Analisi Reale

Scritto del 13 Luglio 2015

Esercizio 1 (10 punti) Sia $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy < 1\big\} \subset \mathbb{R}^2$ munito della misura di Lebesgue e sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = y^2 \mathrm{e}^{-y/x}$.

i) Determinare tutti i $p \in [1,\infty)$ tali che $f \in L^p(A)$.

ii) Stabilire se $f \in L^\infty(A)$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$ e sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \int_{[0,x]} (1+t^2)\,d\mu(t), \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che φ è continua su $[0,1]$ se e solo se $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$.

ii) Provare che se $\varphi \in C^1([0,1])$ allora la misura μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue $\mathscr{L}^1$.

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ due funzioni misurabili, positive e limitate.

i) Provare che

$$\Big(\int_{[0,1]} f\,g\,dx\Big)^3 \le \Big(\int_{[0,1]} f^2\,g\,dx\Big)\Big(\int_{[0,1]} f\,g^2\,dx\Big). \qquad (*)$$

ii) Calcolare tutte le funzioni f e g (misurabili, positive e limitate) tali che la disuguaglianza $(*)$ sia un'uguaglianza.

Sugg. i) $fg = (f^{\frac{2}{3}} g^{\frac{1}{3}})(f^{\frac{1}{3}} g^{\frac{2}{3}})$, poi Hölder e poi di nuovo ...

---

3 ore a disposizione