Analisi Reale

Scritto del 15 Giugno 2015

Esercizio 1 (10 punti) Su $\mathbb{R}$ fissiamo la misura di Lebesgue.

i) Trovare, se possibile, una successione di numeri reali $c_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, tale che la successione di funzioni $f_k(x) = c_k x^k \chi_{[0,1]}(x)$ converga a zero in $L^1(\mathbb{R})$ ma non in $L^2(\mathbb{R})$.

ii) Trovare, se possibile, una successione reale $c_k > 0$ tale che la successione di funzioni $f_k(x) = c_k x^{-1-1/k} \chi_{[1,\infty[}(x)$ converga a zero in $L^2(\mathbb{R})$ ma non in $L^1(\mathbb{R})$.

iii) Trovare, se possibile, una successione di funzioni $f_k \in L^1([0,1]) \cap L^2([0,1])$ che tenda a zero in $L^2([0,1])$ ma non in $L^1([0,1])$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $|\varphi(x)| = 1$ e $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Supponendo $\varphi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ provare che $\varphi'(x) = \varphi'(0) \cdot \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dedurne che $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$, per qualche costante $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Provare che se φ è misurabile allora φ è ancora della forma $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$.

iii) (Facoltativo) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Provare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \alpha x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Sugg.: i) $(\varphi(x+h) - \varphi(x))/h = ((\varphi(h) - \varphi(0))/h)\varphi(x)$. ii) Regolarizzazione.

Esercizio 3 (10 punti) Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$.

i) Provare che la formula

$$\varphi(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y} d\mu(y), \quad x \in [0,1],$$

definisce una funzione $\varphi \in C^1(]0,1]; \mathbb{R})$.

ii) Supponiamo che esista $\alpha > 0$ tale che $\mu([0,x]) \leq x^\alpha$ per ogni $x \in [0,1]$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che φ sia assolutamente continua su $[0,1]$.

---

3 ore a disposizione

Esercizio Su $\mathbb{R}$ si fissi la misura di Lebesgue

i) Trovare, se possibile, una successione reale $c_K > 0$, $K \in \mathbb{N}$, tale che la successione $f_K(x) = c_K x^K \chi_{[0,1]}(x)$ converga a zero in $L^1(\mathbb{R})$ ma non in $L^2(\mathbb{R})$.

ii) Trovare, se possibile, una successione reale $c_K > 0$, $K \in \mathbb{N}$, tale che la successione di funzioni $f_K(x) = c_K x^{-1-1/K} \chi_{[1,\infty)}(x)$ converga a zero in $L^2(\mathbb{R})$ ma non in $L^1(\mathbb{R})$.

iii) Trovare, se possibile, una successione di funzioni $f_K \in L^1([0,1]) \cap L^2([0,1])$ che tenda a zero in $L^2([0,1])$ ma non in $L^1([0,1])$.

Soluzione. i) Conti:

$$\|f_K\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_K(x)|\,dx = \int_{[0,1]} c_K x^K\,dx = c_K \left[\frac{x^{K+1}}{K+1}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{c_K}{K+1}$$

$$\|f_K\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_K(x)|^2 dx\right)^{1/2} = c_K \left(\int_{[0,1]} x^{2K}\,dx\right)^{1/2}$$

$$= c_K \left(\left[\frac{x^{2K+1}}{2K+1}\right]_{x=0}^{x=1}\right)^{1/2}$$

$$= c_K \frac{1}{\sqrt{2K+1}}$$

Con la scelta $c_K = \sqrt{K}$ si ottiene

$$\lim_{K\to\infty} \|f_K\|_1 = \lim_{K\to\infty} \frac{\sqrt{K}}{K+1} = 0$$

$$\lim_{K\to\infty} \|f_K\|_2 = \lim_{K\to\infty} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{2K+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

ii) Conti:

$$\|f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_k(x)|\, dx = \int_{[1,\infty)} c_k\, x^{-1-1/k}\, dx =$$

$$= c_k \left[\frac{x^{-1/k}}{-1/k} \right]_{x=1}^{x=\infty}$$

$$= k\, c_k$$

$$\|f_k\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_k(x)|^2 dx \right)^{1/2} = c_k \left(\int_{[1,\infty)} x^{-2-2/k}\, dx \right)^{1/2}$$

$$= c_k \left(\left[\frac{x^{-1-2/k}}{-1-2/k} \right]_{x=1}^{x=\infty} \right)^{1/2}$$

$$= c_k \left(\frac{1}{1+2/k} \right)^{1/2} = \frac{c_k \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{k+2}}$$

