Analisi Reale

Scritto del 13 Luglio 2015

Esercizio 1 (10 punti) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0,\, xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ munito della misura di Lebesgue e sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = y^2 e^{-y/x}$.

i) Determinare tutti i $p \in [1,\infty)$ tali che $f \in L^p(A)$.

ii) Stabilire se $f \in L^\infty(A)$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$ e sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \int_{[0,x]} (1+t^2)\,d\mu(t), \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che φ è continua su $[0,1]$ se e solo se $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$.

ii) Provare che se $\varphi \in C^1([0,1])$ allora la misura μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue $\mathscr{L}^1$.

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ due funzioni misurabili, positive e limitate.

i) Provare che

$$\Big(\int_{[0,1]} f\,g\,dx\Big)^3 \le \Big(\int_{[0,1]} f^2\,g\,dx\Big)\Big(\int_{[0,1]} f\,g^2\,dx\Big). \qquad (*)$$

ii) Calcolare tutte le funzioni f e g (misurabili, positive e limitate) tali che la disuguaglianza $(*)$ sia un'uguaglianza.

Sugg. i) $fg = (f^{\frac{2}{3}}g^{\frac{1}{3}})(f^{\frac{1}{3}}g^{\frac{2}{3}})$, poi Hölder e poi di nuovo ...

3 ore a disposizione

<u>Esercizio</u> Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0, xy<1\}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2 e^{-y/x}$.

(i) Determinare tutti i $p \in [1,\infty)$ tali che $f \in L^p(A)$.

(ii) Stabilire se $f \in L^\infty(A)$.

Soluzione (i) Usiamo nel seguito Fubini-Tonelli:

$$\|f\|^p_{L^p(A)} = \int_A |f(x,y)|^p dxdy = \int_A y^{2p} e^{-py/x} dxdy =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^{1/x} y^{2p} e^{-py/x} dy \right) dx \qquad \begin{array}{l} y = xt \\ dy = x\,dt \end{array}$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^{1/x^2} x^{2p} t^{2p} e^{-pt} x\, dt \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{[0,1/x^2]}(t)\, x^{2p+1} t^{2p} e^{-pt} dt \right) dx$$

$$\overset{FT}{=} \int_0^\infty t^{2p} e^{-pt} \left(\int_0^\infty \chi_{[0,1/x^2]}(t)\, x^{2p+1} dx \right) dt$$

$$= \int_0^\infty t^{2p} e^{-pt} \left(\int_0^{1/\sqrt{t}} x^{2p+1} dx \right) dt$$

$$= \int_0^\infty t^{2p} e^{-pt} \left[\frac{x^{2p+2}}{2p+2} \right]_{x=0}^{x=1/\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{1}{2(p+1)} \int_0^\infty t^{2p} e^{-pt} \frac{1}{t^{p+1}} dt$$

$$= \frac{1}{2(p+1)} \int_0^\infty t^{p-1} e^{-pt}\, dt \qquad t = \frac{1}{p} s$$

$$= \frac{1}{2(p+1)} \frac{1}{p^{p-1}} \frac{1}{p} \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s}\, ds$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{2(p+1)\, p^p} < \infty \quad \text{per ogni } p \in [1,\infty)$$

Γ = Funzione Γ di Eulero.

Dunque
$$\|f\|_p = \frac{1}{p} \sqrt[p]{\frac{\Gamma(p)}{2(p+1)}}$$

(ii) Usando il fatto che $\Gamma(p) \sim \left(\frac{p}{e}\right)^p$ si calcola

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \frac{1}{e}.$$

Alternativamente, per $t>0$ si consideri
$$\phi_t(x) = f(x, tx) = t^2 x^2 e^{-t}$$
con x soggetto alla limitazione $x \cdot (tx) < 1 \iff x^2 < \frac{1}{t}$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora

$$\frac{1-\varepsilon}{t} < x^2 < \frac{1}{t} \implies (1-\varepsilon)\, t e^{-t} < \phi_t(x) < t e^{-t}$$

La funzione $t \to t e^{-t}$ ha massimo per $t = 1$, con valore massimo $\frac{1}{e}$. Deduciamo che $f(x,y) < \frac{1}{e}$ per ogni $(x,y) \in A$ e che esistono punti $(x,y) \in A$ tali che $f(x,y) > \frac{1-\varepsilon}{e}$, comunque fissato $\varepsilon > 0$.

Dunque $\|f\|_{L^\infty(A)} = 1/e$.

$\square$

Esercizio proposto dal Prof. G. De Marco.

__Esercizio__ Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$ e sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \int_{[0,x]} (1+t^2)\, d\mu , \qquad x \in [0,1]$$

(i) Provare che φ è continua su $[0,1] \iff \mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

(ii) Provare che $\varphi \in C^1([0,1]) \implies \mu \ll \mathcal{L}^1$.

