Analisi Matematica 2 **Tema A**

Nome, cognome, matricola: Scritto del 17/6/2019 – Canale 1

Esercizio 1 Dato un parametro reale $\alpha \geq 0$, si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha-1}} dt.$$

i) (7pt) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale converga semplicemente.

ii) (3pt) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale converga assolutamente.

Risposte: i) CS per $\alpha \in$ $]0,3[$; ii) CA per $\alpha \in$ $]1,3[$

Esercizio 2 Si consideri la curva nel piano $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, (t-1)^2\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

i) (2pt) Discutere la regolarità e calcolare il campo tangente unitario T.

ii) (2pt) Calcolare i limiti $T^\pm = \lim_{t\to 1^\pm} T(t)$.

iii) (7pt) Disegnare il supporto della curva, con precisione intorno al punto $(1,0) \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $T =$ VEDI SOL. ; ii) $T^\pm =$ $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$; iii) Disegno: VEDI SOL

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = -\frac{x}{2} + \sqrt{1 + x^2 + xy + y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) (3pt) Calcolare tutti i punti critici di f .

ii) (3pt) Calcolare le derivate seconde di f.

iii) (3pt) Stabilire se f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

iv) (1pt) Stabilire se i punti critici sono punti di min/max locale/assoluto.

Risposte: i) p.ti critici: $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$	ii) der. seconde: VEDI SOL.
iii) convessa su $\mathbb{R}^2$: si/no sì	iv) min/max: min Assoluto

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Dato un parametro reale $\alpha \geq 0$, si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha-1}}\, dt$$

1) Calcolare gli $\alpha \geq 0$ per cui l'integrale converge semplicemente

2) Calcolare gli $\alpha \geq 0$ per cui converge assolutamente.

Risoluzione. 1) Integrale su $[0,1]$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha-1}}\, dt$$

Qui CS e CA sono equivalenti. Usiamo il confronto asintotico per $t \to 0^+$. Abbiamo $\sin t = t + o(t) = t(1+o(1))$ e quindi

$$\frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha-1}} = \frac{t\,(1+o(1))}{t^{\alpha-1}\,(t+1)} = \frac{1}{t^{\alpha-2}}\,(1+o(1))$$

Dunque l'integrale converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-2}}\, dt < \infty \iff \alpha - 2 < 1 \iff \alpha < 3.$$

Integrale su $[1,\infty)$:

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha-1}}\, dt$$

Osserviamo che $f(t) = \sin t$ ha primitiva limitata.

Studiamo $\phi(t) = t^{\alpha} + t^{\alpha-1}$ con $\phi'(t) = \alpha\, t^{\alpha-1} + (\alpha-1)\, t^{\alpha-2}$

Se $\alpha = 0$ abbiamo $\phi' < 0$. Se $\alpha > 0$ abbiamo che definitivamente $\phi'(t) > 0$ e inoltre $\lim_{t \to \infty} \phi(t) = +\infty$.

Quindi per $\alpha > 0$ la funzione $g(t)$ è decrescente ed infinitesima.

Per Abel-Dirichlet abbiamo che I_2 converge quando $\alpha > 0$.

Per $\alpha = 2$ si ha

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{t \sin t}{1+t}\, dt = \underbrace{\underbrace{\int_1^{\infty} \sin t\, dt}_{\text{non converge}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{-\sin t}{1+t}\, dt}_{\text{converge}}}_{\text{non converge}}$$

Risposta: CS $\Longleftrightarrow$ $0 < \alpha < 3$.

2) Studiamo la CA su $[1, \infty)$:

$$I_3 = \int_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\alpha} + t^{\alpha-1}}\, dt \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt < \infty$$

se $\alpha > 1$.

Per confronto: $\alpha > 1 \Rightarrow I_3$ converge.

Per $0 \leq \alpha \leq 1$ I_3 non converge (dettagli omessi).

Risposta: CA $\Longleftrightarrow$ $1 < \alpha < 3$.

ESERCIZIO Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, (t-1)^2 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

i) Discutere la regolarità di γ e calcolare il campo tangente unitario T

ii) Calcolare i limiti $\lim_{t \to 1^\pm} T(t) = T^\pm$

iii) Disegnare il supporto della curva.

Risoluzione. i) Derivata

$$\dot\gamma(t) = \left(\frac{2(1+t^2) - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2}, 2(t-1) \right)$$

$$= \left(\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \quad 2(t-1) \right) = 2(t-1) \left(\frac{-1-t}{(1+t^2)^2}, 1 \right)$$

Vediamo che $t=1$ è l'unico punto dove $\dot\gamma(t) = (0,0)$.

Per $t \neq 1$ si ha

$$T = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{2(t-1)}{|2(t-1)|} \cdot \frac{\left(-\frac{t+1}{(1+t^2)^2}, 1 \right)}{\sqrt{\frac{(t+1)^2}{(1+t^2)^4} + 1}}$$

$$= \frac{t-1}{|t-1|} \frac{\left(-(t+1), (1+t^2)^2 \right)}{\sqrt{(t+1)^2 + (1+t^2)^4}}$$

ii) limiti:

$$T^+ = \lim_{t\to 1^+} T(t) = \lim_{t\to 1^+} \frac{(-(t+1), (1+t^2)^2)}{\sqrt{(t+1)^2 + (1+t^2)^4}} = \frac{(-2,4)}{\sqrt{4+16}}$$

$$= \frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}$$

e analogamente $\quad T^- = -T^+ = \dfrac{(1,-2)}{\sqrt{5}}$

iii) Esprimiamo il supporto di γ come unione di due grafici cartesiani. Facciamo questa riparametrizzazione:

$$(t-1)^2 = s \geq 0 \iff t-1 = \pm\sqrt{s}$$

1° caso: $t = 1+\sqrt{s}$ $\quad$ 2° caso: $t = 1-\sqrt{s}$, sempre con $s \geq 0$.

1° caso, La prima coordinata di γ è

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2(1+\sqrt{s})}{1+(1+\sqrt{s})^2} = f(s)$$

Si ha $f(0) = 1$ ed $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$. Derivata:

$$f'(s) = \frac{\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{s}}\left[1+(1+\sqrt{s})^2\right] - 2(1+\sqrt{s})\cancel{2}(1+\sqrt{s})\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{s}}}{\left[1+(1+\sqrt{s})^2\right]^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{s}}\left[1+(1+\sqrt{s})^2 - 2(1+\sqrt{s})^2\right]}{[\qquad]^2} = \frac{1-(1+\sqrt{s})^2}{\sqrt{s}\,[\qquad]^2} \leq 0$$

Dunque f è decrescente.