Con la scelta $c_k = \frac{1}{k}$ si ottiene

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = 1 \neq 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}} = 0.$$

<u>Esercizio</u> Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $|\varphi(x)| = 1$ e $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Supponendo $\varphi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ provare che $\varphi'(x) = \varphi'(0) \cdot \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dedurne che $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Provare che se φ è misurabile allora φ è ancora della forma $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$.

iii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
Provare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \alpha x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. i)

$$\varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x) \cdot \varphi(h) - \varphi(x)}{h}$$

$$= \varphi(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h) - 1}{h} = \varphi(x) \cdot \varphi'(0).$$

Abbiamo usato $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) \cdot \varphi(0)$ da cui $\varphi(0) = 1$.
Integrando l'equazione differenziale $\varphi'(x) = \varphi'(0) \cdot \varphi(x)$ con la condizione iniziale $\varphi(0) = 1$ si trova

$$\varphi(x) = e^{\varphi'(0)\, x}.$$

Infine:

$$1 = |\varphi(x)|^2 = \varphi(x)\, \overline{\varphi(x)} = e^{\varphi'(0) x} \cdot e^{\overline{\varphi'(0)}\, x} = e^{(\varphi'(0) + \overline{\varphi'(0)}) x}$$

Da qui si deduce che $\varphi'(0) + \overline{\varphi'(0)} = 0$ modulo $2\pi i$, ovvero $\varphi'(0) = i\alpha$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) φ è localmente integrabile. Sia $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un nucleo standard di regolarizzazione. Definiamo

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\,\varphi(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sappiamo che:

a) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$

b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)$ per $\mathcal{L}^1$-q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Inoltre

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(y)\,\varphi(x-y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(y)\,\varphi(x)\cdot\varphi(-y)\,dy$$

$$= \varphi(x)\int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(y)\,\varphi(-y)\,dy$$

Dal punto b) e dal fatto che $|\varphi(x)| = 1$ segue che $c_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(y)\,\varphi(-y)\,dy \neq 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Deduciamo che

$$\varphi(x) = \frac{1}{c_\varepsilon}\,\varphi_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

Dal punto i) segue che $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) La funzione $\exp(t) = e^{it}$ è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, e quindi la composizione

$$\varphi(x) = e^{if(x)} = \exp(f(x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

è $\mathcal{L}^1$-misurabile. Dal punto i) segue che

$$(*) \quad e^{if(x)} = \varphi(x) = e^{i\alpha x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$. (In effetti, φ verifica le ipotesi $|\varphi(x)| = 1$ e $\varphi(x+y) = e^{if(x+y)} = e^{if(x)+if(y)} = e^{if(x)} \cdot e^{if(y)} = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$.)

La $(*)$ equivale a dire che $f(x) - \alpha x \in 2\pi\mathbb{Z}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists k_x \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \quad f(x) = \alpha x + 2k_x\pi .$$

Affermiamo che $k_x = 0 \ \forall x$. Se fosse $k_x \neq 0$ il punto $y = \dfrac{x}{2k_x}$ verificherebbe

$$f(y) - \alpha y = f\left(\frac{x}{2k_x}\right) - \alpha\frac{x}{2k_x} = \frac{1}{2k_x}\left(f(x) - \alpha x\right) = \pi \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

$\square$

Esercizio suggerito dal Prof. G. De Marco.

Esercizio. Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$.

i) Provare che la formula

$$\varphi(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y), \qquad x \in [0,1],$$

definisce una funzione $\varphi \in C^1(]0,1];\mathbb{R})$.

ii) Supponiamo che esista $\alpha > 0$ tale che $\mu([0,x]) \leq x^\alpha$ per ogni $x \in [0,1]$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che φ sia assolutamente continua su $[0,1]$.

Soluzione. Sia $\delta > 0$ e supponiamo che $x \geq \delta$.
Allora

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{\delta+y} \leq \frac{1}{\delta} \qquad \forall y \geq 0$$

Siccome μ è finita le costanti sono in $L^1([0,1];\mu)$.

Per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{x \to x_0} \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y) = \int_{[0,1]} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,1]} \frac{1}{x_0+y}\, d\mu(y)$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \qquad \forall x_0 > 0.$$

Dunque $\varphi \in C(]0,1];\mathbb{R})$.

Formalmente

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y)$$

$$\overset{⊛}{=} \int_{[0,1]} \frac{d}{dx} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y)$$

$$= - \int_{[0,1]} \frac{1}{(x+y)^2}\, d\mu(y).$$

Se $x \geq \delta > 0$ si ha

$$\left| \frac{-1}{(x+y)^2} \right| \leq \frac{1}{(\delta+y)^2} \leq \frac{1}{\delta^2} \quad \forall y \geq 0$$

Dunque il passaggio ⊛ è lecito in ogni punto $x \in]0,1]$.
Lo stesso argomento (Convergenza Dominata) prova che

$$x \mapsto \varphi'(x) = - \int_{[0,1]} \frac{1}{(x+y)^2}\, d\mu(y)$$

è continua in ogni punto $x \in]0,1]$.
Questo prova: $\varphi \in C^1(]0,1])$.

~~(ii) Per $0 < x_0 \leq x \leq 1$ abbiamo~~

$$\cancel{\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, dt}$$

(ii) Esaminiamo se φ è continua nel punto $x_0 = 0$. Ora abbiamo

$$\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{y} \qquad \text{per } x \ge 0$$

Se $\frac{1}{y} \in L^1([0,1];\mu)$, per convergenza dominata si ha

$$\lim_{x\to 0} \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y) = \int_{[0,1]} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,1]} \frac{1}{y}\, d\mu(y) \in \mathbb{R}$$

Con Fubini - Tonelli:

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{y}\, d\mu(y) = \int_{[0,1]} \left(\int_0^{1/y} dt \right) d\mu(y) =$$

$$= \int_{[0,1]} \int_0^{\infty} \chi_{[0,1/y]}(t)\, dt\, d\mu(y)$$

$$\overset{FT}{=} \int_0^{\infty} \int_{[0,1]} \chi_{[0,1/y]}(t)\, d\mu(y)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \mu(\{ y \in [0,1] : y \le \tfrac{1}{t} \})\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \mu([0, \tfrac{1}{t}])\, dt \qquad \min\{\tfrac{1}{t}, 1\}$$

$$= \int_0^{1} \mu([0, \cancel{\tfrac{1}{t}}])\, dt + \int_1^{\infty} \mu([0, \tfrac{1}{t}])\, dt$$

1 in realtà

usando $\mu([0,1]) \leq 1$ e $\mu([0,\frac{1}{t}]) \leq \frac{1}{t^\alpha}$ si trova

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{y}\, d\mu(y) \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\, dt < \infty$$

se $\underline{\underline{\alpha > 1}}$

Dunque

$$\alpha > 1 \implies \varphi \text{ continua in } x = 0 .$$

D'altra parte con $\alpha = 1$ e $\mu = \mathcal{L}^1$ (che verifica l'ipotesi) si ha

$$\varphi(0) = \int_{[0,1]} \frac{1}{y}\, dy = +\infty$$

e quindi φ non è finita in $x = 0$.

Vediamo ora se $\varphi' \in L^1([0,1]; \mathcal{L}^1)$:

$$\int_{[0,1]} |\varphi'(x)|\, dx = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \frac{1}{(x+y)^2}\, d\mu(y)\, dx =$$

$$\overset{FT}{=} \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \frac{1}{(x+y)^2}\, dx \right) d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,1]} \left[-\frac{1}{x+y} \right]_{x=0}^{x=1} d\mu(y) = \int_{[0,1]} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,1]} \frac{1}{y(y+1)}\, d\mu(y) \leq \int_{[0,1]} \frac{1}{y}\, d\mu(y) \overset{\text{se } \alpha > 1}{<} \infty$$

come visto sopra.

Dunque: $\alpha > 1 \implies \varphi$ è AC su $[0,1]$.

□