# Analisi Reale

Scritto del 5 Febbraio 2015

---

**Esercizio 1** (10 punti) Stabilire se la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log^2(x/2)} \sin\big(\log x\big), & \text{se } x \in (0,1], \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è assolutamente continua su $[0,1]$.

**Esercizio 2** (10 punti) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\log(x+t)}{1+t} dt, \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che $f$ è continua su $[0,1]$.

ii) Provare che $f$ è derivabile in $]0,1]$.

iii) Stabilire se $f' \in L^1(0,1)$.

**Esercizio 3** (10 punti) Siano $E, E_n \subset [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, insiemi misurabili e siano $f = \chi_E$ ed $f_n = \chi_{E_n}$ le rispettive funzioni caratteristiche. Provare che per un qualsiasi $1 \leq p < \infty$ sono equivalenti:

A) $f_n \to f$ in $L^p(0,1)$ forte.

B) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(0,1)$ debole.

---

2.30 ore a disposizione