2° caso: $t = 1-\sqrt{s}$. La prima coordinata è:

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2(1-\sqrt{s})}{1+(1-\sqrt{s})^2} = g(s)$$

Si ha $g(0) = 1$ e $\lim_{s \to \infty} g(s) = 0$. Derivata:

$$g'(s) = \frac{-\cancel{2}\cancel{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{s}}\left[1+(1-\sqrt{s})^2\right] + 2(1-\sqrt{s})\cancel{2}(1-\sqrt{s})\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{s}}}{\left[1+(1-\sqrt{s})^2\right]^2}$$

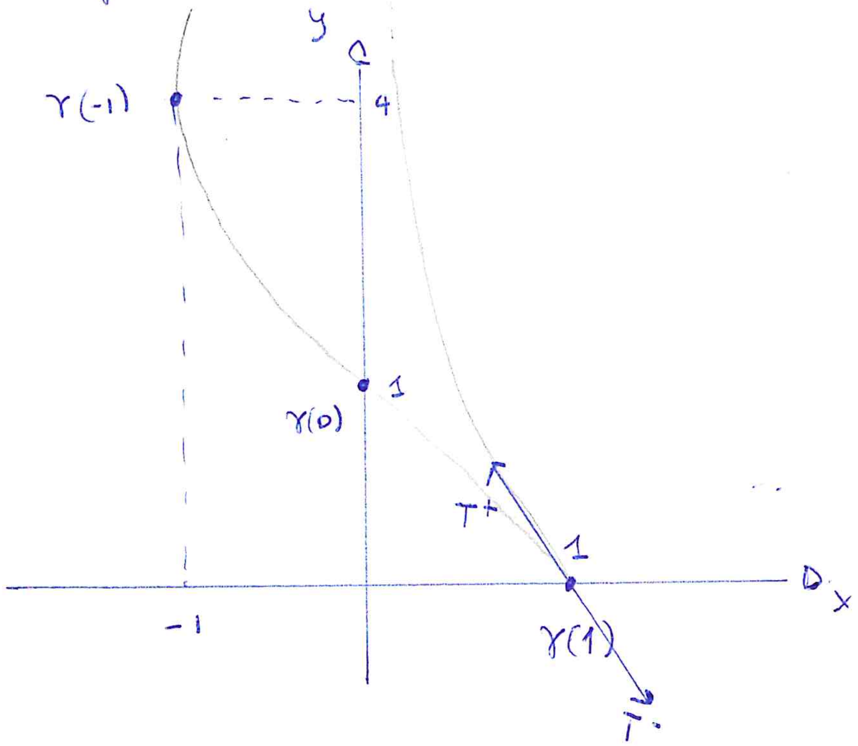
$$= \frac{-1-(1-\sqrt{s})^2 + 2(1-\sqrt{s})^2}{\sqrt{s}\,[\ldots]^2} = \frac{(1-\sqrt{s})^2 - 1}{\sqrt{s}\,[\ldots]^2}$$

$$= \frac{s - 2\sqrt{s}}{\sqrt{s}\,[\ldots]^2} = \frac{\sqrt{s}-2}{[\ldots]^2}$$

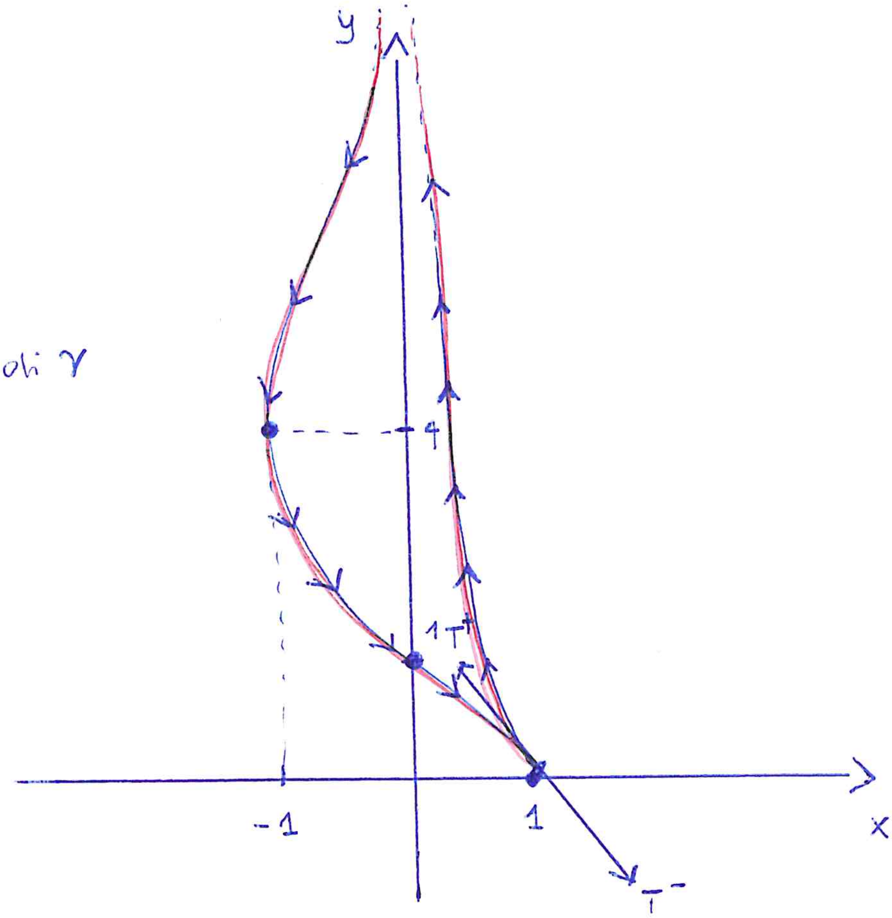
Dunque $g'(s) \geq 0$ per $s \geq 4$ e $g'(s) \leq 0$ per $s \in [0,4]$

$s = 4 \iff t = -1$

$\gamma(-1) = (-1, 4)$



supporto di γ



ESERCIZIO Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = -\frac{x}{2} + \sqrt{1+x^2+xy+y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Calcolare i punti critici di f.

2) Calcolare le derivate seconde di f.

3) Stabilire se f è convessa su $\mathbb{R}^2$.

4) Studiare la natura dei punti critici.

Risoluzione 1) Derivate parziali:

$$f_x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2x+y}{\sqrt{\ldots}}$$

$$f_y = \frac{1}{2} \frac{x+2y}{\sqrt{\ldots}}$$

Risolvo il sistema $\nabla f = (0,0)$. La seconda equazione fornisce $0 = f_y \Rightarrow x+2y=0$ ovvero $y = -\frac{x}{2}$.
Sostituiamo in $f_x = 0$:

$$0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2x - \frac{x}{2}}{\sqrt{1+x^2+x\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{x^2}{4}}}$$

da cui

$$0 = -\sqrt{1+x^2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)} + x\left(2-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{1+\frac{3}{4}x^2} = \frac{3}{2}x$$

Vediamo che deve essere $x>0$.

Passando ai quadrati: $1+\frac{3}{4}x^2 = \frac{9}{4}x^2 \iff \frac{6}{4}x^2 = 1$

da cui si trova ~~$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$~~ $x^2 = \frac{2}{3}$ e quindi $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

e quindi $y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$. C'è un solo punto critico.