Soluzione. Dato $x_0 \in [0,1]$ osserviamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0^+} \int_{[0,1]} \chi_{[0,x]}(t)\,(1+t^2)\, d\mu$$

$$\overset{CD}{=} \int_{[0,1]} \lim_{x \to x_0^+} \chi_{[0,x]}(t)\,(1+t^2)\, d\mu$$

$$= \int_{[0,x_0]} (1+t^2)\, d\mu = \varphi(x_0).$$

(i) Se φ è continua in x_0 allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\varphi(x_0+\delta) - \varphi(x_0-\delta) < \varepsilon$.

Dunque

$$\mu(\{x_0\}) \le \cancel{\mu((x_0-\delta, x_0+\delta])} \overset{\text{perché } 1+t^2 \ge 1}{\le} \int_{(x_0-\delta,\, x_0+\delta]} (1+t^2)\, d\mu =$$

$$= \varphi(x_0+\delta) - \varphi(x_0-\delta) < \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Viceversa, se $\mu(\{x_0\}) = 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0^-} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0^-} \int_{[0,1]} \chi_{[0,x]}(t) \, (1+t^2) \, d\mu$$

$$\stackrel{CD}{=} \int_{[0,1]} \lim_{x \to x_0^-} \chi_{[0,x)}(t) \, (1+t^2) \, d\mu$$

$$= \int_{[0,1]} \chi_{[0,x_0)}(t) \, (1+t^2) \, d\mu$$

$$\stackrel{\mu(\{x_0\})=0}{=} \int_{[0,1]} \chi_{[0,x_0]}(t) \, (1+t^2) \, d\mu = \varphi(x_0).$$

(ii) Sia ν la misura di Borel $\nu(B) = \int_B (1+t^2) \, d\mu$ $B \subset [0,1]$ di Borel. Chiaramente:

$$\nu(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$$

Basta dunque provare che $\nu << \mathcal{L}^1$.
Sia $E \subset [0,1]$ con $\mathcal{L}^1(E) = 0$. Allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono intervalli $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$ con $\alpha_i < \beta_i$ tali che

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon.$$

Allora

$$\nu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i) \stackrel{\text{Lagrange}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)}{\beta_i - \alpha_i} (\beta_i - \alpha_i) \leq \|\varphi'\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i - \alpha_i \leq \|\varphi'\|_\infty \cdot \varepsilon$$

Deduciamo che $\nu(E) = 0$. $\square$

<u>Esercizio</u> Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ misurabili positive limitate.

(i) Provare che

$$\left(\int_{[0,1]} f g \, dx \right)^3 \leq \left(\int_{[0,1]} f^2 g \, dx \right) \left(\int_{[0,1]} f g^2 \, dx \right)$$

(ii) Calcolare tutte le funzioni f, g per cui vale l'uguaglianza.

Soluzione. Possiamo scomporre

$$f g = \left(f^{\frac{2}{3}} g^{\frac{1}{3}} \right) \left(f^{\frac{1}{3}} g^{\frac{2}{3}} \right)$$

Facciamo una disuguaglianza di Hölder con esponenti $p = 3$ e $q = 3/2$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$

$$\left(\int_{[0,1]} f g \, dx \right)^3 \leq \left(\int_{[0,1]} f^2 g \, dx \right) \left(\int_{[0,1]} f^{\frac{1}{2}} g \, dx \right)^2$$

Qui si ha uguaglianza se e solo se esiste una costante $\lambda \in (0, \infty)$ tale che (quasi ovunque)

$$\left(f^{2/3} g^{1/3} \right)^{3-1} = \lambda f^{1/3} g^{2/3} \iff f = \lambda$$

Di nuovo con una disuguaglianza di Hölder

$$\left(\int_{[0,1]} f^{1/2} g \, dx \right)^2 = \left(\int_{[0,1]} 1 \cdot f^{1/2} g \, dx \right)^2 \leq \underbrace{\left(\int_{[0,1]} 1^2 dx \right)}_{=1} \cdot \left(\int_{[0,1]} f g^2 dx \right)$$

Qui si ha uguaglianza se e solo se esiste una costante $\mu \in (0,\infty)$ tale che

$$f^{1/2} g = \mu \quad \text{quasi ovunque.}$$

Dunque, mettendo insieme le due disuguaglianze si trova

$$\left(\int_{[0,1]} f g \, dx\right)^3 \leq \left(\int_{[0,1]} f^2 g \, dx\right) \cdot \left(\int_{[0,1]} f g^2 \, dx\right)$$

Si ha uguaglianza se e solo se

$$\begin{cases} f = x \\ f^{1/2} g = \mu \end{cases} \quad \text{q.o.}$$

Da cui si ottiene $f =$ costante e $g =$ costante.