Analisi 2 – Canale 1

Nome, cognome, matricola: Scritto del 16/9/2019

Esercizio 1 Per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha(2+\cos t)}dt$$

i) (5pt) Stabilire per quali $\alpha \geq 0$ l'integrale converge semplicemente.

ii) (5pt) Stabilire per quali $\alpha \geq 0$ l'integrale converge assolutamente.

Risposte: i) CS per $\alpha \in$	; ii) CA per $\alpha \in$

Esercizio 2 (10pt) Dati $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y+\alpha\log x},$$

Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su A.

Risposta: $\alpha \in$

Esercizio 3 Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ data dalla equazione polare $\varrho = \big(\sin(2\vartheta)\big)^2$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

i) (2pt) Studiare la periodicità ed eventuali simmetrie di ϱ.

ii) (2pt) Studiare la regolarità di γ.

iii) (3pt) Detto T il campo tangente unitario a γ, calcolare

$$T^+(0) = \lim_{\vartheta \to 0^+} T(\vartheta).$$

iv) (3pt) Disegnare il supporto di γ, con precisione intorno al punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) periodo di $\varrho =$	ii) γ regolare per $\vartheta \neq$	iii) $T^+(0) =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Quindi l'integrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha (2+\cos t)} dt$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha < 2$.

Conclusione: c'è convergenza semplice per $0 < \alpha < 2$.

Per $\alpha = 0$ osserviamo che

$$\int_0^T \frac{\sin t}{2+\cos t} dt = - \log\left(2+\cos T\right) + \log 3$$

che <u>NON</u> ha limite per $T \to \infty$

Dunque: $CS \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$.

2) Come sopra si vede che $\int_0^1 \left| \frac{\sin t}{t^\alpha (2+\cos t)} \right| dt < \infty$ se e solo se $\alpha < 2$.

Studiamo la CA su $[1, \infty)$:

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin t}{t^\alpha (2+\cos t)} \right| dt \le \int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt < \infty \quad \text{per } \alpha > 1$$

Per $\alpha \le 1$ abbiamo

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin t}{t^\alpha (2+\cos t)} \right| dt \ge \frac{1}{3} \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt = \infty$$

VISTO IN CLASSE.

Conclusione: $CA \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$.

$\square$

ESERCIZIO. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$f: A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x^2+y+\alpha \log x}$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0\}$.

Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f è convessa su A.

Risoluzione. Dobbiamo trovare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui

$$Hf(x,y) \geq 0 \quad \text{per ogni } (x,y) \in A.$$

conti:

$$f_x = f \cdot \left(2x + \frac{\alpha}{x}\right)$$

$$f_y = f$$

$$f_{xx} = f\left(2x+\frac{\alpha}{x}\right)^2 + f\left(2 - \frac{\alpha}{x^2}\right)$$

$$f_{xy} = f\left(2x+\frac{\alpha}{x}\right) = f_{yx}$$

$$f_{yy} = f$$

Dunque la matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = f(x,y) \begin{pmatrix} \left(2x+\frac{\alpha}{x}\right)^2 + 2 - \frac{\alpha}{x^2} & 2x+\frac{\alpha}{x} \\ 2x+\frac{\alpha}{x} & 1 \end{pmatrix}$$

E quindi

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = f(x,y)\left[\left(2x+\frac{\alpha}{x}\right)^2 + 3 - \frac{\alpha}{x^2}\right]$$

$$\det Hf(x,y) = f(x,y)^2\left[\cancel{\left(2x+\frac{\alpha}{x}\right)^2} + 2 - \frac{\alpha}{x^2} - \cancel{\left(2x+\frac{\alpha}{x}\right)^2}\right]$$

$$= f(x,y)^2\left(2-\frac{\alpha}{x^2}\right)$$

Imponiamo le condizioni

$$\begin{cases} \operatorname{tr} Hf(x,y) \geq 0 & \forall x>0 \\ \det Hf(x,y) > 0 & \forall x>0 \end{cases}$$

Siccome $f>0$, la seconda fornisce:

$$2-\frac{\alpha}{x^2} > 0 \qquad \forall x>0$$

Che è verificata se e solo se $\alpha \leq 0$.

Inoltre: $\alpha \leq 0 \implies \operatorname{tr} Hf(x,y) > 0 \ \forall x>0$.

