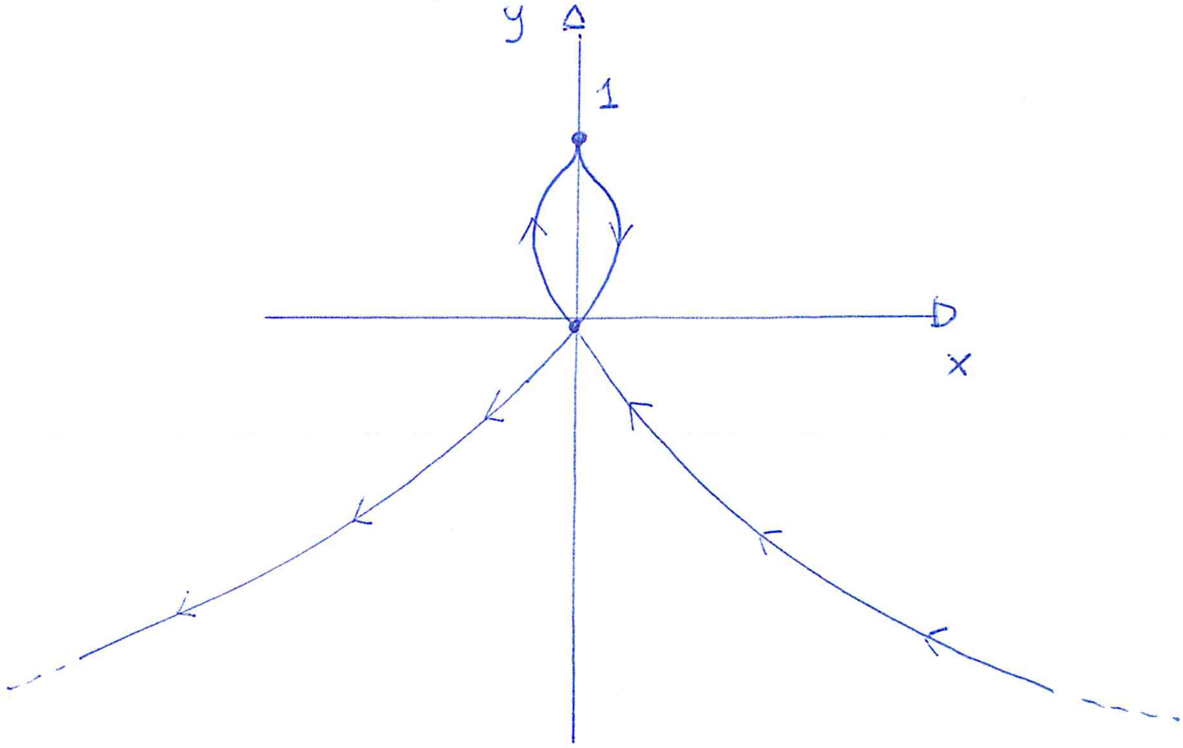
$$= (1-y)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{5}{2} y \right)$$

Dunque in $y = 1$ e $y = \frac{2}{5}$ si ha $f' = 0$.

Grafico approssimativo



Dunque il supporto di γ è fatto così:



$\square$

ESERCIZIO Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} - x^{2n+2}}{1 + x^{4n}} , \quad x \in \mathbb{R} .$$

1) Studiare la convergenza puntuale.

2) Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione, 1) Per $x^2 = 1$ la somma è 0 in quanto $x^{2n} - x^{2n+2} = x^{2n}(1-x^2)$.

Per $x^2 < 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^{2n}(1-x^2)}{1+x^{4n}} \right| \leq (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1-x^2}{1-x^2} = 1 ,$$

Quindi la serie converge assolutamente e semplicemente.

Per $x^2 > 1$ si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^{2n}(1-x^2)}{1+x^{4n}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(1+x^2)}{x^{4n}} =$$

$$= (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} = (1+x^2) \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{x^2(1+x^2)}{x^2 - 1} < \infty$$

Conclusione: c'è conv. puntuale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2) Studiamo la convergenza uniforme.

Riprendiamo i conti precedenti.

Sia $0 < \delta < 1$. Allora

$$\sup_{x^2 \leq \delta} \left| \frac{x^{2n}(1-x^2)}{1+x^{4n}} \right| \leq \sup_{x^2 \leq \delta} |x^{2n}| = \delta^n$$

e $\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n < \infty$. Per il Criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente per $x^2 \leq \delta$.

Sia ora $M > 1$. Allora

$$\sup_{x^2 \geqslant M} \left| \frac{x^{2n}(1+x^2)}{1+x^{4n}} \right| \leq \sup_{x^2 \geqslant M} \frac{1+x^2}{x^{2n}} \leq$$

$$\leq \sup_{x^2 \geqslant M} \frac{2x^2}{x^{2n}} = 2 \, \frac{1}{M^{n-1}}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^{n-1}} < \infty$ essendo $M > 1$. Per il Criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente per $x^2 \geqslant M > 1$.

Ora dimostriamo che non c'è convergenza uniforme su tutto l'intervallo $x \in [0,1]$.
Il problema è quando $x^2 = 1$.

Abbiamo

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(1-x^2)}{1+x^{4n}} \overset{x^2 \leq 1}{\geq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(1-x^2)}{2} \overset{x^2<1}{=} \frac{1}{2}$$

Dunque $f(x) \geq \frac{1}{2}$ per $x^2 < 1$ mentre $f(x) = 0$ se $x^2 = 1$. Quindi f è discontinua nei punti $x = \pm 1$. Quindi la serie non può convergere uniformemente intorno questi punti.

$\square$

ESERCIZIO Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} + \alpha xy$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare l'insieme $A_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ su cui f è convessa.

2) Stabilire se, per $\alpha \geq 0$ f possiede punti critici, pti di minimo (o massimo) locale o assoluto.

Risoluzione: 1) Gradiente di f

$$\nabla f(x,y) = \left(-e^{-(x+y)} + \alpha y, -e^{-(x+y)} + \alpha x\right)$$

Matrice Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-(x+y)} & e^{-(x+y)} + \alpha \\ e^{-(x+y)} + \alpha & e^{-(x+y)} \end{pmatrix}$$

Traccia:

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = 2e^{-(x+y)} > 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^2.$$

Determinante

$$\det Hf(x,y) = -\left(\alpha^2 + 2\alpha e^{-(x+y)}\right)$$

La funzione f è convessa precisamente sull'insieme dove $Hf(x,y) \geq 0$, ovvero dove $\det Hf(x,y) \geq 0$ (perché $tr > 0$).

Dobbiamo studiare

$$⊛ \qquad -\left(\alpha^2 + 2\alpha e^{-(x+y)}\right) \geq 0 .$$

Se $\alpha = 0$ è verificata per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Per $\alpha > 0$ si ha $-\alpha^2 - 2\alpha e^{-(x+y)} < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Quindi $A_\alpha = \emptyset$ per $\alpha > 0$.

