<u>Esercizio</u> Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Provare che f è continua in ogni punto $x \neq 0$.
2) Provare che f è derivabile in ogni punto $x \neq 0$.
3) Provare che f non è continua in $x = 0$.
4) Provare che $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(0) = 0$ e che per $x \neq 0$ si ha

$$\frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Quindi f è ben definita.

i) Se $|x| \geq \delta > 0$ si ha

$$\left| \frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2} \right| \leq \frac{1}{(1+\delta^2 t^2)^2} \in L^1([0,\infty))$$

Quindi per il Teorema della convergenza dominata per ogni $x_0 \neq 0$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \int_0^\infty \frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin(x_0^2 t)}{(1+x_0^2t^2)^2}\, dt = f(x_0),$$

2) Cambio di variabile $t = \frac{1}{x} s$, $dt = \frac{1}{x} ds$,

$$\overset{x \neq 0}{f(x) =} \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2} ds$$

È sufficiente provare che

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2} ds$$

è derivabile. Formalmente:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2} ds = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2} ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{s \cos(xs)}{(1+s^2)^2} ds$$

Chiaramente

$$\left| \frac{s \cos(xs)}{(1+s^2)^2} \right| \leq \frac{|s|}{(1+s^2)^2} \in L^1([0,\infty))$$

Questo rende rigorosi i conti precedenti. Quindi f è derivabile per $x \neq 0$.

3) Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{x(1+s^2)^2} ds =$$

$$\overset{\text{se lecito}}{=} \int_0^\infty \lim_{x \to 0} \frac{\sin(xs)}{x(1+s^2)^2} ds = \int_0^\infty \frac{s}{(1+s^2)^2} ds.$$

Usando la stima nota

$$\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq 1 \qquad \forall t$$

si trova

$$\left| \frac{\sin(xs)}{x\,(1+s^2)^2} \right| = \left| \frac{\sin(xs)}{xs} \cdot \frac{s}{(1+s^2)^2} \right| \leq \frac{|s|}{(1+s^2)^2} \in L^1([0,\infty))$$

Questo giustifica il passaggio al limite nell'integrale.

Conclusione:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \int_0^\infty \frac{s}{(1+s^2)^2}\, ds \neq 0 = f(0)$$

ovvero f non è continua in $x = 0$.

4) La derivata di f è:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2}\, ds + \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{s\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\, ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{xs\cos(xs) - \sin(xs)}{x^2\,(1+s^2)^2}\, ds$$

Osserviamo che

$$\left| \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \right| \leq C < +\infty \qquad \forall t$$

e

$$\lim_{t \to 0} \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = 0$$

Quindi si può passare col limite nell'integrale:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \int_0^\infty \frac{xs\cos(xs) - \sin(xs)}{s^2x^2(1+s^2)^2} s^2 ds$$

$$= \int_0^\infty \lim_{x \to 0} \frac{xs\cos(xs) - \sin(xs)}{s^2x^2} \frac{s^2}{(1+s^2)^2} ds$$

$$= 0.$$

□