2) $$f_{xx} = \frac{1}{2}\,\frac{2\sqrt{\dots} - (2x+y)\frac{1}{2}\frac{2x+y}{\sqrt{\dots}}}{\left[\sqrt{}\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2(1+x^2+xy+y^2) - \frac{1}{2}(2x+y)^2}{\left[\sqrt{\dots}\right]^3}$$

$$= \frac{2+\cancel{2x^2}+\cancel{2xy}+2y^2-\cancel{2x^2}-\cancel{2xy}-\frac{y^2}{2}}{2\left[\sqrt{\dots}\right]^3}$$

$$= \frac{2+\frac{3}{2}y^2}{2\left[\sqrt{\dots}\right]^3}$$

Per simmetria:

$$f_{yy} = \frac{2+\frac{3}{2}x^2}{2\left[\sqrt{\dots}\right]^3}$$

Infine

$$f_{xy} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\dots} - (2x+y)\frac{1}{2}\frac{x+2y}{\sqrt{\dots}}}{\left[\sqrt{\dots}\right]^2}$$

$$= \frac{1+x^2+xy+y^2-\frac{1}{2}(2x+y)(x+2y)}{2\left[\sqrt{\dots}\right]^3}$$

$$= \frac{1+\cancel{x^2}+xy+\cancel{y^2}-\cancel{x^2}-\frac{5}{2}xy-\cancel{y^2}}{2\left[\sqrt{\dots}\right]^3} = \frac{1-\frac{3}{2}xy}{2\left[\sqrt{\dots}\right]^3}$$

3) La matrice Hessiana è fatta così:

$$Hf(x,y) = \frac{1}{2\left[\sqrt{\ldots}\right]^3} \begin{pmatrix} 2+\frac{3}{2}y^2 & 1-\frac{3}{2}xy \\ 1-\frac{3}{2}xy & 2+\frac{3}{2}x^2 \end{pmatrix}$$

Vediamo che $\operatorname{tr} Hf(x,y) = \frac{1}{2\left[\sqrt{\ldots}\right]^3}\left(4+\frac{3}{2}(x^2+y^2)\right) > 0$

Il determinante è

$$\det Hf(x,y) = \frac{1}{4\left[\sqrt{\ldots}\right]^6}\left(\left(2+\frac{3}{2}x^2\right)\left(2+\frac{3}{2}y^2\right) - \left(1-\frac{3}{2}xy\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4\left[\sqrt{\ldots}\right]^6}\left(4+3(x^2+y^2)+\cancel{\frac{9}{4}x^2y^2} - 1 - \cancel{\frac{9}{4}x^2y^2} + 3xy\right)$$

$$= \frac{1}{4\left[\sqrt{\ldots}\right]^6}\, 3\left(1+x^2+y^2+xy\right)$$

$$= \frac{3}{4\left(1+x^2+xy+y^2\right)^2} > 0$$

Quindi f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

4) Il punto critico è un punto di minimo assoluto (per la convessità).

□

Analisi 2 – Canale 1

Nome, cognome, matricola: Scritto del 17/7/2019

Esercizio 1 Per $x > 0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{nx}.$$

i) (4pt) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) (4pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$

Esercizio 2 Dato un parametro reale $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \frac{\sin(x|y|^\alpha)}{x^2+y^4}, \qquad \text{se } x^2+y^4 \neq 0,$$

ed $f(0,0) = 0$.

i) (5pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) (5pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

Risposte: i) f cont. per $\alpha \in$; ii) f diff. per $\alpha \in$

Esercizio 3 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + \alpha y + \log(1+x^2+y^2).$$

Al variare di $\alpha > 0$ rispondere alle seguenti domande:

i) (2pt) Calcolare le soluzioni dell'equazione $\alpha y^2 + 2y + \alpha = 0$, quando esistono.

ii) (3pt) Per quali α esistono rispettivamente due, uno o nessun punto critico di f?

iii) (3pt) Calcolare traccia e determinante della matrice Hessiana di f in un generico punto del tipo $(0,y) \in \mathbb{R}^2$.

iv) (4pt) Stabilire se i punti critici di f sono punti di min/max locale/globale, punti di sella, oppure nessuno dei precedenti.

Risposte: i) $y =$	ii) punti critici:
iii) $Hf(0,y) =$	iv) ...

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Per $x>0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{nx}, \quad x>0.$$

i) Studiare la convergenza semplice.

ii) Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione. i) È una serie a termini positivi. Usiamo il criterio del confronto asintotico:

$$\log(1+t) = t + o(t) \quad \text{per } t \to 0.$$

Dunque

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n}\left(1+o(1)\right)$$

per $n \to \infty$

Dunque

$$\frac{1}{nx} \log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right) \quad \text{per } n \to \infty$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ segue che la serie converge $\forall x>0$

ii) Usiamo il criterio di Weierstrass. Sappiamo che $\log(1+t) \leq t \quad \forall t>-1$. Dunque

$$0 \leq \frac{1}{nx} \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x>0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Dunque c'è CU su tutto $(0,\infty)$. □

ESERCIZIO Per $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x|y|^\alpha)}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ per cui f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ per cui f sia differenziabile in $(0,0)$.

Risoluzione i) Conviene guardare la funzione lungo curve dove x^2 e y^4 hanno lo stesso ordine di infinitesimo. Ad esempio $x = t^2$ ed $y = mt$ con $m \in \mathbb{R}$ parametro e $t \to 0^+$. Si ha

$$f(t^2, mt) = \frac{\sin(t^{2+\alpha}|m|^\alpha)}{t^4(1+m^4)}, \qquad t > 0$$

Dunque

$$\lim_{t \to 0^+} f(t^2, mt) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2+\alpha > 4 \iff \alpha > 2 \\ |m|^\alpha & \text{se } \alpha = 2 \\ \text{non esiste finito} & \text{se } \alpha < 2. \end{cases}$$

Quindi:

$$\alpha \leq 2 \implies f \text{ \underline{NON} continua in } (0,0).$$

Proviamo che per $\alpha > 2$ f è continua in $(0,0)$:

$$\left| \frac{\sin(x|y|^\alpha)}{x^2+y^4} \right| \leq \frac{|x|\,|y|^\alpha}{x^2+y^4} \leq \frac{(x^2+y^4)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^4)^{\frac{\alpha}{4}}}{x^2+y^4} =$$

$$= (x^2+y^4)^{\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{\text{per } \alpha>2} 0 .$$

ii) Per $xy=0$ (assi) si ha $f \equiv 0$. Quindi $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Il test della differenziabilità è dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\boxed{\frac{\sin(x|y|^\alpha)}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}}}_{= g(x,y)} \overset{?}{=} 0 .$$

Proviamo come sopra con $x = t^2$ e $y = mt$ $(t>0)$:

$$g(t^2, mt) = \frac{\sin\left(t^{2+\alpha}|m|^\alpha\right)}{t^4(1+m^4)\,t\sqrt{t^2+m^2}}$$

Con $m \neq 0$ vediamo che

$$2+\alpha \leq 5 \implies \lim_{t\to 0^+} g(t^2, mt) \neq 0$$

Dunque si ha certamente:

$$\alpha \leq 3 \implies f \text{ NON è differenziabile in } (0,0).$$

Cerchiamo di vedere se per $\alpha > 3$ si ha differenziabilità:

$$|g(x,y)| \leq \frac{|x|\,|y|^\alpha}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\text{usato: } |\sin t| \leq |t|)$$

Qui non è chiaro come procedere con le stime.

Primo tentativo:

$$\frac{|x|\,|y|^\alpha}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{|y|^\alpha}{x^2+y^4}}_{\leq \frac{|y|^\alpha}{y^4} = |y|^{\alpha-4}} \leq |y|^{\alpha-4}$$

Deduciamo che

$$\alpha > 4 \implies f \text{ è differenziabile in } (0,0).$$

Purtroppo non sembra bastare.