Per $\alpha < 0$, la ⊛ equivale a

$$\alpha + 2 e^{-(x+y)} \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{-(x+y)} \geq -\frac{\alpha}{2} \qquad (\leftarrow \text{positivo})$$

$$\Updownarrow$$

$$-(x+y) \geq \log\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$x+y \leq \log\left(-\frac{2}{\alpha}\right)$$

Conclusione:

$$A_\alpha = \begin{cases} \emptyset & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ \mathbb{R}^2 & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ \{x+y \le \log(-\frac{2}{\alpha})\} & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

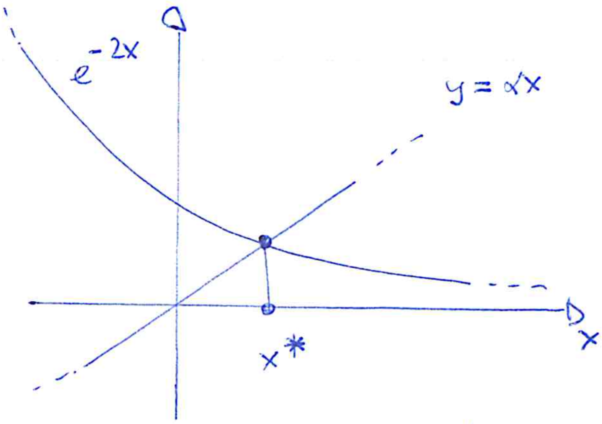
2) I punti critici di f sono dati da

$$\begin{cases} -e^{-(x+y)} + \alpha y = 0 \\ -e^{-(x+y)} + \alpha x = 0 \end{cases}$$

Quando $\alpha = 0$ non ci sono soluzioni

Quando $\alpha > 0$ si deduce che $x = y$

e quindi deve essere $\alpha x = e^{-2x}$



Per via grafica si vede che c'è un'unica soluzione. Quindi f ha un unico punto critico (per $\alpha > 0$). Non può essere un max\min locale assoluto perché $\det Hf < 0$ su $\mathbb{R}^2$ quando $\alpha > 0$.

$\square$

Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 18/9/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = e^x + e^y - (x + y) + (x + y)^2.$$

i) (5pt) Calcolare tutti i punti critici di f.

ii) (4pt) Stabilire se f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) (1pt) Stabilire se i punti critici trovati sono punti di min/max locale/assoluto.

Risposte: i) punti critici:	ii) f convessa si/no: ;
iii) estremi di f:	

Esercizio 2 Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1 + e^{nx}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) (4pt) Calcolare i limiti puntuali

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

ii) (3pt) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) (3pt) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Risposte: i) $f(x) =$	$g(x) =$;
ii) f_n CU per $x \in$	; iii) f_n' CU per $x \in$

Esercizio 3 Sul quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \arcsin(y)dx + ydy,$$

e sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ la circonferenza unitaria.

i) (2pt) Tracciare il grafico della funzione $t \mapsto \arcsin(\sin t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

ii) (8pt) Calcolare l'integrale di ω lungo γ.

Risposte: i) grafico:	; ii) $\int_\gamma \omega =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 18/9/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = e^x + e^y - (x + y) + (x + y)^2.$$

i) (5pt) Calcolare tutti i punti critici di f.

ii) (4pt) Stabilire se f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) (1pt) Stabilire se i punti critici trovati sono punti di min/max locale/assoluto.

Risposte: i) punti critici:	ii) f convessa si/no: ;
iii) estremi di f:	

Esercizio 2 Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log(1 + e^{nx}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) (4pt) Calcolare i limiti puntuali

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

ii) (3pt) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) (3pt) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Risposte: i) $f(x) =$	$g(x) =$;
ii) f_n CU per $x \in$	; iii) f_n' CU per $x \in$

Esercizio 3 Sul quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \arcsin(y)dx + y^2 dy,$$

e sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ la circonferenza unitaria.

i) (2pt) Tracciare il grafico della funzione $t \mapsto \arcsin(\sin t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

ii) (8pt) Calcolare l'integrale di ω lungo γ.

Risposte: i) grafico:	; ii) $\int_\gamma \omega =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = e^x + e^y - (x+y) + (x+y)^2.$$

1) Calcolare tutti i punti critici di f;

2) Stabilire se f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$

3) Stabilire se i punti critici trovati sono di max/min locale/assoluto.

Risoluzione. 1) Il gradiente di f è composto dalle derivate parziali

$$f_x = e^x - 1 + 2(x+y),$$

$$f_y = e^y - 1 + 2(x+y).$$

Risolviamo il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$. Sottraendo le due equazioni si trova $e^x = e^y$ che implica $x = y$. Sostituendo nella prima equazione si trova

$$\phi(x) = e^x - 1 + 4x = 0.$$

Osserviamo che $\phi'(x) = e^x + 4 > 0$ ovvero ϕ è strettamente crescente. Inoltre $\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \infty} \phi(x) = +\infty$. Quindi per il teorema degli zeri $\phi(x) = 0$ ha una soluzione, che è unica. Questa soluzione è $x = 0$. Dunque $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ è l'unico punto critico di f.

2) Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx} = e^x + 2 \qquad f_{yy} = e^y + 2 \qquad f_{xy} = 2$$

Dunque traccia e determinante della matrice Hessiana sono:

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = f_{xx} + f_{yy} = e^x + e^y + 4 > 0$$

$$\det Hf(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (e^x+2)(e^y+2) - 4$$

$$= e^{x+y} + 2e^x + 2e^y > 0.$$

Dunque

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tr} Hf > 0 \\ \det Hf > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Hf > 0 \text{ su tutto } \mathbb{R}^2.$$

Quindi f è convessa su $\mathbb{R}^2$.

3) Siccome f è convessa, l'unico punto critico trovato è un punto di minimo assoluto stretto.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1+e^{nx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare i limiti puntuali

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) \qquad \text{dove esistono.}$$

2.) Studiare la convergenza uniforme delle successioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Risoluzione. 1) Per $x \leq 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(1+e^{nx}) = 0$$

Per $x > 0$ si trova invece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(1+e^{nx}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(e^{nx}\left(1+\frac{1}{e^{nx}}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\underbrace{\frac{1}{n}\log e^{nx}}_{\equiv\, x} + \underbrace{\frac{1}{n}\log(1+e^{-nx})}_{\downarrow\, 0}\right\} = x$$

Dunque $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Si ha
$$f_n'(x) = \frac{1}{n}\,\frac{n e^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$$

Se $x=0$ vediamo che $f_n'(0) = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dunque
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \frac{1}{2}.$$

Per $x>0$ si ha $e^{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, Dunque
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 1 \quad \text{se} \quad x>0.$$

Se infine $x<0$ si ha $e^{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e dunque
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0 \quad \text{se} \quad x<0.$$

In conclusione
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 1/2 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x<0. \end{cases}$$

2) Studiamo la convergenza uniforme di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Caso $x \geq 0$:
$$\phi_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n}\log(1+e^{nx}) - x \geq 0 \quad \text{per } x \geq 0$$
$$\phi_n'(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} - 1 = \frac{-1}{1+e^{nx}} < 0 \implies \phi_n \text{ decresce}$$

Di conseguenza

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 0} f_n(x) - f(x) = \underbrace{f_n(0) - f(0)}_{\downarrow\, n\to\infty \atop 0}.$$

c'è CU su $[0,\infty)$

Caso $x \leq 0$:

$$\phi_n(x) = f_n(x) - f(x) = f_n(x) - 0 = f_n(x) \geq 0$$

$$\phi'_n(x) = f_n'(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} \geq 0 \implies \phi_n \text{ cresce}$$

Quindi

$$\sup_{x\leq 0} |f_n(x) - f(x)| = f_n(0) - \underset{\substack{\| \\ 0}}{f(0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

c'è CU su $[-\infty, 0)$.

Rimane da studiare la CU di $f_n'(x) = \dfrac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Certamente non c'è CU in un intorno di $x=0$ perché la g non è continua in $x=0$.

