

# Analisi Reale

Anno Accademico 2014-2015

Roberto Monti

Versione del 29 Ottobre 2014



## Contents

Chapter 1. Introduzione alla teoria della misura	5
1. Misure esterne e misure su $\sigma$ -algebre. Criterio di Carathéodory	5
2. Misura di Lebesgue e misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$	8
3. Teoremi di continuità per successioni monotone di insiemi misurabili	9
Chapter 2. Teoria dell'integrale	11
1. Funzioni misurabili	11
2. Convergenza quasi ovunque. Teorema di Egorov	14
3. Integrale di Lebesgue	15
4. Assoluta continuità dell'integrale	17
5. Teorema della convergenza monotona e Lemma di Fatou	18
6. Convergenza dominata e Teorema di Lebesgue-Vitali	20
7. Derivata sotto il segno di integrale	23
8. Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue	24



## Introduzione alla teoria della misura

### 1. Misure esterne e misure su $\sigma$ -algebre. Criterio di Carathéodory

In questa sezione introduciamo le definizioni di misura esterna, di  $\sigma$ -algebra, e di misura su una  $\sigma$ -algebra. Per Criterio di Carathéodory, a partire da una misura esterna si può produrre una  $\sigma$ -algebra, detta “degli insiemi misurabili”. La misura esterna ristretta a tale  $\sigma$ -algebra è una misura.

Nel seguito  $X$  è un insieme e  $\mathcal{P}(X)$  è l'insieme delle parti di  $X$ .

**DEFINIZIONE 1.1** (Misura esterna). Una funzione  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  è una *misura esterna* se:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- ii) se  $A \subset B$  allora  $\mu(A) \leq \mu(B)$  (proprietà di *monotonia*);
- iii) per ogni successione di insiemi  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $X$  vale la *subadditività numerabile*

$$(1.1) \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Una  $\sigma$ -algebra è una famiglia di insiemi chiusa per complemento, intersezioni ed unioni numerabili. Più precisamente:

**DEFINIZIONE 1.2** ( $\sigma$ -algebra). Un insieme  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  è una  $\sigma$ -algebra dell'insieme  $X$  se:

- i)  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ ;
- ii) se  $A \in \mathcal{A}$  allora  $A' = X \setminus A \in \mathcal{A}$ ;
- iii) se  $A_k \in \mathcal{A}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , allora  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ .

**OSSERVAZIONE 1.3.** Chiaramente, se  $A_k \in \mathcal{A}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  allora si ha  $A'_k \in \mathcal{A}$  e quindi dalla iii) segue che

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)' = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k \in \mathcal{A}.$$

Di conseguenza, dalla ii) si deduce che  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ .

Analogamente, se  $A, B \in \mathcal{A}$  allora  $A \setminus B = A \cap B' \in \mathcal{A}$ .

**DEFINIZIONE 1.4** (Misura e spazio di misura). Sia  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -algebra su un insieme  $X$ . Una funzione  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  è una misura (positiva) se:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- ii) se  $A_k \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , è una successione di insiemi mutualmente disgiunti, allora vale l'*additività numerabile*

$$(1.2) \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

La terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  si dice allora *spazio di misura*.

ESEMPIO 1.5 (Misura di Dirac). Sia  $X$  un insieme e fissiamo un punto  $x_0 \in X$ . La funzione  $\delta : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A, \\ 0 & \text{se } x_0 \in X \setminus A, \end{cases}$$

è una misura sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{P}(X)$ , detta delta di Dirac concentrata in  $x_0$ .

ESEMPIO 1.6 (Counting measure). Sia  $X$  un insieme e definiamo la funzione  $\chi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$

$$\chi(A) = \begin{cases} \#A = \text{Card}(A) & \text{se } \text{Card}(A) < \infty, \\ \infty & \text{se la cardinalità di } A \text{ non è finita.} \end{cases}$$

La funzione  $\chi$  è una misura su  $X$  detta *counting measure*.

Torniamo alle misure esterne, e definiamo la nozione di insieme misurabile.

DEFINIZIONE 1.7 (Insieme misurabile). Sia  $X$  un insieme e sia  $\mu$  una misura esterna su  $X$ . Un insieme  $A \subset X$  si dice  $\mu$ -*misurabile* se per ogni  $E \subset X$  vale la *proprietà di spezzamento*

$$(1.3) \quad \mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A').$$

Indicheremo con  $\mathcal{M}(X, \mu)$  o più semplicemente con  $\mathcal{M}$  la famiglia degli insiemi misurabili di  $X$  rispetto alla misura esterna  $\mu$ .

OSSERVAZIONE 1.8. La disuguaglianza  $\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A')$  è sempre verificata, per la subadditività della misura esterna.

La costruzione di Carathéodory ci assicura che  $\mathcal{M}$  è una  $\sigma$ -algebra su  $X$ .

TEOREMA 1.9 (Criterio di Carathéodory). *Sia  $\mu$  una misura esterna su un insieme  $X$ . La famiglia  $\mathcal{M}$  degli insiemi  $\mu$ -misurabili è una  $\sigma$ -algebra ed inoltre la restrizione  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  è una misura. Inoltre, questa misura è completa nel senso che  $\mu(A) = 0$  implica  $A \in \mathcal{M}$ .*

DIM. È immediato vedere che  $\emptyset \in \mathcal{M}$ . Inoltre, dalla simmetria della definizione di insieme misurabile segue che  $A \in \mathcal{M}$  se e solo se  $A' \in \mathcal{M}$ .

Proviamo che se  $A_k \in \mathcal{M}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  allora si ha anche

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}.$$

Per induzione, usando la definizione (1.3) di insieme misurabile si trova, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 \mu(E) &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A'_1) \\
 &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A'_1 \cap A_2) + \mu(E \cap A'_1 \cap A'_2) \\
 &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A'_1 \cap A_2) + \mu(E \cap A'_1 \cap A'_2 \cap A_3) \\
 &\quad + \mu(E \cap A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{i=1}^k \mu\left(E \cap \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)'\right).
 \end{aligned}$$

Dalla proprietà di monotonia della misura esterna segue che

$$\mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \leq \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)'\right),$$

e quindi per ogni  $k \in \mathbb{N}$  vale la disuguaglianza

$$\mu(E) \geq \sum_{i=1}^k \mu\left(E \cap \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right).$$

Passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  e poi usando la subaddittività numerabile della misura esterna si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \mu(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(E \cap \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \\
 &\geq \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \\
 &\geq \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \geq \mu(E).
 \end{aligned}$$

Null'ultima disuguaglianza abbiamo usato di nuovo la subaddittività della misura esterna. Si conclude che le disuguaglianze precedenti sono tutte uguaglianze, e quindi

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A'),$$

per ogni  $E$ , ovvero  $A \in \mathcal{M}$ . Abbiamo in effetti trovato l'identità più ricca di informazioni:

$$(1.4) \quad \mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(E \cap \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right).$$

Mostriamo che  $\mu$  è  $\sigma$ -additiva su  $\mathcal{M}$ . Sia  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  con unione disgiunta, e nell'uguaglianza (1.4) scegliamo  $E = A$ . Usando il fatto che  $\mu(\emptyset) = 0$  si ottiene

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Rimane da verificare che  $\mu$  è completa. Se  $\mu(A) = 0$ , allora dalla subadditività e dalla monotonia della misura esterna si trova

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A') \leq \mu(A) + \mu(E) = \mu(E),$$

e dunque si hanno uguaglianze e pertanto  $A \in \mathcal{M}$ . Questo termina la dimostrazione del teorema. □

## 2. Misura di Lebesgue e misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$

**2.1. Misura di Lebesgue.** Introduciamo la misura di Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , e la  $\sigma$ -algebra degli insiemi  $\mathcal{L}^n$ -misurabili in  $\mathbb{R}^n$ .

Un pluri-intervallo (o plurirettangolo)  $I \subset \mathbb{R}^n$  è un insieme del tipo

$$I = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n), \quad \text{con } a_i < b_i \text{ per } i = 1, \dots, n.$$

La misura di un pluri-intervallo  $I$  è definita in modo naturale

$$\text{mis}(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Un *ricoprimento Lebesguiano* di un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  è una successione di pluri-intervalli  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Definiamo la *misura esterna di Lebesgue*  $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  ponendo per ogni  $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{mis}(I_k) : (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ricoprimento Lebesguiano di } A \right\}.$$

Verifichiamo che la funzione di insiemi  $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  è una misura esterna. Certamente  $\mathcal{L}^n(\emptyset) = 0$  e  $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(B)$  se  $A \subset B$ , dal momento che tutti i ricoprimenti Lebesguiani di  $B$  sono anche ricoprimenti di  $A$ .

Proviamo la subadditività numerabile (1.1). Sia  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione di insiemi di  $\mathbb{R}^n$ . Se il membro di destra in (1.1) non è finito, ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_k) = \infty,$$

allora non c'è nulla da provare. Possiamo allora supporre che la serie converga e quindi  $\mathcal{L}^n(A_k) < \infty$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste un ricoprimento Lebesguiano  $\{I_i^k : i \in \mathbb{N}\}$  di  $A_k$  tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{mis}(I_i^k) \leq \mathcal{L}^n(A_k) + \varepsilon/2^k.$$

La famiglia di pluri-intervalli  $\{I_i^k : i, k \in \mathbb{N}\}$  è un ricoprimento Lebesguiano di  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , e dunque

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{mis}(I_i^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathcal{L}^n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_k).$$



Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$  si ottiene la tesi.

Per il Criterio di Carathéodory, gli insiemi  $\mathcal{L}^n$ -misurabili formano una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}$  su cui  $\mathcal{L}^n$  è una misura completa: la *misura di Lebesgue*. Un insieme  $A \in \mathcal{M}$  si dice *Lebesgue misurabile*.