Secondo tentativo:

$$\frac{|x|\,|y|^{\alpha}}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \cdot \frac{|x|\,|y|^{\alpha-1}}{x^2+y^4} \leq$$

$$\leq \frac{(x^2+y^4)^{\frac{1}{2}}\,(x^2+y^4)^{\frac{\alpha-1}{4}}}{(x^2+y^4)} = (x^2+y^4)^{\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{4}}$$

Questo prova che

$$\alpha > 3 \implies f \text{ è differenziabile in } (0,0).$$

$\square$

ESERCIZIO Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro dato e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Nel compito: solo $\alpha > 0$

$$f(x,y) = x^2 + \alpha y + \log(1 + x^2 + y^2).$$

i) Al variare di α ~~studiare~~ calcolare tutti i punti critici di f.

ii) Dire se i punti critici trovati sono punti di max\min locale\globale.

Risoluzione i) Le derivate parziali di f sono

$$\begin{cases} f_x = 2x + \dfrac{2x}{1+x^2+y^2}, \\ f_y = \alpha + \dfrac{2y}{1+x^2+y^2}. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, Abbiamo

$$f_x = 0 \iff x = 0.$$

Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione si trova

$$0 = \alpha + \frac{2y}{1+y^2} = \frac{\alpha(1+y^2) + 2y}{1+y^2}$$

e si arriva alla equazione $\alpha y^2 + 2y + \alpha = 0$.

Per $\alpha = 0$ c'è la sola soluzione $y = 0$.

Il discriminante del polinomio è $\Delta = 4-4\alpha^2 = 4(1-\alpha^2)$.

Dunque $\Delta < 0 \iff |\alpha| > 1$. In questo caso non ci sono soluzioni e quindi non ci sono punti critici. Se $|\alpha| = 1$ si ha $\Delta = 0$ e si trova la soluzione doppia $y=-1$ quando $\alpha = +1$ ed $y = +1$ quando $\alpha = -1$.

Studiamo il caso $0 < |\alpha| < 1$. Si trovano due soluzioni:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\alpha^2}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}.$$

Dunque:

$\alpha = 0$	unico p.to critico	$P = (0,0)$
$\alpha = 1$	" " "	$P = (0,-1)$
$\alpha = -1$	" " "	$P = (0,+1)$
$0<\lvert\alpha\rvert<1$	due punti critici	$P_\pm = \left(0, \frac{-1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)$.

ii) Dobbiamo studiare la matrice Hessiana in questi punti critici. Derivate seconde:

$$f_{xx} = 2 + 2\frac{1+x^2+y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 2+2\frac{1-x^2+y^2}{(\ \cdots\ )^2}$$

$$f_{yy} = 2\frac{1+x^2+y^2-2y^2}{(\ \cdots\ )^2} = 2\frac{1+x^2-y^2}{(\ \cdots\ )^2}$$

$$f_{xy} = \frac{-4xy}{(\ \dots\ )^2}$$

Nel caso che $x=0$ queste formule si semplificano

e troviamo

$$Hf(0,y) = \begin{pmatrix} 2 + 2\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2} & 0 \\ 0 & 2\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Vediamo subito che

$$\operatorname{tr} Hf(0,y) = 2 + \frac{4}{(1+y^2)^2} > 0 \quad \forall y.$$

Inoltre:

$$\det Hf(0,y) \geq 0 \iff 1-y^2 \geq 0 \iff y^2 \leq 1.$$

Prime conclusioni:

i) Se $\alpha = 0$, $P=(0,0)$ verifica $Hf(0,0) > 0$ e quindi è un minimo locale stretto.

2) Se $\alpha = \pm 1$ il punto critico è $(0, \mp 1)$.

Sfortunatamente si trova $\det Hf(0, \pm 1) = 0$, cosa che non permette di dedurre nulla.

Studiamo meglio

$$f_y(0,y) = \pm 1 + \frac{2y}{1+y^2}$$

$$= \pm \frac{1+y^2 \pm 2y}{1+y^2} = \pm \frac{(1 \pm y)^2}{1+y^2}$$

Vediamo che $f_y(0,y)$ ha segno costante.

Quindi $y \mapsto f(0,y)$ è monotona.

Quindi i punti $(0, \mp 1)$ non sono né min né max locali.

3) Rimane il caso $0 < |\alpha| < 1$. In questo caso si ha

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$$ e quindi

$$y^2 = \frac{1+1-\alpha^2 \mp 2\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2}$$

Studiamo la disequazione $y^2 < 1$:

$$\frac{2-\alpha^2 \mp 2\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2} < 1 \iff 1-\alpha^2 \mp \sqrt{1-\alpha^2} < 0$$

Col segno $-$ si trova:

$$1-\alpha^2 - \sqrt{1-\alpha^2} < 0 \iff 1-\alpha^2 < \sqrt{1-\alpha^2}$$
$$\iff \sqrt{1-\alpha^2} < 1$$
$$\iff 1-\alpha^2 < 1$$
$$\iff \alpha^2 > 0 \qquad \text{VERO.}$$

Quindi il punto critico col segno $-$ è un minimo locale.

Col segno $+$ si trova

$$1-\alpha^2 + \sqrt{1-\alpha^2} < 0 \qquad \text{FALSO}$$

In effetti si ha $1-\alpha^2+\sqrt{1-\alpha^2} > 0$, che vuol dire che il determinante è strettamente negativo.

Quindi il punto critico col segno $+$ è un punto di sella.

$\square$

Osserviamo che per $\alpha \neq 0$ e con $x=0$ si ha $\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = \pm\infty$ con segno opposto.

Quindi f non ha minimi assoluti per $\alpha \neq 0$.

Per $\alpha = 0$, $P=(0,0)$ è chiaramente un minimo assoluto.

$\square$

Analisi 2 – Canale 1

Nome, cognome, matricola: Scritto del 28/8/2019

Esercizio 1 Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{x^n + n^4}, \qquad x \geq 0.$$

i) (5pt) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) (5pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$ $[0,\infty)$; ii) CU per $x \in$ $[0,\infty)$

Esercizio 2 (10pt) Dato l'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, sia $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x + y + \log\Big(\frac{1}{2} + x^2 + y^2\Big).$$

Calcolare l'insieme immagine $f(K) \subset \mathbb{R}$.
Servono i numeri $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ e poi $\log(3/2) = 0.4054\ldots$

Risposta: $f(K) =$ $[-\sqrt{2} + \log 3/2 , \sqrt{2} + \log 3/2]$

Esercizio 3 Nel primo quadrante $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0\}$ si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x(x+y)}dx - \frac{\alpha}{x+y}dy,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) (3pt) Calcolare tutti i valori di α tali che ω sia esatta in A.

ii) (5pt) Per tali α calcolare un potenziale $f \in C^1(A)$ di ω in A.

iii) (2pt) Fissato $T > 1$, sia $\gamma_T : [1,T] \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma_T(t) = \Big(t, \frac{1}{t}\Big), \qquad t \in [1,T].$$

Per α come sopra (ω esatta) calcolare il limite

$$L = \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma_T} \omega.$$

Risposte: i) $\alpha =$ 1 ii) $f =$ $\log\Big(\frac{x}{x+y}\Big)$ iii) $L =$ $\log 2$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Per $x \geq 0$ consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{x^n + n^4}, \qquad x \geq 0.$$

i) Studiare la convergenza puntuale.

ii) Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione i) Per $x = 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty.$$

In effetti, per $0 \leq x \leq 1$ si ha

$$\frac{x^{\frac{n}{2}}}{x^n + n^4} \leq \frac{1}{n^4} \qquad \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall x \in [0,1] \end{array}$$

Per il criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $[0,1]$.

Per $x > 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{x^n + n^4} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 < \infty$$

Quindi c'è CP per ogni $x \geq 0$.

ii) Studiamo le funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{x^{n/2}}{x^n + n^4}, \qquad x \geq 0.$$

Chiaramente $\phi_n(0) = 0$ e $\phi_n(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Dunque c'è un punto di massimo.

La derivata è

$$\phi_n'(x) = \frac{(x^n+n^4)\frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}-1} - x^{\frac{n}{2}} \cdot n x^{n-1}}{(x^n+n^4)^2}$$

$$= n x^{\frac{n}{2}-1} \frac{\frac{1}{2}(x^n+n^4) - x^n}{(x^n+n^4)^2}$$

$$= \frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}-1} \frac{n^4 - x^n}{(x^n+n^4)}.$$

Nel punto di massimo deve essere $\phi_n'(x) = 0$

e quindi il punto di massimo verifica $x^n = n^4$.

Dunque

$$\max_{x\geq 0} \phi_n(x) = \phi_n(n^{4/n}) = \frac{n^2}{n^4+n^4} = \frac{1}{2n^2}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, per il Criterio di Weierstrass

c'è convergenza uniforme su $x \geq 0$.

$\square$

ESERCIZIO Dato $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ sia $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x+y + \log\left(\frac{1}{2} + x^2+y^2\right).$$

Calcolare $f(K) \subset \mathbb{R}$.

Risoluzione. Siccome K è compatto ed f è continua allora $f(K) \subset \mathbb{R}$ è compatto.

Siccome K è convesso ed f è continua allora $f(K) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo.

Quindi $f(K)$ è un intervallo compatto.

Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_0, x_1 \in K$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x),$$

$$f(x_1) = \max_{x \in K} f(x).$$

Dunque $f(K) = [f(x_0), f(x_1)]$.

Cerchiamo i punti critici interni a K (in $\mathrm{int}(K)$):

$$\begin{cases} f_x = 1 + \dfrac{2x}{\frac{1}{2}+x^2+y^2} = 0 \\[2ex] f_y = 1 + \dfrac{2y}{\frac{1}{2}+x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si trova $x = y$, e quindi

$$1 + \frac{2x}{\frac{1}{2} + 2x^2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2} + 2x^2 + 2x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(1 + 2x)^2 = 0$$

E dunque $x = -1/2$. C'è un solo punto critico

$$P_0 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

É interno a K ($P_0 \in \operatorname{int} K$).

Questo implica che almeno uno dei punti x_0, x_1 deve trovarsi in ∂K. Intanto osserviamo che

$$f(P_0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= -1 + \log 1 = -1.$$

Sulla frontiera di K è $x^2+y^2=1$, e qui la funzione f diventa $f(x,y) = x+y+\log\frac{3}{2}$.

Parametrizziamo la frontiera $x = \cos t$ e $y = \sin t$ con $t \in [0, 2\pi)$. Troviamo la funzione

$$\phi(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t + \log\frac{3}{2}$$

La sua derivata è $\phi'(t) = -\sin t + \cos t$

e quindi $\phi'(t) = 0 \iff \operatorname{tg} t = 1$ e quindi $t = \pi/4$ oppure $t = \frac{5}{4}\pi$.

Nel caso $t = \pi/4$ si trova il punto

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

dove si ha

$$f(P_1) = \sqrt{2} + \log\frac{3}{2}$$

Nel caso $t = \frac{5}{4}\pi$ si trova il punto

$$P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

dove si ha

$$f(P_2) = -\sqrt{2} + \log\frac{3}{2} = -1.4142\ldots + 0.4054\ldots$$

$$= -1.0088\ldots < -1.$$

Quindi P_1 è il punto massimo su K, mentre P_2 è il punto di minimo su K.

Conclusione:

$$f(K) = \left[-\sqrt{2} + \log\frac{3}{2}, \; \sqrt{2} + \log\frac{3}{2}\right].$$

$\square$

ESERCIZIO Nel primo quadrante $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0\}$ si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x(x+y)}\,dx - \frac{\alpha}{x+y}\,dy .$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) Determinare tutti gli α tali che ω sia esatta su A.

ii) Per tali α calcolare un potenziale di ω

iii) Per $T > 1$ si consideri la curva $\gamma_T : [1, T] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma_T(t) = \left(3t, \frac{1}{t} \right), \quad t \in [1,T].$$

Per α come sopra, calcolare il limite

$$\lim_{T \to \infty} \int_{\gamma_T} \omega .$$

Risoluzione. i) A è convesso e dunque contraibile. Per il Teorema di Poincaré, ω è esatta se e solo se è chiusa in A. Controlliamo la chiusura:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x(x+y)} \right) \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\alpha}{x+y} \right)$$

ovvero

$$\frac{x(x+y) - yx}{x^2 (x+y)^2} = \frac{\alpha}{(x+y)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{(x+y)^2} = \frac{\alpha}{(x+y)^2}$$

che è verificata in A se e solo se $\alpha = 1$.

Dunque: ω esatta in $A \iff \alpha = 1$.

ii) Calcoliamo un potenziale di ω in A, dove

$$\omega = \frac{y}{x(x+y)} dx - \frac{1}{x+y} dy .$$

Cerchiamo $f \in C^1(A)$ tale che

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{y}{x(x+y)} \\ f_y = - \dfrac{1}{x+y} . \end{cases}$$

Integriamo la seconda equazione

$$f(x,y) = - \int \frac{1}{x+y} dy = - \log |x+y| + C(x)$$

$$= - \log (x+y) + C(x)$$

da cui si trova: $$f_x = -\frac{1}{x+y} + c'(x).$$

Confrontandolo con la prima equazione:

$$-\frac{1}{x+y} + c'(x) = \frac{y}{x(x+y)}$$

da cui

$$c'(x) = \frac{1}{x+y} + \frac{y}{x(x+y)} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

e quindi $c(x) = \log|x| + c_0 = \log x + c_0$.

Scegliamo $c_0 = 0$ e troviamo

$$f(x,y) = -\log(x+y) + \log x = \log\left(\frac{x}{x+y}\right).$$

iii) Siccome ω è esatta, sappiamo che

$$\int_{\gamma_T} \omega = f(\gamma_T(T)) - f(\gamma_T(1))$$

$$= f\left(T, \frac{1}{T}\right) - f(1,1)$$

$$= \log\left(\frac{T}{T + \frac{1}{T}}\right) - \log\left(\frac{1}{1+1}\right)$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{} \log\left(\frac{1}{1+0}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 2.$$

$\square$

Analisi 2 – Canale 1

Nome, cognome, matricola: Scritto del 16/9/2019

Esercizio 1 Per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha(2+\cos t)}dt$$

i) (5pt) Stabilire per quali $\alpha \geq 0$ l'integrale converge semplicemente.

ii) (5pt) Stabilire per quali $\alpha \geq 0$ l'integrale converge assolutamente.