Conclusione: f convessa su $A \iff \alpha \leq 0$.

$\square$

ESERCIZIO Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ data dalla equazione polare $\rho = (\sin(2\theta))^2$ con $\theta \in [0, 2\pi]$.

i) Studiare la periodicità e le simmetrie di $\rho(\theta)$

ii) Studiare la regolarità di γ e calcolare il campo tangente unitario T.

iii) Calcolare $T^+(0) = \lim_{\theta \to 0^+} T(\theta)$

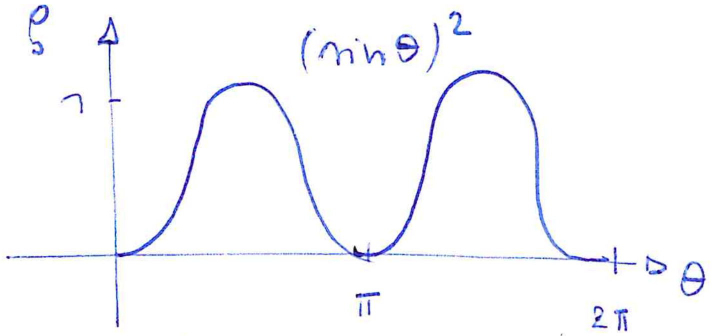
iv) Disegnare il supporto di γ con precisione intorno al punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) $\sin t$ 2π-periodica

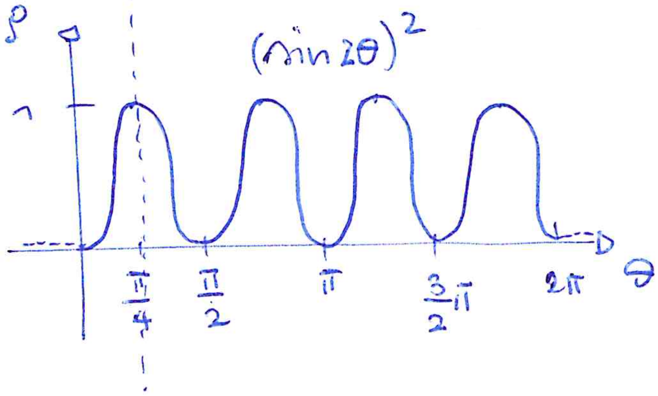
$(\sin t)^2$ è π-periodica

$(\sin 2t)^2$ è $\frac{\pi}{2}$-periodica.

c'è simmetria rispetto la retta $\theta = \frac{\pi}{4}$!



piano θ-ρ



ii) Abbiamo $\dot{\rho} = 2\sin 2\theta \cos(2\theta)\cdot 2 = 4\sin 2\theta \cos 2\theta$

Sappiamo che

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} = \sqrt{(\sin 2\theta)^4 + 16(\sin 2\theta)^2(\cos 2\theta)^2}$$

$$= |\sin 2\theta| \underbrace{\sqrt{(\sin 2\theta)^2 + 16(\cos 2\theta)^2}}_{\neq 0}$$

Quindi $|\dot{\gamma}| = 0 \iff \sin 2\theta = 0 \iff \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

(e poi $\theta = \pi$)

iii)

Abbiamo

$$\gamma(\theta) = (\sin 2\theta)^2 (\cos \theta, \sin\theta)$$

$$= \rho (\cos\theta, \sin\theta)$$

e quindi

$$\dot{\gamma} = \dot{\rho}(\cos\theta, \sin\theta) + \rho(-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} = \frac{\dot{\rho}}{|\dot{\gamma}|}(\cos\theta, \sin\theta) + \frac{\rho}{|\dot{\gamma}|}(-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\overset{\theta>0}{=} \frac{4\cancel{\sin 2\theta}\cos 2\theta}{\underbrace{\cancel{\sin 2\theta}\cdot\sqrt{\dots}}_{\downarrow\, 1}} \underbrace{(\cos\theta, \sin\theta)}_{\downarrow\,(1,0)} + \underbrace{\frac{(\sin 2\theta)^2(-\sin\theta, \cos\theta)}{\sin 2\theta \sqrt{\dots}}}_{\downarrow\,(0,0)}$$

$(\theta \to 0^+)$

Quindi $$T^+(0) = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(0)|} = (1, 0)$$

iv) Per $\theta = \pi/4$ ρ è massimo. Dunque: