Analisi Reale

Scritto del 15 Settembre 2015

Esercizio 1 (10 punti) Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che per ogni $x > 0$ si abbia

$$|f(x)| \le \frac{1}{x^\alpha}.$$

Calcolare tutti i valori di $\alpha > 0$ tali che la serie di funzioni

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{kf(x+k)}{\log^2 k}, \quad 0 < x < 1,$$

converga in $L^1(0,1)$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ tale che per ogni intervallo $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, dove $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, si abbia $\mu([\alpha,\beta]) \le (\beta-\alpha)^2$. Provare che μ è la misura nulla.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $f \in L^\infty([0,1])$ una funzione positiva su $[0,1]$. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \log\Big(\int_{[0,1]} \sinh(pf(x))dx \Big).$$

3 ore a disposizione

Esercizio 1 Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{per ogni } x>0.$$

Calcolare tutti i valori di α tali che la serie di funzioni

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k}, \qquad 0<x<1,$$

converga in $L^1(0,1)$.

Soluzioni. Le somme parziali $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k}$ sono in $L^1(0,1)$.
La serie converge in $L^1(0,1)$ se e solo se

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k} \right\|_{L^1(0,1)} = 0.$$

Per la disuguaglianza di Minkowski

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k} \right\|_1 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \int_{[0,1]} |f(x+k)|\,dx \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \int_{[0,1]} \frac{1}{(x+k)^\alpha}\,dx = [\alpha \neq 1] =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{(x+k)^{\alpha-1}} \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \, \frac{1}{\alpha-1} \, \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{(k+1)^{\alpha-1} k^{\alpha-1}} = \circledast$$

Quando $\alpha = 1$ si arriva alla stima

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k} \right\|_1 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \left(\log(k+1) - \log k \right)$$

Siccome $\log(k+1) - \log k = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$

e siccome $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 k} = \infty$, quando $\alpha = 1$ NON si conclude. Anzi, scegliendo proprio $f(x) = \frac{1}{x}$ si vede per convergenza monotona che le disuguaglianze $\leq$ sono uguaglianze e quindi

$$\alpha = 1, \; f(x) = 1/x$$

$$\left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k} \right\|_{L^1(0,1)} = \infty .$$

Torniamo al caso $\alpha \neq 1$. Siccome

$$\frac{k}{\log^2 k} \, \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{(k+1)^{\alpha-1} k^{\alpha-1}} = \frac{k}{\log^2 k} \, \frac{k^{\alpha-1}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1} - 1\right]}{k^{2\alpha-2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1}} =$$

$$= \frac{k}{\log^2 k} \, \frac{k^{\alpha-1} \cdot \left[(\alpha-1)\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right]}{k^{2\alpha-2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1}} = \frac{(\alpha-1)\,(1+o(1))}{k^{\alpha-1} \log^2 k}$$

Si vede che

$$\circledast = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1+o(1)}{k^{\alpha-1}\log^2 k} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \iff \alpha - 1 \geq 1$$ (Criterio Cauchy)

Deduciamo che

$$\alpha \geq 2 \implies \text{Serie Converge in } L^1(0,1).$$

Se $\alpha < 2$, scegliendo $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ le disuguaglianze $\textcircled{\leq}$ sono uguaglianze.

Si deduce che $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

$$\alpha < 2 \implies \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\, f(x+k)}{\log^2 k} \right\|_{L^1(0,1)} = \infty .$$

□

Esercizio 2 Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ tale che

$$\mu([\alpha, \beta]) \leq (\beta - \alpha)^2$$

per ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Provare che $\mu = 0$.

Dim. Proviamo che $\mu([0,1]) = 0$, Dato $n \in \mathbb{N}$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\mu([0,1]) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

per $n \to \infty$ si deduce che $\mu([0,1]) = 0$.

In modo analogo si prova che $\mu([k, k+1]) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e quindi

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1]\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu([k, k+1]) = 0$$

Segue che $\mu = 0$.

$\square$

<u>Esercizio 3</u> Sia $f \in L^\infty(0,1)$ una funzione positiva, $f > 0$.

Calcolare il limite

$$L = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \log \left(\int_{[0,1]} \sinh(p f(x))\, dx \right).$$

Soluzione. Chiaramente

$$\int_{[0,1]} \sinh(p f(x))\, dx \overset{\sinh \uparrow}{\leq} \sinh(p \|f\|_\infty) =$$

$$= \frac{e^{p\|f\|_\infty} - e^{-p\|f\|_\infty}}{2}$$

Inoltre

$$\frac{1}{p} \log \left(\frac{e^{p\|f\|_\infty} - e^{-p\|f\|_\infty}}{2} \right) \leq \log \left(\frac{e^{p\|f\|_\infty}}{2} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \log \frac{e^{\|f\|_\infty}}{2^{1/p}} \xrightarrow[p \to \infty]{} \|f\|_\infty .$$

Dunque si ha certamente

$$\limsup_{p \to \infty} \frac{1}{p} \log \left(\int_{[0,1]} \sinh(p f(x))\, dx \right) \leq \|f\|_\infty .$$

Cerchiamo di provare che

$$\liminf_{p \to \infty} \frac{1}{p} \log \left(\int_{[0,1]} \sinh(p f(x))\, dx \right) \overset{?}{\geq} \|f\|_\infty$$

Fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$A_\varepsilon = \{ x \in [0,1] : f(x) \geq \|f\|_\infty - \varepsilon \}$$

ha misura positiva, $\mathcal{L}^1(A_\varepsilon) > 0$. Inoltre

$$\int_{[0,1]} \sinh(p\, f(x))\,dx \geq \int_{A_\varepsilon} \sinh(p\, f(x))\,dx \geq$$

$$\geq \sinh(p(\|f\|_\infty - \varepsilon))\ \mathcal{L}^1(A_\varepsilon)$$

e quindi

$$\frac{1}{p} \log\left(\int_{[0,1]} \sinh(p\, f(x))\,dx \right) \geq \log\left(\sinh(p(\|f\|_\infty - \varepsilon))\right)^{\frac{1}{p}} + \underbrace{+ \log \mathcal{L}^1(A_\varepsilon)^{1/p}}_{\searrow 0 \quad p \to \infty}$$

In modo analogo a sopra si trova

$$\lim_{p \to \infty} \left(\sinh(p(\|f\|_\infty - \varepsilon))\right)^{\frac{1}{p}} = e^{\|f\|_\infty - \varepsilon}$$

e quindi

$$\liminf_{p \to \infty} \frac{1}{p} \log\left(\int_{[0,1]} \sinh(p\, f(x))\,dx \right) \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. La tesi segue.

$\square$