Risposte: i) CA per $\alpha \in$; ii) CA per $\alpha \in$

Esercizio 2 (10pt) Dati $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y+\alpha \log x},$$

Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su A.

Risposta: $\alpha \in$

Esercizio 3 Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ data dalla equazione polare $\varrho = \big(\sin(2\vartheta)\big)^2$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

i) (2pt) Studiare la periodicità ed eventuali simmetrie di ϱ.

ii) (2pt) Studiare la regolarità di γ.

iii) (3pt) Detto T il campo tangente unitario a γ, calcolare

$$T^+(0) = \lim_{\vartheta \to 0^+} T(\vartheta).$$

iv) (3pt) Disegnare il supporto di γ, con precisione intorno al punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) periodo di $\varrho =$ ii) γ regolare per $\vartheta \neq$ iii) $T^+(0) =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Quindi l'integrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha (2+\cos t)} dt$ converge $\iff \alpha < 2$.

Conclusione: c'è convergenza semplice per $0 < \alpha < 2$.

Per $\alpha = 0$ osserviamo che

$$\int_0^T \frac{\sin t}{2+\cos t} dt = -\log(2+\cos T) + \log 3$$

che NON ha limite per $T \to \infty$

Dunque: CS $\iff 0 < \alpha < 2$.

2) Come sopra si vede che $\int_0^1 \left| \frac{\sin t}{t^\alpha (2+\cos t)} \right| dt < \infty$ se e solo se $\alpha < 2$.

Studiamo la CA su $[1, \infty)$:

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin t}{t^\alpha (2+\cos t)} \right| dt \leq \int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt < \infty \quad \text{per } \alpha > 1$$

Per $\alpha \leq 1$ abbiamo

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin t}{t^\alpha (2+\cos t)} \right| dt \geq \frac{1}{3} \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt = \infty$$

VISTO IN CLASSE.

Conclusione: CA $\iff 1 < \alpha < 2$.

□

ESERCIZIO. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$f : A \to \mathbb{R}$
$$f(x,y) = e^{x^2+y+\alpha \log x}$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f è convessa su A.

Rissoluzione. Dobbiamo trovare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui

$$Hf(x,y) \geq 0 \quad \text{per ogni } (x,y) \in A.$$

Conti:

$$f_x = f \cdot \left(2x + \frac{\alpha}{x}\right)$$

$$f_y = f$$

$$f_{xx} = f\left(2x + \frac{\alpha}{x}\right)^2 + f\left(2 - \frac{\alpha}{x^2}\right)$$

$$f_{xy} = f\left(2x + \frac{\alpha}{x}\right) = f_{yx}$$

$$f_{yy} = f$$

Dunque la matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = f(x,y) \begin{pmatrix} \left(2x+\frac{\alpha}{x}\right)^2 + 2 - \frac{\alpha}{x^2} & 2x + \frac{\alpha}{x} \\ 2x + \frac{\alpha}{x} & 1 \end{pmatrix}$$

E quindi

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = f(x,y)\left[\left(2x+\frac{\alpha}{x}\right)^2 + 3 - \frac{\alpha}{x^2}\right]$$

$$\det Hf(x,y) = f(x,y)^2\left[\cancel{\left(2x+\frac{\alpha}{x}\right)^2} + 2 - \frac{\alpha}{x^2} - \cancel{\left(2x+\frac{\alpha}{x}\right)^2}\right]$$

$$= f(x,y)^2\left(2-\frac{\alpha}{x^2}\right)$$

Imponiamo le condizioni

$$\begin{cases} \operatorname{tr} Hf(x,y) \geq 0 & \forall x>0 \\ \det Hf(x,y) > 0 & \forall x>0 \end{cases}$$

Siccome $f>0$, la seconda fornisce:

$$2-\frac{\alpha}{x^2} > 0 \qquad \forall x>0$$

Che è verificata se e solo se $\alpha \leq 0$.

Inoltre: $\alpha \leq 0 \Rightarrow \operatorname{tr} Hf(x,y) > 0 \quad \forall x>0$.

Conclusione: f convessa su $A \iff \alpha \leq 0$.

$\square$

ESERCIZIO Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ data dalla equazione polare $\rho = (\sin(2\theta))^2$ con $\theta \in [0, 2\pi]$.

i) Studiare la periodicità e le simmetrie di $\rho(\theta)$

ii) Studiare la regolarità di γ e calcolare il campo tangente unitario T.

iii) Calcolare $T^+(0) = \lim_{\theta \to 0^+} T(\theta)$

iv) Disegnare il supporto di γ con precisione intorno al punto $O \in \mathbb{R}^2$.

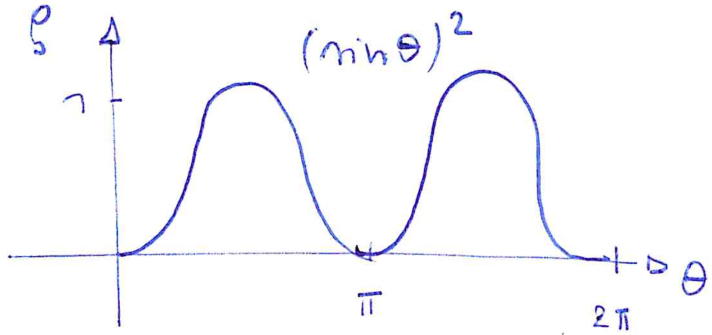
Risoluzione i) $\sin t$ 2π- periodica

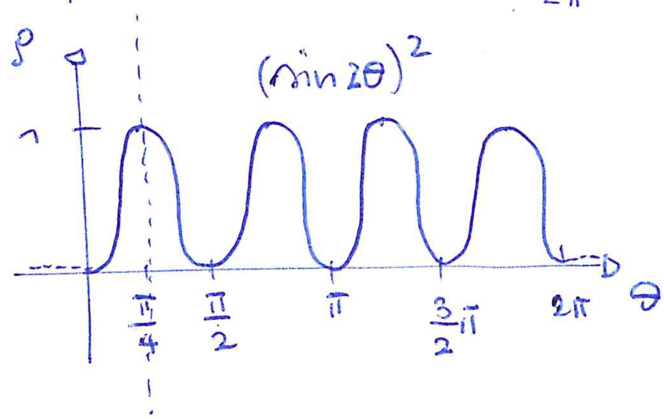
$(\sin t)^2$ è π-periodica

$(\sin 2t)^2$ è $\frac{\pi}{2}$- periodica.

c'è simmetria rispetto la retta $\theta = \frac{\pi}{4}$!

piano θ-ρ





ii) Abbiamo $\dot{\rho} = 2 \sin 2\theta \cos(2\theta) \cdot 2 = 4 \sin 2\theta \cos 2\theta$

Sappiamo che

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} = \sqrt{(\sin 2\theta)^4 + 16 (\sin 2\theta)^2 (\cos 2\theta)^2}$$

$$= |\sin 2\theta| \underbrace{\sqrt{(\sin 2\theta)^2 + 16 (\cos 2\theta)^2}}_{\neq 0}$$

Quindi $|\dot{\gamma}| = 0 \iff \sin 2\theta = 0 \iff \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

(e poi $\theta = \pi$)

iii)

Abbiamo

$$\gamma(\theta) = (\sin 2\theta)^2 (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$= \rho (\cos\theta, \sin\theta)$$

e quindi

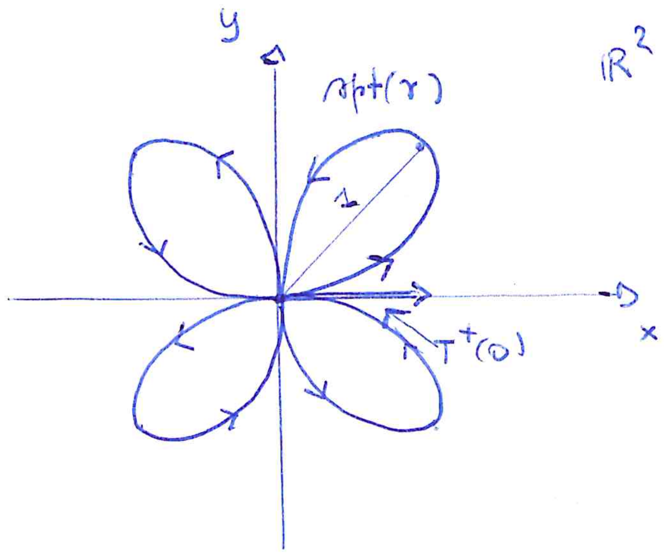
$$\dot{\gamma} = \dot{\rho} (\cos\theta, \sin\theta) + \rho (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} = \frac{\dot{\rho}}{|\dot{\gamma}|} (\cos\theta, \sin\theta) + \frac{\rho}{|\dot{\gamma}|} (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\underset{(\theta \to 0^+)}{\overset{\theta > 0}{=}} \underbrace{\frac{4 \cancel{\sin 2\theta} \cos 2\theta}{\cancel{\sin 2\theta} \cdot \sqrt{\ldots}}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{(\cos\theta, \sin\theta)}_{\downarrow \atop (1,0)} + \underbrace{\frac{(\sin 2\theta)^2 (-\sin\theta, \cos\theta)}{\sin 2\theta \sqrt{\ldots}}}_{\downarrow \atop (0,0)}$$

Quindi $\quad T^+(0) = \lim_{\theta \to 0^+} \dfrac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(0)|} = (1, 0)$

iv) Per $\theta = \pi/4$ ρ è massimo. Dunque:



Analisi 2 – Canale 1

Nome, cognome, matricola: Scritto del 23/1/2020

Esercizio 1 (10pt) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log((2n)!)]^\alpha}.$$

Risposte: La serie converge se e solo se $\alpha \in$

Esercizio 2 Dato un parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{\sin\left(\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^\alpha\right)}{|x-y|} \qquad \text{se } x \neq y,$$

ed $f(x,y) = 0$ se $x = y$.

i) (6pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) (4pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) continua se $\alpha \in$	; ii) differenziabile se $\alpha \in$

Esercizio 3 Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ data dalla equazione polare $\varrho = \left|\cos(3\vartheta/2)\right|^{2/3}$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

i) (2pt) Studiare la periodicità ed eventuali simmetrie di ϱ.

ii) (2pt) Studiare la regolarità di γ.

iii) (2pt) Detto T il campo tangente unitario a γ, calcolare

$$T^- = \lim_{\vartheta \to \pi/3^-} T(\vartheta).$$

iv) (3pt) Disegnare il supporto di γ, con precisione intorno al punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

v) (1pt) Provare che γ ha lunghezza finita.

Risposte: i) periodo di $\varrho =$	ii) γ regolare per $\vartheta \neq$	iii) $T^- =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^\alpha}.$$

Risoluzione. Per $\alpha \leq 0$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^\alpha} = +\infty$$

È violata la condizione necessaria di convergenza e dunque la serie diverge.

Studiamo il caso $\alpha > 0$.

Abbiamo

$$\log(2n)! = \log(2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1)$$

$$= \sum_{i=2}^{2n} \log(i)$$

$$\geq \sum_{i=n}^{2n} \log(i) \qquad n \geq 2$$

$$\geq \log(n) \cdot (2n-(n-1))$$

$$= (n+1)\log(n)$$

Dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^\alpha} \overset{(\alpha>0)}{\leq} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^\alpha (\log n)^\alpha}$$

Per Confronto Asintotico l'ultima serie converge se e solo se converge

$$\circledast \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}(\log n)^{\alpha}}$$

Per $\alpha - 1 < 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}(\log n)^{\alpha}} = \infty$

e dunque la serie diverge.

Per $\alpha - 1 \geq 0$ il termine generale è decrescente e possiamo usare il Criterio di Cauchy per dire che la serie $\circledast$ converge se e solo se converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^{\alpha-1}(\log 2^n)^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-2}\, n^{\alpha} (\log 2)^{\alpha}}$$

Se $\alpha - 2 < 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-2}\, n^{\alpha}} = +\infty$

e la serie non converge.

Se $\alpha - 2 \geq 0$ la serie invece converge, ed è facile da vedere.

Conclusione raggiunta per confronto:

$$\alpha \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}(\log n)^{\alpha}} < +\infty .$$

Rimane da studiare il caso $0 < \alpha < 2$

Abbiamo $\log(2n)! \leq 2n \cdot \log(2n)$ e

dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^{\alpha}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(2n)^{\alpha}(\log 2n)^{\alpha}} = \text{I}$$

Con conti del tutto analoghi ai precedenti

si vede che

$$0 < \alpha < 2 \quad \Rightarrow \quad \text{I} = +\infty .$$

Risposta finale: Serie converge $\Leftrightarrow$ $\alpha \geq 2$.

$\square$

ESERCIZIO Per $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come
$$f(x,y) = \frac{\sin(|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^\alpha)}{|x-y|} \quad \text{se} \quad x \neq y$$
ed $f(x,y) = 0$ se $x = y$.

1) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione. 1) Per $y = 0$ si ha
$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(|x|^{\frac{\alpha}{2}})}{|x|}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|^{\frac{\alpha}{2}}}{|x|} \cdot \frac{\sin(|x|^{\frac{\alpha}{2}})}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}}$$
$$= \lim_{x \to 0} |x|^{\frac{\alpha}{2} - 1} = 0 \iff \frac{\alpha}{2} > 1$$
Dunque: $\alpha \leq 2 \Rightarrow f$ non è continua in 0.

Usando $|\sin t| \leq |t|$:
$$\frac{\sin(|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^\alpha)}{|x-y|} \leq \frac{|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^\alpha}{|x-y|} = \frac{||x| - |y||^\alpha}{|x-y|(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^\alpha} \leq$$
$$\leq \frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^\alpha} = \frac{|x-y|^{\alpha-1}}{(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^\alpha}$$

Usando $|x-y| \leq |x|+|y|$ e

$$\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x|+|y|}$$

si arriva a

$$\frac{\sin\left(\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|^{\alpha}\right)}{|x-y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^{\alpha-1}}{(|x|+|y|)^{\alpha/2}} = (|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Per confronto deduciamo che

$$\frac{\alpha}{2}-1>0 \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

Dunque

$$f \text{ cont. in } 0 \iff \alpha>2.$$

2) Vediamo quando f ha le derivate parziali in 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big(f(x,0)-\underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(0,0)}}\Big)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\,\frac{\sin(|x|^{\frac{\alpha}{2}})}{|x|}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha/2}}{x\,|x|} = 0 \text{ se e solo se } \frac{\alpha}{2}>2$$

ovvero: $\alpha>4$.

