Analisi Reale

Scritto del 23 Febbraio 2015

Esercizio 1 (10 punti) Sia $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ e sia $f : Q \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}} & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Determinare tutti i $p \in [1, \infty)$ tali che $f \in L^p(Q)$ e per tali valori calcolare $\|f\|_p$.

Esercizio 2 Per ciascun insieme $A \subset [0,1]$ definiamo

$$\mu(A) = \sqrt{\mathscr{L}^1(A)} \quad \text{e} \quad \nu(A) = \sqrt{\operatorname{diam}(A)} = \sup\{\sqrt{|x-y|} \in \mathbb{R} : x, y \in A\},$$

dove $\mathscr{L}^1$ è la misura esterna di Lebesgue e dichiariamo $\nu(\emptyset) = 0$.

i) (8 punti) Stabilire se μ e ν sono misure esterne su $[0,1]$.

ii) (2 punti) Stabilire se μ e ν sono misure Boreliane su $[0,1]$.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2 t)}{(1 + x^2 t^2)^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(È da intendersi $f(0) = 0$.)

i) (4 punti) Provare che f è continua in ogni punto $x \neq 0$.

ii) (4 punti) Provare che f è derivabile in ogni punto $x \neq 0$.

iii) (2 punti) Provare che f non è continua in $x = 0$.

iv) (Facoltativo) Provare che $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$.

Suggerimento: Cambio variabile $t = s/x$.

---

3 ore a disposizione