Analisi 2 – Canale 1

Nome, cognome, matricola: Scritto del 28/8/2019

Esercizio 1 Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{x^n + n^4}, \qquad x \geq 0.$$

i) (5pt) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) (5pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$ $[0, \infty)$; ii) CU per $x \in$ $[0, \infty)$

Esercizio 2 (10pt) Dato l'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, sia $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = x + y + \log\left(\frac{1}{2} + x^2 + y^2\right).$$

Calcolare l'insieme immagine $f(K) \subset \mathbb{R}$.
Servono i numeri $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ e poi $\log(3/2) = 0.4054\ldots$

Risposta: $f(K) =$ $[-\sqrt{2} + \log 3/2 , \sqrt{2} + \log 3/2]$

Esercizio 3 Nel primo quadrante $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \, y > 0\}$ si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x(x+y)} dx - \frac{\alpha}{x+y} dy,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) (3pt) Calcolare tutti i valori di α tali che ω sia esatta in A.

ii) (5pt) Per tali α calcolare un potenziale $f \in C^1(A)$ di ω in A.

iii) (2pt) Fissato $T > 1$, sia $\gamma_T : [1, T] \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma_T(t) = \left(t, \frac{1}{t}\right), \qquad t \in [1, T].$$

Per α come sopra (ω esatta) calcolare il limite

$$L = \lim_{T \to \infty} \int_{\gamma_T} \omega.$$

Risposte: i) $\alpha =$ 1 ii) $f =$ $\log\left(\frac{x}{x+y}\right)$ iii) $L =$ $\log 2$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Per $x \geq 0$ consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{x^n + n^4}, \quad x \geq 0.$$

i) Studiare la convergenza puntuale.

ii) Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione i) Per $x = 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty.$$

In effetti, per $0 \leq x \leq 1$ si ha

$$\frac{x^{\frac{n}{2}}}{x^n + n^4} \leq \frac{1}{n^4} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1]$$

Per il criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $[0,1]$.

Per $x > 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{x^n + n^4} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 < \infty$$

Quindi c'è CP per ogni $x \geq 0$.

ii) Studiamo le funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{x^{n/2}}{x^n + n^4}, \qquad x \geq 0.$$

Chiaramente $\phi_n(0) = 0$ e $\phi_n(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$.

Dunque c'è un punto di massimo.

La derivata è

$$\phi_n'(x) = \frac{(x^n+n^4)\frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}-1} - x^{\frac{n}{2}} \cdot n x^{n-1}}{(x^n + n^4)^2}$$

$$= n x^{\frac{n}{2}-1} \frac{\frac{1}{2}(x^n + n^4) - x^n}{(x^n+n^4)^2}$$

$$= \frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}-1} \frac{n^4 - x^n}{(x^n+n^4)}.$$

Nel punto di massimo deve essere $\phi_n'(x) = 0$

e quindi il punto di massimo verifica $x^n = n^4$.

Dunque

$$\max_{x \geq 0} \phi_n(x) = \phi_n(n^{4/n}) = \frac{n^2}{n^4 + n^4} = \frac{1}{2n^2}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, per il Criterio di Weierstrass

c'è convergenza uniforme su $x \geq 0$.

□

ESERCIZIO Dato $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ sia $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x+y+\log\left(\frac{1}{2}+x^2+y^2\right).$$

Calcolare $f(K) \subset \mathbb{R}$.

Risoluzione. Siccome K è compatto ed f è continua allora $f(K) \subset \mathbb{R}$ è compatto.
Siccome K è convesso ed f è continua allora $f(K) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo.

Quindi $f(K)$ è un intervallo compatto.

Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_0, x_1 \in K$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x),$$

$$f(x_1) = \max_{x \in K} f(x).$$

Dunque $f(K) = [f(x_0), f(x_1)]$.

Cerchiamo i punti critici interni a K (in $\mathrm{int}(K)$):

$$\begin{cases} f_x = 1 + \dfrac{2x}{\frac{1}{2}+x^2+y^2} = 0 \\[2ex] f_y = 1 + \dfrac{2y}{\frac{1}{2}+x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si trova $x = y$, e quindi

$$1 + \frac{2x}{\frac{1}{2} + 2x^2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2} + 2x^2 + 2x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(1 + \cancel{4}2x)^2 = 0$$

E dunque $x = -1/\cancel{4}2$. C'è un solo punto critico

$$P_0 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

È interno a K ($P_0 \in \operatorname{int} K$).