Se $\alpha \leq 4$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste e dunque f non è diff. in 0. Analogamente per $\alpha > 4$ si ha $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Per il test della differenziabilità, f è diff.bile in 0 se

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right|^{\alpha} \right)}{\sqrt{x^2+y^2}\ |x-y|}$$

Come sopra, si stima

$$\frac{\left| \sin\left(\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right|^{\alpha} \right) \right|}{\sqrt{x^2+y^2}\ |x-y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\uparrow}{\leq} \sqrt{2}\, \frac{(|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{|x|+|y|} \leq$$

Usato: $\sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)$

$$\leq \sqrt{2}\,(|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-2} \xrightarrow{\text{se } \alpha > 4} 0 .$$

Conclusione: f è diff.bile in 0 $\iff$ $\alpha > 4$.

$\square$

ESERCIZIO Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare $\rho(\theta) = \left| \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right|^{\frac{2}{3}}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$.

1) Discutere periodicità e simmetrie di ρ

2) Studiare la regolarità di γ

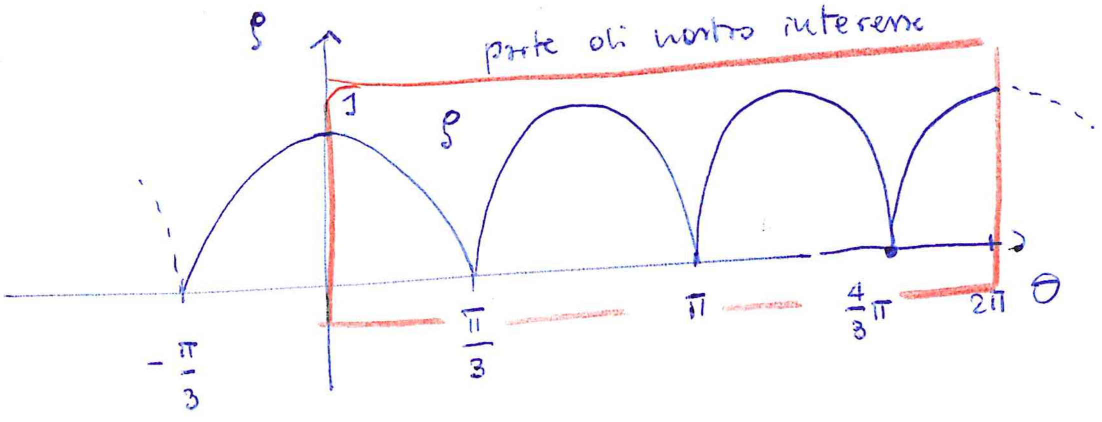
3) Detto T il campo tangente unitario, calcolare

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}^-} T(\theta)$$

4) Disegnare il supporto di γ

5) Provare che γ ha lunghezza finita.

Risoluzione 1) Pensiamo $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. La ρ è pari: $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$. Siccome $|\cos\theta|$ è π-periodica, $\left|\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right|^{2/3}$ è $\frac{2}{3}\pi$-periodica:



2) Si calcola per $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$:

$$\rho = \left(\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \quad e \quad \dot{\rho} = -\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

Si ha dunque

$$|\dot{r}| = \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} = \sqrt{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Vediamo che $|\dot{r}| \neq 0$ per $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.
Qui r è regolare. Per $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$ r non è regolare.

3) Abbiamo $r(\theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$

$$\dot{r} = \dot{\rho}(\cos\theta, \sin\theta) + \rho(-\sin\theta, \cos\theta)$$

Dunque

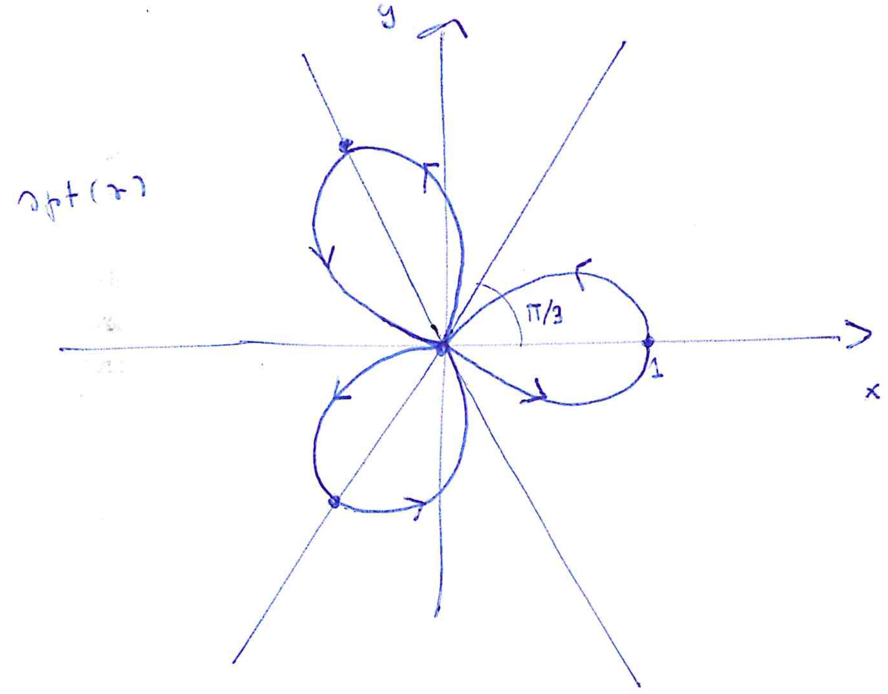
$$T = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} = \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[-\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)(\cos\theta, \sin\theta) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(-\sin\theta, \cos\theta)\right]$$

Dunque

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}^-} T(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}^-} -\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = -\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3) Disegniamo il supporto per $\theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ e poi lo replichiamo altre 2 volte per periodicità:



4) Basta vedere che la lunghezza su $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ è finita. Anzi basta guardare il tratto per $\theta \in [0, \pi/3]$

Dalla formula della lunghezza:

$$L(\gamma|_{[0,\pi/3)}) = \int_0^{\pi/3} |\gamma'|\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(\frac{3\theta}{2})^{1/3}}\, d\theta$$

Sviluppo di Taylor in $\theta = \frac{\pi}{3}$:

$$\cos\frac{3\theta}{2} = \cos\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{2}(-1)\sin\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$+ o\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 0 + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + o\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

Dunque per Confronto Asintotico:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(\frac{3\theta}{2})^{1/3}}\, d\theta < \infty \iff \int_0^{\pi/3} \frac{1}{(\frac{\pi}{3}-\theta)^{1/3}}\, d\theta < \infty$$

VERO

perché $\frac{1}{3} < 1$.

$\square$