Calcoliamo

$$f_n''(x) = \frac{ne^{nx}(1+e^{nx}) - e^{nx}\,ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} = \frac{ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} > 0$$

Dato $\delta > 0$ si ha dunque

$$\sup_{x\geq\delta} |f_n'(x) - 1| = \sup_{x\geq\delta}\left(1 - \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}\right) = 1 - \frac{e^{n\delta}}{1+e^{n\delta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Quindi c'è CU su $[\delta, \infty)$.

Poi:

$$\sup_{x \leq -\delta} |f_n'(x) - 0| = \sup_{x \leq -\delta} \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{e^{-n\delta}}{1+e^{-n\delta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Quindi c'è CU su $(-\infty, -\delta]$.

Risposta: (f_n') converge uniformemente su $|x| \geq \delta$ per ogni $\delta > 0$. Ma non su tutto $\mathbb{R}$.

$\square$

ESERCIZIO Su $[-1,1]\times[-1,1]$ si consideri la forma differenziale

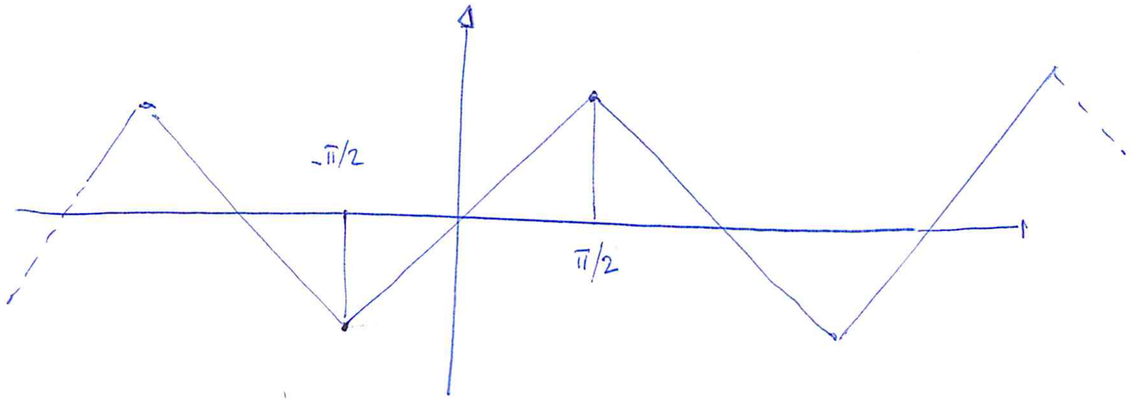
$$\omega = \arcsin(y)\,dx + y\,dy$$

e sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

i) Tracciare il grafico di $t \mapsto \arcsin(\sin t)$ per $t \in \mathbb{R}$.

ii) Calcolare $\int_\gamma \omega$.

Risoluzione i) Per $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha $\arcsin(\sin t) = t$.
Nei punti $\frac{\pi}{2} - t$ e $\frac{\pi}{2} + t$ il sin assume lo stesso valore.
Quindi per $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ si trova il grafico



E poi è 2π-periodica.

ii) Intanto osserviamo che $y\,dy$ è esatta (potenziale $\frac{y^2}{2}$)
Quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \arcsin(y)\,dx \quad \text{perché } \gamma \text{ è chiusa.}$$

Abbiamo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ e $\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$.
Quindi

$$\int_\gamma \arcsin(y)\,dx = \int_0^{2\pi} \arcsin(\sin t)\,(-\sin t)\,dt$$

La funzione $t \mapsto \sin t \arcsin t$ è π-periodica.
Lo si capisce dal grafico al punto i).

Dunque

$$\int_0^{2\pi} \arcsin(\sin t)\sin t\, dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \arcsin(t)\sin t\, dt =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\sin t\, dt \overset{\text{per parti}}{=} 2\left\{\Big[-t\cos t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt\right\}$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt = 2\Big[\sin t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4$$

Dunque

$$\int_\gamma \omega = -4$$

$\square$

Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 28/8/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \alpha xy - \log(x + y),$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) (4pt) Al variare di α, calcolare tutti i punti critici di f in A.

ii) (4pt) Calcolare tutti i valori di α tali che f sia convessa su A.

iii) (3pt) Al variare di α, stabilire se i punti critici sono punti di min/max locale/assoluto.

Risposte: i) punti critici:	ii) f conv. per $\alpha \in$;
iii) estremi di f:	

Esercizio 2 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\sqrt[3]{n}|x|}}{x^2 n^2 + n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) (2pt) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) (2pt) Provare che $1 - e^{-t} \leq t$ per ogni $t \geq 0$.

iii) (6pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$	; iii) CU per $x \in$

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \qquad \text{se} \qquad x^2 + y^2 \neq 0,$$

ed $f(0, 0) = 0$. Consideriamo l'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq 2\}$.

i) (4pt) Stabilire se K è chiuso.

ii) (5pt) Stabilire se K è compatto.

iii) (2pt) Stabilire se K è convesso.

Risposte: i) K chiuso:	; ii) K compatto:	; iii) K convesso:

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Si consideri l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0\}$ e la funzione $f: A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2+y^2+\alpha xy - \log(x+y)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di f in A;

2) Calcolare tutti i valori di α tali che f ~~f~~ sia convessa su tutto A;

3) Al variare di α, stabilire se i punti critici trovati sono punti di min/max locale/assoluto.

Risoluzione. 1) Le derivate parziali di f sono:

$$f_x = 2x+\alpha y - \frac{1}{x+y},$$

$$f_y = 2y+\alpha x - \frac{1}{x+y}.$$

Risolviamo il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$. Sottraendo le due equazioni troviamo

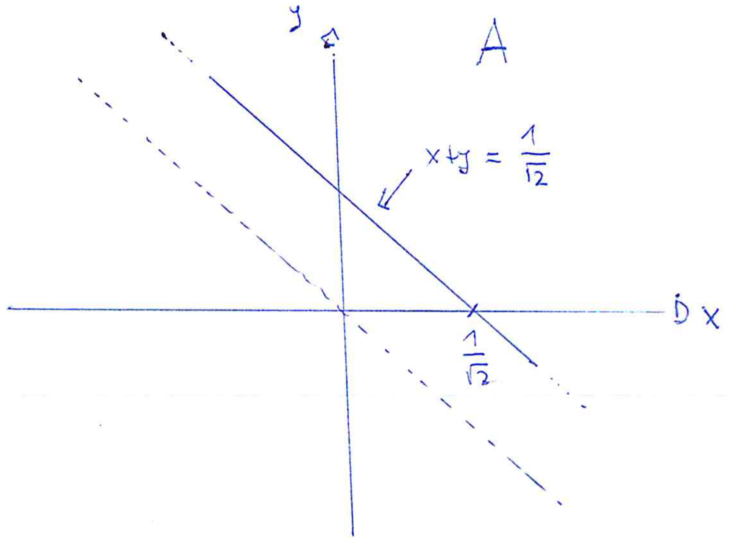
$$0 = f_x - f_y = 2(x-y) + \alpha(y-x) = (x-y)(2-\alpha)$$

Se $\alpha = 2$ questa equazione è vuota. Se $\alpha \neq 2$ si trova $x = y$.