Questo implica che almeno uno dei punti x_0, x_1 ~~devono~~ deve trovarsi in ∂K. Intanto osserviamo che

$$f(P_0) = -\frac{1}{\cancel{4}2} - \frac{1}{\cancel{4}2} + \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= -1 + \log 1 = -1.$$

Sulla frontiera di K è $x^2+y^2=1$, e qui la funzione f diventa $f(x,y) = x+y+\log\frac{3}{2}$.

Parametrizziamo la frontiera $x = \cos t$ e $y = \sin t$ con $t \in [0,2\pi]$. Troviamo la funzione

$$\phi(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t + \log\frac{3}{2}$$

La sua derivata è $\phi'(t) = -\sin t + \cos t$

e quindi $\phi'(t) = 0 \iff \operatorname{tg} t = 1$ e quindi $t = \pi/4$ oppure $t = \frac{5}{4}\pi$.

Nel caso $t=\pi/4$ si trova il punto

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

dove si ha

$$f(P_1) = \sqrt{2} + \log\frac{3}{2}$$

Nel caso $t = \frac{5}{4}\pi$ si trova il punto

$$P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

dove si ha

$$f(P_2) = -\sqrt{2} + \log\frac{3}{2} = -1.4142\ldots + 0.4054\ldots$$

$$= -1.0088\ldots < -1.$$

Quindi P_1 è il punto massimo su K, mentre P_2 è il punto di minimo su K.

Conclusione:

$$f(K) = \left[-\sqrt{2} + \log \frac{3}{2} , \ \sqrt{2} + \log \frac{3}{2} \right].$$

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Nel primo quadrante $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0\}$ si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x(x+y)}\, dx - \frac{\alpha}{x+y}\, dy .$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) Determinare tutti gli α tali che ω sia esatta su A.

ii) Per tali α calcolare un potenziale di ω

iii) Per $T>1$ si consideri la curva $\gamma_T : [1, T] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma_T(t) = \left(\cancel{5}\, t ,\ \frac{1}{t} \right), \quad t \in [1,T] .$$

Per α come sopra, calcolare il limite

$$\lim_{T \to \infty} \int_{\gamma_T} \omega .$$

Risoluzione. i) A è convesso e dunque contraibile. Per il Teorema di Poincaré, ω è esatta se e solo se è chiusa in A. Controlliamo la chiusura:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x(x+y)} \right) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(- \frac{\alpha}{x+y} \right)$$

ovvero

$$\frac{x(x+y) - yx}{x^2(x+y)^2} = \frac{\alpha}{(x+y)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{(x+y)^2} = \frac{\alpha}{(x+y)^2}$$

che è verificata in A se e solo se $\alpha = 1$.

Dunque: ω esatta in $A \iff \alpha = 1$.

ii) Calcoliamo un potenziale di ω in A, dove

$$\omega = \frac{y}{x(x+y)} dx - \frac{1}{x+y} dy .$$

Cerchiamo $f \in C^1(A)$ tale che

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{y}{x(x+y)} \\ f_y = -\dfrac{1}{x+y} . \end{cases}$$

Integriamo la seconda equazione

$$f(x,y) = -\int \frac{1}{x+y} dy = -\log|x+y| + C(x)$$

$$= -\log(x+y) + C(x)$$

da cui si trova: $f_x = -\frac{1}{x+y} + c'(x)$.

Confrontandolo con la prima equazione:

$$-\frac{1}{x+y} + c'(x) = \frac{y}{x(x+y)}$$

da cui

$$c'(x) = \frac{1}{x+y} + \frac{y}{x(x+y)} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

e quindi $c(x) = \log|x| + c_0 = \log x + c_0$.

Scegliamo $c_0 = 0$ e troviamo

$$f(x,y) = -\log(x+y) + \log x = \log\left(\frac{x}{x+y}\right).$$

iii) Siccome ω è esatta, sappiamo che

$$\int_{\gamma_T} \omega = f(\gamma_T(T)) - f(\gamma_T(1))$$

$$= f\left(T, \frac{1}{T}\right) - f(1,1)$$

$$= \log\left(\frac{T}{T+\frac{1}{T}}\right) - \log\left(\frac{1}{1+1}\right)$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{} \log\left(\frac{1}{1+0}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 2.$$

$\square$