Analisi 2 – Canale 1

Nome, cognome, matricola: Scritto del 23/1/2020

Esercizio 1 (10pt) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log((2n)!)]^{\alpha}}.$$

Risposte: La serie converge se e solo se $\alpha \in$

Esercizio 2 Dato un parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{\sin\left(\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^{\alpha}\right)}{|x-y|} \qquad \text{se } x \neq y,$$

ed $f(x,y) = 0$ se $x = y$.

i) (6pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) (4pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) continua se $\alpha \in$	; ii) differenziabile se $\alpha \in$

Esercizio 3 Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ data dalla equazione polare $\varrho = \left|\cos(3\vartheta/2)\right|^{2/3}$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

i) (2pt) Studiare la periodicità ed eventuali simmetrie di ϱ.

ii) (2pt) Studiare la regolarità di γ.

iii) (2pt) Detto T il campo tangente unitario a γ, calcolare

$$T^{-} = \lim_{\vartheta \to \pi/3^{-}} T(\vartheta).$$

iv) (3pt) Disegnare il supporto di γ, con precisione intorno al punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

v) (1pt) Provare che γ ha lunghezza finita.

Risposte: i) periodo di $\varrho =$	ii) γ regolare per $\vartheta \neq$	iii) $T^{-} =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^{\alpha}}.$$

Risoluzione. Per $\alpha \leq 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^{\alpha}} = +\infty$$

È violata la condizione necessaria di convergenza e dunque la serie diverge.

Studiamo il caso $\alpha > 0$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\log(2n)! &= \log(2n\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1) \\
&= \sum_{i=2}^{2n} \log(i) \\
&\geq \sum_{i=n}^{2n} \log(i) \qquad n \geq 2 \\
&\geq \log(n)\cdot(2n-(n-1)) \\
&= (n+1)\log(n)
\end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^{\alpha}} \overset{(\alpha>0)}{\leq} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha}(\log n)^{\alpha}}$$

Per Confronto Asintotico l'ultima serie converge se e solo se converge

$$\circledast \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}(\log n)^{\alpha}}$$

Per $\alpha - 1 < 0$ si ha $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}(\log n)^{\alpha}} = \infty$

e dunque la serie diverge.

Per $\alpha - 1 \geq 0$ il termine generale è decrescente e possiamo usare il Criterio di Cauchy per dire che la serie $\circledast$ converge se e solo se converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^{\alpha-1}(\log 2^n)^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-2}\, n^{\alpha}(\log 2)^{\alpha}}$$

Se $\alpha - 2 < 0$ si ha $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-2}\, n^{\alpha}} = +\infty$

e la serie non converge.

Se $\alpha - 2 \geq 0$ la serie invece converge, ed è facile da vedere.

Conclusione raggiunta per confronto:

$$\alpha \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1} (\log n)^{\alpha}} < +\infty .$$

Rimane da studiare il caso $0 < \alpha < 2$

Abbiamo $\log (2n)! \leq 2n \cdot \log(2n)$ e

dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^{\alpha}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(2n)^{\alpha}(\log 2n)^{\alpha}} = \text{II}$$

Con conti del tutto analoghi ai precedenti si vede che

$$0 < \alpha < 2 \quad \Rightarrow \quad \text{II} = +\infty .$$

Risposta finale: Serie Converge $\Leftrightarrow$ $\alpha \geq 2$.

$\square$

ESERCIZIO Per $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \frac{\sin(|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^{\alpha})}{|x-y|} \quad \text{se} \quad x \neq y$$

ed $f(x,y) = 0$ se $x = y$.

1) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione. 1) Per $y = 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(|x|^{\frac{\alpha}{2}})}{|x|}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|^{\frac{\alpha}{2}}}{|x|} \cdot \frac{\sin(|x|^{\frac{\alpha}{2}})}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to 0} |x|^{\frac{\alpha}{2} - 1} = 0 \iff \frac{\alpha}{2} > 1$$

Dunque: $\alpha \leq 2 \Rightarrow f$ non è continua in 0.

Usando $|\sin t| \leq |t|$:

$$\frac{\sin(|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^{\alpha})}{|x-y|} \leq \frac{|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^{\alpha}}{|x-y|} = \frac{||x| - |y||^{\alpha}}{|x-y|(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^{\alpha}} \leq$$

$$\leq \frac{|x-y|^{\alpha}}{|x-y|(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^{\alpha}} = \frac{|x-y|^{\alpha-1}}{(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^{\alpha}}$$

Usando $|x-y| \leq |x| + |y|$ e

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x|+|y|}$$

si arriva a

$$\frac{\sin\left(\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right|^{\alpha} \right)}{|x-y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^{\alpha-1}}{(|x|+|y|)^{\alpha/2}} = (|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Per confronto deduciamo che

$$\frac{\alpha}{2} - 1 > 0 \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Dunque

$$f \text{ cont. in } 0 \iff \alpha > 2.$$

2) Vediamo quando f ha le derivate parziali in 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(f(x,0) - \underset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \frac{\sin(|x|^{\frac{\alpha}{2}})}{|x|}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha/2}}{x|x|} = 0 \text{ se e solo se } \frac{\alpha}{2} > 2$$

ovvero: $\alpha > 4$.

Se $\alpha \leq 4$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste e dunque f non è diff. in 0. Analogamente per $\alpha > 4$ si ha $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Per il test della differenziabilità, f è diff.bile in 0 se

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^\alpha)}{\sqrt{x^2+y^2}\,|x-y|}$$

Come sopra, si stima

$$\frac{|\sin(|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^\alpha)|}{\sqrt{x^2+y^2}\,|x-y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\uparrow}{\leq} \sqrt{2}\,\frac{(|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{|x|+|y|} \leq$$

usato: $\sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)$

$$\leq \sqrt{2}\,(|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-2} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{se } \alpha > 4.$$

Conclusione: f è diff.bile in 0 $\iff$ $\alpha > 4$.

$\square$

ESERCIZIO Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva

data dall'equazione polare $\rho(\theta) = \left| \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right|^{\frac{2}{3}}$

con $\theta \in [0, 2\pi]$.

1) Discutere periodicità e simmetrie di ρ

2) Studiare la regolarità di γ

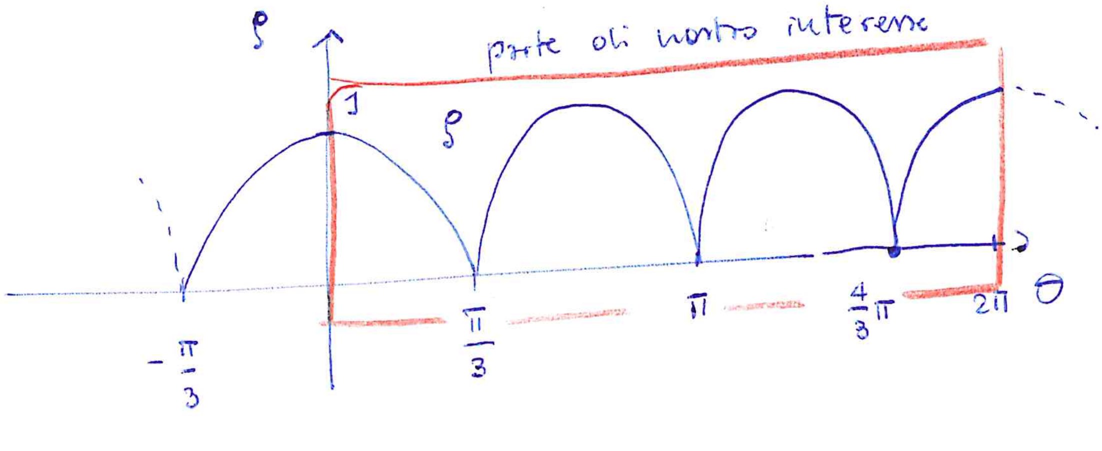
3) Detto T il campo tangente unitario, calcolare

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}^-} T(\theta)$$

4) Disegnare il supporto di γ

5) Provare che γ ha lunghezza finita.

Risoluzione 1) Pensiamo $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. La ρ è pari: $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$. Siccome $|\cos\theta|$ è π-periodica, $\left|\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right|^{2/3}$ è $\frac{2}{3}\pi$-periodica:



2) Si calcola per $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$:

$$\rho = \left(\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \quad e \quad \dot{\rho} = -\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

Si ha dunque

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} = \sqrt{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Vediamo che $|\dot{\gamma}| \neq 0$ per $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Qui γ è regolare. Per $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$ γ non è regolare.

3) Abbiamo $\gamma(\theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = \rho (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\dot{\gamma} = \dot{\rho} (\cos\theta, \sin\theta) + \rho (-\sin\theta, \cos\theta)$$

Dunque

$$T = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} = \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[-\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)(\cos\theta, \sin\theta) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (-\sin\theta, \cos\theta)\right]$$

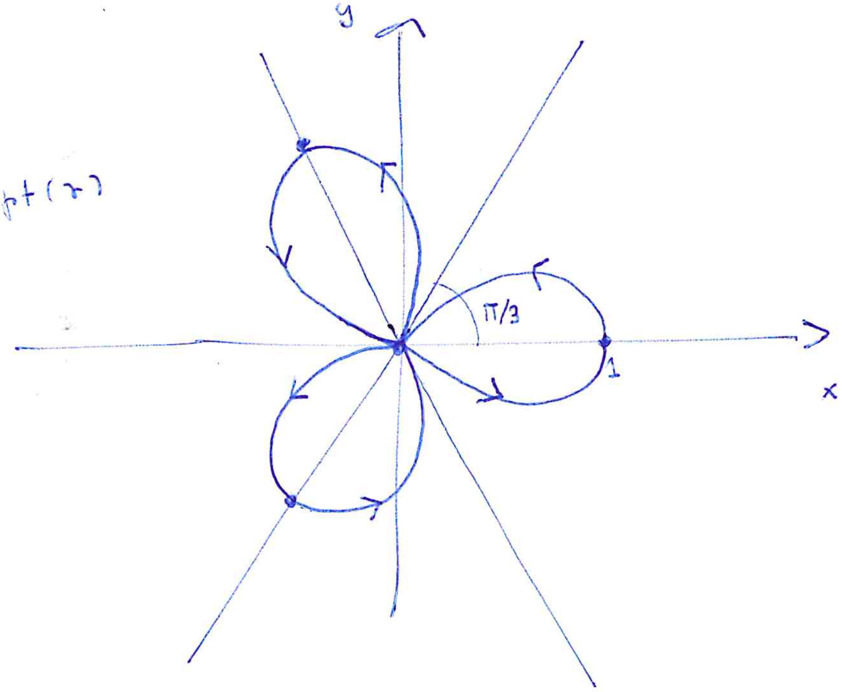
Dunque

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}^-} T(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}^-} -\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = -\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3) Disegniamo il supporto per $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ e poi lo replichiamo altre 2 volte per periodicità:

spt(r)



4) Basta vedere che la lunghezza su $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ è finita. Anzi basta guardare il tratto per $\theta \in [0, \pi/3]$

Dalla formula della lunghezza:

$$L(\gamma|_{[0,\pi/3]}) = \int_0^{\pi/3} |\dot\gamma|\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{1/3}}\, d\theta$$

Sviluppo di Taylor in $\theta = \frac{\pi}{3}$:

$$\cos\frac{3\theta}{2} = \cos\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{2}(-1)\sin\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$+ o\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 0 + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) + o\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

Dunque per Confronto Asintotico:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{1/3}}\, d\theta < \infty \iff \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)^{1/3}}\, d\theta < \infty$$

VERO

perché $\frac{1}{3} < 1$.

$\square$