Caso $\alpha = 2$. L'equazione $f_x = 0$ diventa

$$2(x+y) - \frac{1}{x+y} = 0 \iff (x+y)^2 = \frac{1}{2}$$

e quindi $x+y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (infatti $x+y>0$ e si sceglie + nella radice). Abbiamo una retta di punti critici:



Caso $\alpha \neq 2$. In questo caso $x=y$ e l'equazione $f_x = 0$ diventa

$$(2+\alpha)x - \frac{1}{2x} = 0 \quad \overset{(\alpha+2\neq 0)}{\Longleftrightarrow} \quad x^2 = \frac{1}{2(2+\alpha)}$$

Se $2+\alpha \leq 0$ non ci sono soluzioni. Se $2+\alpha > 0$ si trova l'unico punto critico

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}\right)$$

2) Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx} = 2 + \frac{1}{(x+y)^2}, \qquad f_{yy} = 2 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \alpha + \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Vediamo subito che la traccia della matrice Hessiana è positiva:

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = f_{xx} + f_{yy} = 4 + \frac{2}{(x+y)^2} > 0 .$$

Calcoliamo il determinante:

$$\det Hf(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$= \left(2 + \frac{1}{(x+y)^2}\right)^2 - \left(\alpha + \frac{1}{(x+y)^2}\right)^2$$

$$= \left(2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2}\right)\left(2-\alpha\right)$$

Sappiamo che f è convessa su A se e solo se $Hf \geq 0$ su A, ovvero se e solo se

$$\begin{cases} \operatorname{tr} Hf \geq 0 \text{ su } A \leftarrow \text{sempre verificato} \\ \det Hf \geq 0 \text{ su } A . \end{cases}$$

Vogliamo vedere per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si verifica

$$(2-\alpha)\left(2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2}\right) \geq 0 \quad \text{su tutto } A.$$

Osserviamo che se $2+\alpha < 0$ allora la quantità

$$2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2} \quad \text{cambia di segno su } A.$$

Quindi f non può essere convessa su A a meno che $2-\alpha = 0$ (nel qual caso $\det Hf \equiv 0$ su A).

Se invece $2+\alpha \geq 0$ allora $2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2} > 0$ su tutto A.

In questo caso:

$$\det Hf \geq 0 \text{ su } A \iff 2-\alpha \geq 0.$$

Concludiamo che:

$$f \text{ è convessa su tutto } A \iff -2 \leq \alpha \leq 2.$$

3) Quando $\alpha = 2$ c'è una retta di punti critici ed f è convessa in A. Quindi sono tutti punti di minimo assoluto.

Quando $\alpha > -2$ ed $\alpha \neq 2$ c'è un unico punto critico.

Se è anche $\alpha < 2$ allora f è convessa su tutto A e quindi questo punto critico è un punto (unico) di minimo assoluto stretto.

Rimane da studiare la natura del punto critico P quando $\alpha > 2$.

Nel punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}\right)$ si ha:

$$\det Hf(P) = \underbrace{(2-\alpha)}_{<0} \underbrace{\left(2+\alpha + \frac{2}{\left(2\frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}\right)^2}\right)}_{>0} < 0$$

Quindi P è un punto di sella.

□

Esercizio Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-\sqrt[3]{n}|x|}}{x^2n^2+n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Discutere la convergenza puntuale della serie.

2) Provare che $1-e^{-t} \leq t$ per ogni $t \geq 0$.

3) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risoluzione. 1) per $x=0$ il termine generale della serie è identicamente nullo e la somma della serie è 0.

Per $x \neq 0$ si ha la seguente stima:

$$0 < \frac{1-e^{-\sqrt[3]{n}x}}{x^2n^2+n} \leq \frac{1}{x^2n^2}$$

e poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ la serie data converge per confronto

2) Sia $\phi(t) = t + e^{-t} - 1$. Chiaramente $\phi(0) = 0$ e inoltre $\phi'(t) = 1 - e^{-t} \geq 0$ per $t \geq 0$. Dunque ϕ cresce per $t \geq 0$ e quindi $\phi(t) \geq \phi(0) = 0$ per $t \geq 0$.

3) Usando il punto precedente si trova

$$\frac{1-e^{-\sqrt[3]{n}|x|}}{x^2n^2+n} \leq \frac{\sqrt[3]{n}|x|}{x^2n^2+n} := f_n(x).$$

Studiamo le funzioni $f_n(x)$. Per simmetria pari basta guardare il caso $x \geq 0$.

La derivata di $f_n(x)$ è $f_n'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{n}\,(x^2n^2+n) - \sqrt[3]{n}\,x\cdot 2xn^2}{(x^2n^2+n)^2} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{n}\,(n - x^2n^2)}{(x^2n^2+n)^2} = \frac{n^{4/3}\,(1-nx^2)}{(x^2n^2+n)^2}.$$

Dunque $f_n' \geq 0 \iff 1-nx^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \frac{1}{n}$

Deduciamo che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt[3]{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{n}\cdot n^2+n\right)} =$$

$$= \frac{1}{2n\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2\,n^{7/6}}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}} < \infty$, per il criterio di Weierstrass la serie data converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

$\square$

<u>Esercizio</u> Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

e sia $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 2\}$.

1) Dire se K è chiuso.

2) Stabilire se K è compatto.

3) Stabilire se K è convesso.

Risoluzione. 1) Proviamo che f è continua in 0 (e quindi su tutto $\mathbb{R}^2$):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 0$$

indipendentemente da θ in quanto $\cos^4\theta + \sin^4\theta \leq 1$.

Dunque $K = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, 2]}_{\text{chiuso di } \mathbb{R}}) =$ chiuso in quanto anti-immagine di un chiuso con f continua.

2) Per il teorema di Heine-Borel basta vedere se K è limitato. Si ha $(x,y) \in K$ se e solo se

$$x^4+y^4 \leq 2x^2+2y^2 \iff x^4-2x^2+y^4-2y^2 \leq 0$$

$$\iff (x^2-1)^2+(y^2-1)^2 \leq 2$$

L'ultima disequazione implica che:

$$(x^2-1)^2 \leq 2 \iff |x^2-1| \leq \sqrt{2} \implies x^2 \leq 1+\sqrt{2}$$

$$(y^2-1)^2 \leq 2 \quad \dots \implies y^2 \leq 1+\sqrt{2}$$

e dunque $K \subset \left[-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right] \times \left[-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$.

Dunque K è compatto.

3). Mostriamo che K non è convesso. Scegliamo $x=1$ e risolviamo l'equazione $f(1,y)=2$ ovvero

$$1+y^4 = 2(1+y^2) \iff y^4-2y^2-1=0$$

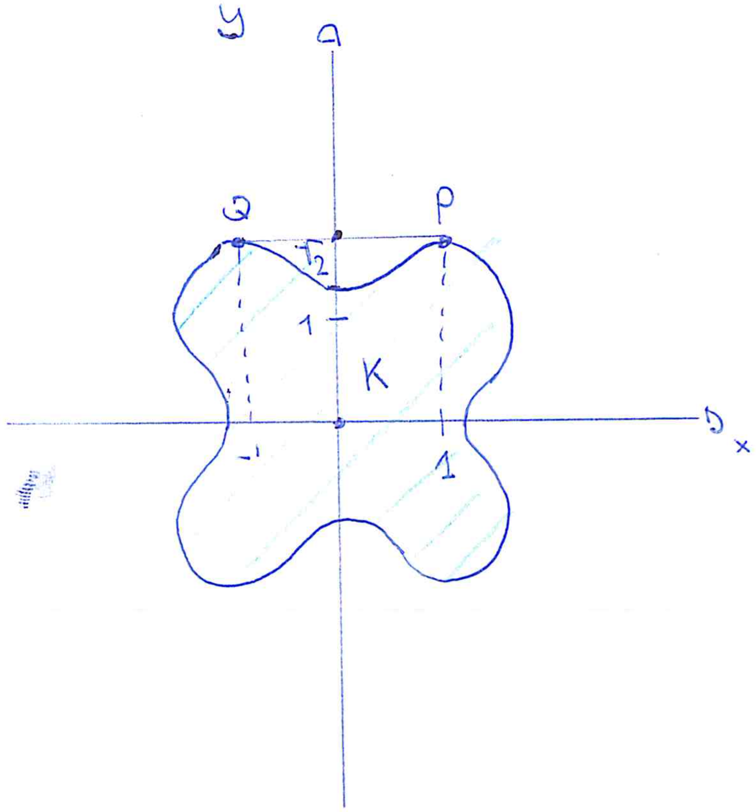
$$\iff y^2 = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$\iff y^2 = 1+\sqrt{2}$$

Quindi i punti $P=(1,\sqrt{1+\sqrt{2}})$ e $\cancel{Q=(1,-\sqrt{1+\sqrt{2}})}$ $Q=(-1,\sqrt{1+\sqrt{2}})$ appartengono a K. Il punto medio

$$M = \frac{P+Q}{2} = (0,\sqrt{1+\sqrt{2}})$$

tuttavia non appartiene a K.



Infatti con $x = 0$ ed $y = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ si trova

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = y^2 = 1 + \sqrt{2} > 2$$

Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 9/7/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Dato il parametro $\beta \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^\beta.$$

i) (2pt) Calcolare le derivate parziali seconde di f.

ii) (3pt) Calcolare traccia e determinante della matrice Hessiana di f.

iii) (3pt) Calcolare tutti i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

Risposte: ii) $\mathrm{tr}(Hf) =$	$\det(Hf) =$;
iii) f convessa su $\mathbb{R}^2$ per $\beta \in$	

Esercizio 2 Sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4 + y^4}dx - \frac{yx^2}{x^4 + y^4}dy.$$

i) (3pt) Verificare che ω è chiusa in A.

ii) (3pt) Verificare che ω è esatta in A calcolandone un potenziale f.

iii) (2pt) Provare che il potenziale trovato verifica effettivamente $f \in C^1(A)$.

Risposte: ii) $f =$	(scrivere una formula completa)

Esercizio 3 (8pt) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^{\alpha x} + e^{(\alpha+1)x}} dx.$$

Risposte: Integrale converge per $\alpha \in$

Esercizio 4 Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 + e^{nx}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

i) (3pt) Calcolare il limite puntuale della successione $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

ii) (5pt) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Risposte: i) $f(x) =$	; ii) CU per $x \in$

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 9/7/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{\alpha/2}.$$

i) (2pt) Calcolare le derivate parziali seconde di f.

ii) (3pt) Calcolare traccia e determinante della matrice Hessiana di f.

iii) (3pt) Calcolare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

Risposte: ii) $\mathrm{tr}(Hf) =$ $\det(Hf) =$;   iii) f convessa su $\mathbb{R}^2$ per $\alpha \in$

Esercizio 2 Sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = -\frac{xy^2}{x^4 + y^4}dx + \frac{yx^2}{x^4 + y^4}dy.$$

i) (3pt) Verificare che ω è chiusa in A.

ii) (3pt) Verificare che ω è esatta in A calcolandone un potenziale f.

iii) (2pt) Provare che il potenziale trovato verifica effettivamente $f \in C^1(A)$.

Risposte: ii) $f =$ (scrivere una formula completa)

Esercizio 3 (8pt) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{\beta x} + \mathrm{e}^{(\beta+1)x}}dx.$$

Risposte: Integrale converge per $\beta \in$

Esercizio 4 Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 + \mathrm{e}^{-nx}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

i) (3pt) Calcolare il limite puntuale della successione $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

ii) (5pt) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Risposte: i) $f(x) =$; ii) CU per $x \in$

3 ore a disposizione

<u>ESERCIZIO</u> Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (1+x^2+y^2)^{\alpha}.$$

(i) Calcolare le derivate parziali seconde di f

(ii) Calcolare traccia e determinante della matrice Hessiana di f

(iii) Calcolare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione. (i) Derivate parziali prime:

$$f_x = \alpha (1+x^2+y^2)^{\alpha-1} \cdot 2x$$

$$f_y = \alpha (1+x^2+y^2)^{\alpha-1} \cdot 2y$$

Derivate seconde:

$$f_{xx} = \alpha(\alpha-1)\left(1+x^2+y^2\right)^{\alpha-2} 4x^2 + 2\alpha (1+x^2+y^2)^{\alpha-1}$$

$$= (1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[4\alpha(\alpha-1)x^2 + 2\alpha(1+x^2+y^2)\right]$$

$$= 2\alpha (1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[2(\alpha-1)x^2 + 1+x^2+y^2\right]$$

$$f_{yy} = 2\alpha (1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[2(\alpha-1)y^2 + 1+x^2+y^2\right]$$

$$f_{xy} = \alpha(\alpha-1)(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\, 4xy$$

$$f_{yx} = f_{xy}$$

(ii) Traccia matrice Hessiana

$$\operatorname{tr} Hf = f_{xx} + f_{yy}$$
$$= 2\alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[2(\alpha-1)(x^2+y^2) + 2(1+x^2+y^2)\right]$$
$$= 4\alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[(\alpha-1)(x^2+y^2)+1+x^2+y^2\right]$$
$$= 4\alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[\alpha(x^2+y^2)+1\right]$$

Determinante matrice Hessiana

$$\det Hf = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$
$$= 4\alpha^2 (1+x^2+y^2)^{2\alpha-4}\left[2(\alpha-1)x^2+1+x^2+y^2\right]\left[2(\alpha-1)y^2+1+x^2+y^2\right] -$$
$$- 16\alpha^2(\alpha-1)^2(1+x^2+y^2)^{2\alpha-4}x^2y^2$$

$$= 4\alpha^2(1+x^2+y^2)^{2\alpha-4}\left[(1+x^2+y^2)\,2(\alpha-1)(x^2+y^2)+(1+x^2+y^2)^2\right]$$

$$= 4\alpha^2(1+x^2+y^2)^{2\alpha-3}\left[2(\alpha-1)(x^2+y^2)+1+x^2+y^2\right]$$

$$= 4\alpha^2(1+x^2+y^2)^{2\alpha-3}\left[1+(2\alpha-1)(x^2+y^2)\right]$$

(iii) f convessa su $\mathbb{R}^2 \iff Hf \geq 0$ su $\mathbb{R}^2 \iff \begin{cases}\det Hf \geq 0 \\ \operatorname{tr} Hf \geq 0\end{cases}$ su $\mathbb{R}^2$.

Si ha $\det Hf \geq 0$ su $\mathbb{R}^2 \iff 2\alpha-1 \geq 0 \iff \alpha \geq \frac{1}{2}$

Per questi α si ha anche $\operatorname{tr} Hf \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$.

Quindi: f convessa su $\mathbb{R}^2 \iff \alpha \geq \frac{1}{2}$, oppure $\alpha = 0$.

$\square$

Infatti per $\alpha=0$ si ha $f \equiv 1$.

ESERCIZIO Su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\}$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4+y^4}\,dx - \frac{yx^2}{x^4+y^4}\,dy .$$

(i) Verificare che ω è chiusa in A.

(ii) ~~Verifica~~ Provare che ω è esatta esibendo un potenziale f di ω in A. (Il potenziale deve essere definito in ogni punto di A)

Risoluzione. (i) Verifichiamo che ω è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2}{x^4+y^4}\right) = \frac{2xy(x^4+y^4) - xy^2 \cdot 4y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2yx^5 - 2xy^5}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-yx^2}{x^4+y^4}\right) = -\frac{2xy(x^4+y^4) - yx^2 \cdot 4x^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2yx^5 - 2xy^5}{(x^4+y^4)^2}$$

Le due espressioni sono identiche su A.

(ii) Cerchiamo $f \in C^1(A)$ tale che

$$\circledast \qquad f_x = \frac{xy^2}{x^4+y^4}, \qquad f_y = -\frac{yx^2}{x^4+y^4} .$$

Integriamo la prima equazione in x (integr. indefiniti)

$$f(x,y) = \int \frac{xy^2}{x^4+y^4}\,dx \underset{2x\,dx = d\xi}{\overset{x^2=\xi}{=}} \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{\xi^2+y^4}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2y^2}\int \frac{1}{\left(\frac{\xi}{y^2}\right)^2+1}\,d\xi = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi}{y^2}\right) + C(y)$$

È dunque $f(x,y) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + C(y)$,

Deriviamo in y:

$$f_y = \frac{1}{2} \frac{x^2(-2)y^{-3}}{1+\frac{x^4}{y^4}} + C'(y)$$

$$= \frac{yx^2}{x^4+y^4} + C'(y)$$

Confrontandolo con la seconda equazione in ⊛ si trova $C'(y)=0$ e quindi C = costante.

Abbiamo trovato (con $C=0$) il potenziale

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right).$$

Questo ancora non basta perché f è definita solo per $y \neq 0$. Tuttavia: per $x_0 \neq 0$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

Quindi possiamo definire

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ \frac{\pi}{\cancel{4}\,2} & \text{se } y=0 \text{ e } x\neq 0 \end{cases}$$

Risulta $f \in C(A)$ e per la ⊛ in effetti $f \in C^1(A)$.

ESERCIZIO Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 + e^{nx}} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \text{ ed } n \in \mathbb{N},$$

(i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Risoluzione (i) Primo caso: $x \le 0$; si ha:

$$\sqrt[n]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2+e^{nx}} \le \sqrt[n]{n^2+1} \le \sqrt[n]{n^2+n^2} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^2}$$

$$\sqrt[n]{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Per confronto: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ se $x \le 0$.

Secondo caso: $x > 0$, In questo caso si ha definitivamente $n^2 \le e^{nx}$ e quindi

$$e^x = \sqrt[n]{e^{nx}} \le \sqrt[n]{n^2+e^{nx}} \le \sqrt[n]{e^{nx}+e^{nx}} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{e^{nx}} = \sqrt[n]{2}\, e^x$$

E quindi per confronto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ per $x > 0$.

Dunque

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \le 0 \\ e^x & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

(ii) Studiamo la convergenza uniforme su $(-\infty, 0]$:

$$\sup_{x\le 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\le 0}\left(\sqrt[n]{n^2+e^{nx}} - 1\right) \underset{\Delta}{=} \sqrt[n]{n^2+1} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

in questo

$x \mapsto \sqrt[n]{n^2+e^{nx}}$ è crescente.

ESERCIZIO Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice del seguente integrale

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^{\alpha x} + e^{(\alpha+1)x}} \, dx .$$

Risoluzione. Facciamo il cambio di variabile $e^x = t$,
$x = \log t$, $dx = \frac{1}{t} dt$, $x = -\infty \to t = 0$ e $x = +\infty \to t = +\infty$.
Si trova

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha+1}} \frac{1}{t} \, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}(1+t)} \, dt .$$

Studiamo la convergenza su $[0,1]$ e poi su $[1,\infty)$.

1) L'integrale

$$① \quad \int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}(1+t)} \, dt$$

si studia con il confronto asintotico usando $\sin t = t + o(t)$
L'integrale di confronto è

$$\int_0^1 \frac{t}{t^{\alpha+1}} \, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} \, dt < \infty \iff \alpha < 1.$$

Quindi ① converge se e solo se $\alpha < 1$.

2) L'integrale

$$\text{(2)} \qquad \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}(1+t)}\,dt$$

si studia col Criterio di Abel: $f(t) = \sin t$ ha primitiva limitata. Esaminiamo

$$g(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}(1+t)} .$$

Se $\alpha+1+1>0$ ($\iff \alpha>-2$) allora $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}(1+t)} = 0$.

Inoltre

$$g'(t) = \frac{-\left[(\alpha+1)t^{\alpha}(1+t) + t^{\alpha+1}\right]}{t^{2\alpha+2}(1+t)^2}$$

verifica definitivamente $g'(t)<0$ quando $\alpha>-2$.

Quindi per il Criterio di Abel l'integrale (2) converge per $\alpha>-2$.

Risposta complessiva: l'integrale I_α converge per $-2<\alpha<1$.

$\square$

Quindi c'è conv. uniforme su $(-\infty, 0]$.

Studiamo il caso $x \geq 0$. Dobbiamo esaminare:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt[n]{n^2 + e^{nx}} - e^x \right|$$

$$= \sqrt[n]{n^2 + e^{nx}} - e^x = (n^2 + e^{nx})^{\frac{1}{n}} - e^x.$$

Sua derivata:

$$g_n'(x) = \frac{1}{n} (n^2 + e^{nx})^{\frac{1}{n} - 1} e^{nx} \cdot n - e^x$$

$$= e^{nx} (n^2 + e^{nx})^{\frac{1-n}{n}} - e^x$$

Studio del segno:

$$g_n'(x) \leq 0 \iff e^{nx} (n^2 + e^{nx})^{\frac{1-n}{n}} \leq e^x$$

$$\iff e^{n^2 x} (n^2 + e^{nx})^{1-n} \leq e^{nx}$$

$$\iff e^{n^2 x - nx} \leq (n^2 + e^{nx})^{n-1}$$

$$\iff e^{(n^2 - n)x} \leq e^{(n^2 - n)x} \left(1 + \frac{n^2}{e^{nx}}\right)^{n-1}$$

$$\iff 1 \leq \left(1 + \frac{n^2}{e^{nx}}\right)^{n-1}$$

VERIFICATO.

Quindi g_n è decrescente. Dunque:

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = g_n(0) = \sqrt[n]{n^2 + 1} - 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Risposta: c'è convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 21/6/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Dato un parametro $\beta > 0$, si consideri la funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x, y) = (x^5 + y^5)^\beta.$$

i) (3pt) Calcolare tutti i $\beta > 0$ tali che g abbia tutte le derivate direzionali nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) (4pt) Calcolare tutti i $\beta > 0$ tali che g sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $\beta \in$; ii) $\beta \in$

Esercizio 2 Si consideri la curva nel piano $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(\cos t, t^2 \sin t\big), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

i) (3pt) Calcolare il campo tangente unitario T. Calcolare il limite $T^+ = \lim_{t\to 0^+} T(t)$.

ii) (3pt) Studiare la monotonia della seconda coordinata di γ.

iii) (2pt) Disegnare il supporto della curva, con precisione intorno al punto $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) γ reg. per $t \in$; $T^+ =$; ii) Monotonia:

Esercizio 3 Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{\alpha x},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) (1pt) Provare che f ammette massimo e minimo su K.

ii) (3pt) Al variare di α, calcolare tutti i punti critici di f interni a K.

iii) (4pt) Al variare di α, calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Risposte: ii) p.ti critici interni: ; iii) val. min= ; val. max=

Esercizio 4 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x n^{-x+1}}{n^2 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) (3pt) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) (4pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

iii) (2pt) Stabilire se c'è convergenza uniforme su $[0, \delta]$ con $\delta > 0$.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$; iii) CU su $[0, \delta]$: si/no

3 ore a disposizione

Esercizio Sia $\beta > 0$ un parametro e si consideri

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) = (x^5 + y^5)^\beta$.

i) Determinare tutti i $\beta > 0$ tali che f ~~sia~~ abbia tutte le derivate direzionali nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti i $\beta > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) Dato $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(t^5 v_1^5 + t^5 v_2^5 \right)^\beta$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^{5\beta}}{t} \left(v_1^5 + v_2^5 \right)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } 5\beta > 1 \\ (v_1^5 + v_2^5)^{1/5} & \text{se } \beta = 1/5 \\ \text{non esiste finito se } \beta \ \ 1/5 \end{cases}$$

Risposta: $\beta \geq 1/5$

ii) Se $\beta < 1/5$ f non può essere differenziabile perché non esistono le derivate direzionali.

Se $\beta = 1/5$ f non è differenziabile perché

$$v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0) = (v_1^5 + v_2^5)^{1/5} \quad \text{non è lineare}$$

Rimane da studiare il caso $\beta > 1/5$. In questo caso: $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Test della differenziabilità:

$$\frac{f(x,y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^5+y^5)^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Stime:

$$\left|\frac{(x^5+y^5)^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{(|x|^5+|y|^5)^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\left[\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5\right]^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq 2^\beta \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{5\beta-1} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{\text{se } 5\beta-1>0} 0$$

Risposta: f differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2 \iff \beta > 1/5$.

$\square$

<u>COMMENTO</u> La funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^5+y^5)^\beta$$

NON è ben definita per tutti i valori di $\beta > 0$.
É però ben definita per $\beta = \dfrac{m}{2n+1}$ con $m = 1, 2, 3 \ldots$ ed $n = 0, 1, 2 \ldots$

Esercizio Sia $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma(t) = (\cos t, t^2 \sin t) \qquad t \in [0,2\pi]$$

i) Calcolare, se possibile, il campo tangente unitario T.
Calcolare $T^+ = \lim_{t\to 0^+} T(t)$.

ii) Studiare la monotonia della seconda coordinata di γ

iii) Disegnare il supporto di γ.

Risoluzione. La curva γ è chiusa, nel senso che $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1,0)$.

i) Derivata:
$$\dot\gamma(t) = (-\sin t, 2t \sin t + t^2 \cos t)$$

Punti regolari. Studio il sistema $\dot\gamma(t) = (0,0)$:

$$\begin{cases} -\sin t = 0 \\ 2t \sin t + t^2 \cos t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin t = 0 \\ t^2 \cos t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

Quindi in $t=0$ γ non è regolare. Per $t \in (0,2\pi]$ γ è regolare. Poi:

$$|\dot\gamma(t)| = \left((\sin t)^2 + (2t \sin t + t^2 \cos t)^2\right)^{1/2}.$$

Per $t \neq 0$ è ben definito

$$T = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{(-\sin t, 2t\sin t + t^2 \cos t)}{(\quad \dots \quad)^{1/2}}.$$

Abbiamo

$$T^+ = \lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{t} \cdot \frac{t}{|\dot\gamma(t)|},$$

A parte:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin t}{t},\ 2\sin t + t\cos t\right) = (-1,0)$$

e analogamente $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|\dot\gamma(t)|} = +1$. Quindi:

$$T^+ = (-1,0)$$

ii) Seconda coordinata:

$$\phi(t) = t^2 \sin t \quad \text{con} \quad \dot\phi(t) = 2t\sin t + t^2\cos t,$$

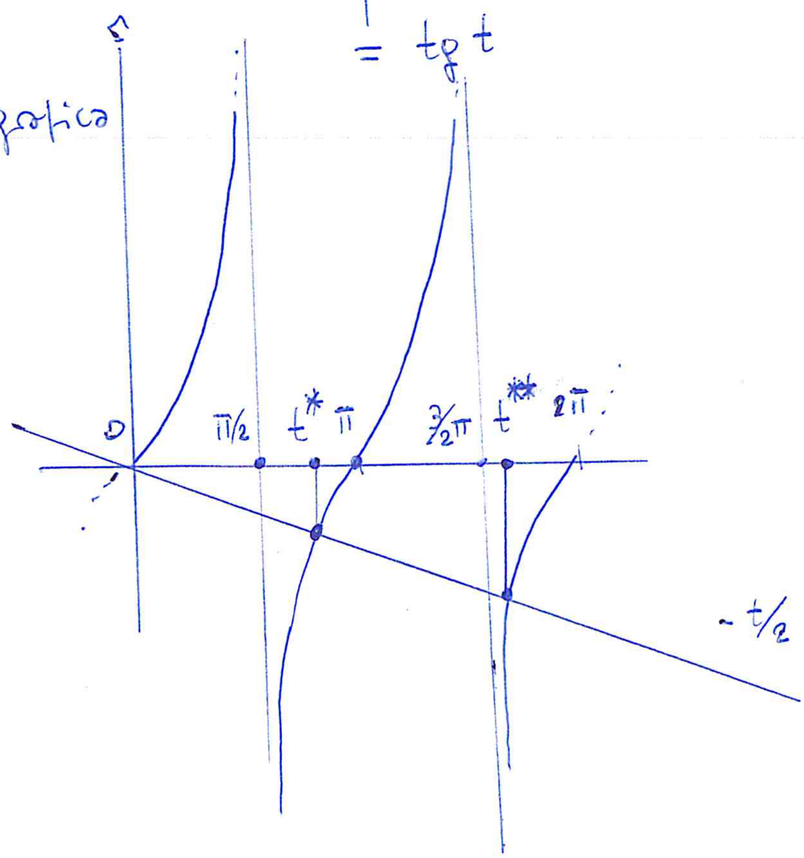
studiamo $\dot\phi \geq 0$ per $t \in [0,2\pi]$. Troviamo prima gli zeri:

$$\dot\phi(t) = 0 \iff t\,(2\sin t + t\cos t) = 0$$

$t=0$ è soluzione e poi: $\displaystyle = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{t}{2}$

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t$$

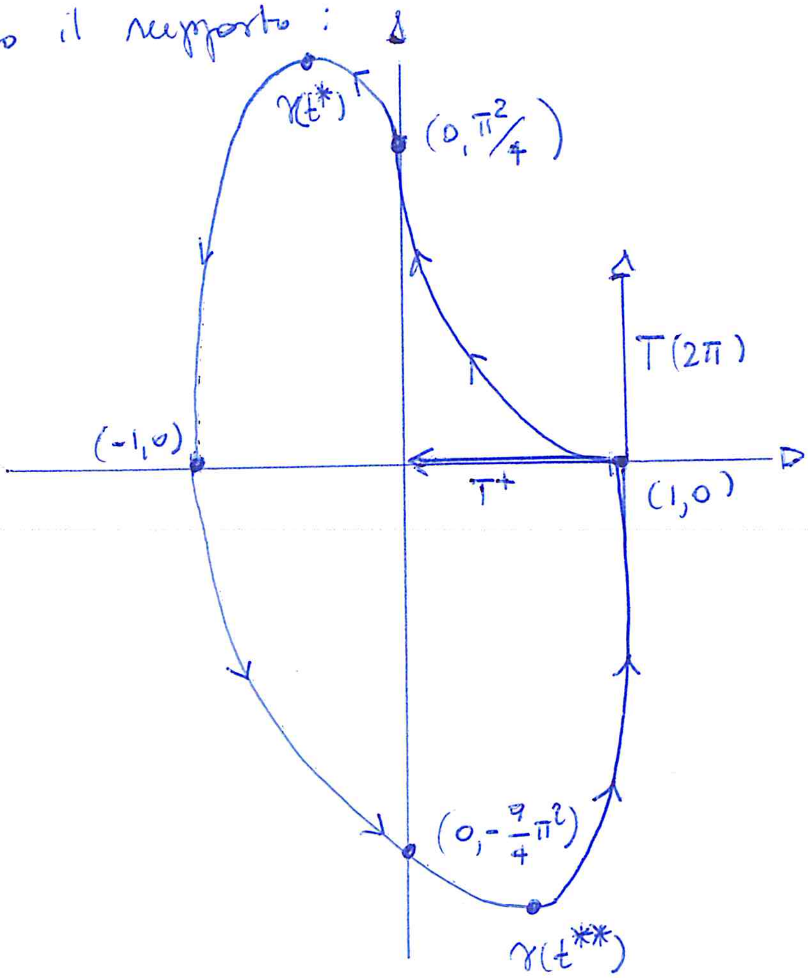
Soluzione grafica



Dunque $\dot\phi(t) = 0$ per $t = 0$, $t = t^* \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e
$t = t^{**} \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

Dallo studio del segno di $\dot\phi$ (omesso) vediamo che $\phi(t)$ cresce per $t \in [0, t^*]$, decresce per $t \in [t^*, t^{**}]$ e cresce di nuovo per $t \in [t^{**}, 2\pi]$.

iii) Combinando le informazioni precedenti con la monotonia nota di $t \mapsto \cos t$ (1^ coordinata) troviamo il supporto:



Esercizio Su $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ si consideri $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{\alpha x},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1) Provare che f assume valore massimo e minimo su K.

2) Al variare di α calcolare tutti i punti critici di f interni a K.

3) Al variare di α calcolare il valore massimo e minimo di f su K.

Risoluzione 1) K è compatto (chiuso e limitato) ed f è continua. I p.ti di max\min esistono per il Teorema di Weierstrass.

2) Derivate parziali:

$$f_x = e^{\alpha x}\left(2x + \alpha(x^2+y^2)\right)$$

$$f_y = e^{\alpha x}\, 2y\,.$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ diventa:

$$\begin{cases} 2x + \alpha(x^2+y^2) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$ c'è il solo punto critico $(0,0)$.

Se $\alpha \neq 0$ risolviamo $x(2+\alpha x) = 0 \iff x = 0$ op. $x = -\frac{2}{\alpha}$.

Ci sono due punti critici: $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{\alpha}, 0\right)$.

Il primo è sempre interno. Il secondo è interno se e solo se $\frac{4}{\alpha^2} < 1 \iff \alpha^2 > 4 \iff \alpha \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$.

3) Osserviamo che $f \geq 0$ ed $f(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$.
Quindi $(0,0)$ è il (unico) punto di minimo assoluto.

Deduciamo che per $|\alpha| \leq 2$ il punto di massimo assoluto di f su K deve stare in ∂K.

Parametrizziamo ∂K in questo modo: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.
Consideriamo

$$\phi(t) = f(\gamma(t)) = e^{\alpha \cos t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Il massimo è preso per $\cos t = 1$ se $\alpha > 0$ e per $\cos t = -1$ se $\alpha < 0$. Deduciamo che

$$\max_{\partial K} f = e^{|\alpha|}.$$

Nel punto critico $\left(-\frac{2}{\alpha}, 0\right)$ la funzione f vale:

$$f\left(-\frac{2}{\alpha}, 0\right) = \frac{4}{\alpha^2} e^{-2}$$

Studiamo il caso $|\alpha| > 2$ (punto critico interno).
In questo caso:

$$\frac{4}{\alpha^2} \frac{1}{e^2} < 1 < e^{|\alpha|}$$

Dunque il massimo è assunto ($\forall \alpha$) nella frontiera

Risposta: ~~[illegible]~~ $\min_K f = 0$ e $\max_K f = e^{|\alpha|}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Esercizio</u> Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

① Studiare la convergenza puntuale.

② Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione. ① Per $x = 0$ la serie converge e la somma è 0. Per $x > 0$ si ha:

$$0 < \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \leq \frac{x\, n^{1-x}}{n^2} = \frac{x}{n^{1+x}}$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} < \infty , \quad \text{essendo} \quad 1+x > 1 ,$$

per confronto la serie data converge.

Per $x < 0$ il termine generale è negativo.

Inoltre per $n \geq |x|$ (quindi definitivamente)

$$\frac{|x|\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \qquad \frac{|x|\, n^{1-x}}{n^2+n^2} = \frac{|x|}{2\, n^{1+x}}$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} = +\infty \quad \text{nel caso} \quad 1+x < 1 ,$$

deduciamo che la serie data diverge per $x < 0$.

Risposta: CP per $x \in [0, \infty)$.

(2) Riprendiamo i conti precedenti. Siano $0 < \delta < M < +\infty$.
Se $\delta \leq x \leq M$ allora

$$0 < \frac{x\, n^{1-x}}{n^2 + x^2} \leq \frac{x}{n^{1+x}} \leq \frac{M}{n^{1+\delta}}$$

con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{1+\delta}} < \infty$. Per il Criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente su $[\delta, M]$.

Supponiamo ora $x \geq M$. Ricordiamo che

$$\frac{2nx}{x^2+n^2} \leq 1 \qquad \forall n \quad \forall x > 0$$

ovvero $\frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{2n}$. Dunque:

$$\frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \leq \frac{n^{1-x}}{2n} = \frac{1}{2n^x} \underset{x \geq M}{\overset{\text{se}}{\leq}} \frac{1}{2n^M}$$

Possiamo scegliere $M > 1$ e dire che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^M} < \infty$

Per il Criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme per $x \in [M, \infty)$.

Fino qui abbiamo provato questo: la serie converge uniformemente per $x \in [\delta, \infty)$, $\forall \delta > 0$.

Soluzione alternativa per la convergenza uniforme.

Partiamo dalla maggiorazione:

$$f_n(x) = \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \leq x\, n^{-1-x} = g_n(x).$$

Studiamo la funzione $g_n(x)$. Sua derivata:

$$g_n'(x) = n^{-1-x} + x(-1)(\log n)\, n^{-1-x}$$
$$= n^{-1-x}\left(1 - x\log n\right)$$

Dunque $g_n'(x \geq 0 \iff 1 - x\log n \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{\log n}$.

Fissiamo $\delta > 0$. Definitivamente si ha:

$$\frac{1}{\log n} < \delta.$$

Quindi definitivamente!

$$\sup_{x\geq\delta} f_n(x) \leq \sup_{x\geq\delta} g_n(x) = g_n(\delta) = \frac{\delta}{n^{1+\delta}}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{n^{1+\delta}} < \infty$ per il Criterio di Weierstrass la serie data converge uniformemente su $[\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$.

Mostriamo che su $[0,\delta]$ non c'è convergenza uniforme. Per $0<x\leq 1$ si ha: $n^2+x^2 \leq 2n^2$ $\forall n$.

Quindi
$$\frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \geq \frac{n^{1-x}\cdot x}{2n^2} = \frac{x}{2\, n^{1+x}}.$$

Per il confronto integrale:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{1+x}}\, dt = \left[\frac{t^{-1-x+1}}{-x}\right]_{t=1}^{t=\infty} = \frac{1}{x}$$

Quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \geq \frac{x}{2}\cdot x^{-1} = \frac{1}{2}$$
per $x>0$

La funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2}, \quad x\geq 0,$$

non è pertanto continua per $x\to 0^+$ perché $f(0)=0$ mentre $\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq \frac{1}{2}$.