**2.2. Misure di Hausdorff.** Sia  $n \geq 1$  un intero e sia  $s \geq 0$  un parametro dimensionale reale. Definiamo la costante

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2 + 1)},$$

dove

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx, \quad s > 0,$$

è la funzione  $\Gamma$  di Eulero. Il significato di questa costante è che per  $s = k \in \mathbb{N}$  si ha

$$\omega_k = \mathcal{L}^k(\{x \in \mathbb{R}^k : |x| < 1\}),$$

la misura di Lebesgue della palla unitaria  $k$ -dimensionale. Ricordiamo che il diametro di un insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$  è per definizione

$$\text{diam}(E) = \sup_{x, y \in E} |x - y|.$$

Per ogni  $\delta > 0$ , definiamo la “premisura” di Hausdorff  $s$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^n$ , la funzione  $\mathcal{H}_\delta^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ , ponendo per ogni  $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \frac{\text{diam}(E_k)}{2} \right)^s : E_k \subset \mathbb{R}^n, \text{diam}(E_k) \leq \delta, A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right\}.$$

Definiamo quindi la misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale  $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ , ponendo

$$\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

La funzione  $\mathcal{H}^s$  è una misura esterna su  $\mathbb{R}^n$ . La dimostrazione di questo fatto è del tutto analoga a quella fatta per la misura di Lebesgue e viene omessa. Per ogni  $s \geq 0$ , gli insiemi  $\mathcal{H}^s$ -misurabili formano una  $\sigma$ -algebra su cui  $\mathcal{H}^s$  è una misura, la misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^n$ .

### 3. Teoremi di continuità per successioni monotone di insiemi misurabili

Una successione  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  di sottoinsiemi di  $X$  si dice monotona crescente se  $A_k \subset A_{k+1}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Si dice monotona decrescente se  $A_{k+1} \subset A_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

**TEOREMA 3.1.** *Sia  $\mu$  una misura esterna sull'insieme  $X$  e sia  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione di insiemi  $\mu$ -misurabili di  $X$ . Allora:*

- (i) *Se la successione è crescente si ha  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$ .*
- (ii) *Se la successione è decrescente e  $\mu(A_1) < \infty$  si ha  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$ .*

DIM. (i) Usiamo la proprietà di additività numerabile della misura per gli insiemi misurabili:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \mu\left(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^m A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m).
\end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che la successione è crescente per dire che  $\bigcup_{k=1}^m A_k = A_m$ .

(ii) Consideriamo la successione  $B_k = A_1 \setminus A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , che è crescente, e dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_1 \setminus A_k\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Siccome  $\mu(A_1) < \infty$  si ha  $\mu(A_k) < \infty$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e quindi l'identità

$$\mu(A_1) = \mu((A_1 \setminus A_k) \cup A_k) = \mu(A_1 \setminus A_k) + \mu(A_k)$$

implica che  $\mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k)$  e la tesi (ii) segue.  $\square$

## CHAPTER 2

# Teoria dell'integrale

## 1. Funzioni misurabili

In tutta questa sezione  $X$  è un insieme e  $\mu$  è una misura esterna su  $X$ . Diremo misurabili gli insiemi di  $X$  che sono  $\mu$ -misurabili.

**DEFINIZIONE 1.2** (Funzioni misurabili). Una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *misurabile* se per ogni insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}$  l'antimmagine  $f^{-1}(A) \subset X$  è un insieme misurabile di  $X$ .

**OSSERVAZIONE 1.3.** Una funzione  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  si dirà misurabile se gli insiemi  $f^{-1}(\{-\infty\})$  ed  $f^{-1}(\{\infty\})$  sono misurabili ed è verificata la condizione della definizione precedente.

**PROPOSIZIONE 1.4.** *Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni.*

- 1)  $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$  è misurabile per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- 2)  $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$  è misurabile per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- 3)  $f^{-1}(] \alpha, \infty[)$  è misurabile per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- 4)  $f^{-1}(] \alpha, \infty[)$  è misurabile per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- 5)  $f^{-1}(] \alpha, \beta])$  è misurabile per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- 6)  $f^{-1}(A)$  è misurabile per ogni insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}$ .

**DIM.** La prova è elementare e viene omessa. La dimostrazione che 1) implica 2) è la seguente:

$$f^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k} \right\},$$

e l'insieme a destra è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili.  $\square$

**PROPOSIZIONE 1.5.** *Siano  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni misurabili. Allora anche le funzioni  $f + g$ ,  $fg$ ,  $f/g$  con  $g \neq 0$  su  $X$ ,  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$  e  $|f|$  sono misurabili.*

**DIM.** Proviamo che la somma  $f + g$  è misurabile. Infatti, dato  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\{x \in X : f(x) + g(x) < \alpha\}$  coincide con l'insieme

$$\{x \in X : \text{esistono } s, t \in \mathbb{Q} \text{ tali che } f(x) < s, g(x) < t \text{ e } s + t < \alpha\}$$

ovvero si ha

$$(f + g)^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \bigcup_{\substack{s, t \in \mathbb{Q} \\ s + t < \alpha}} f^{-1}(]-\infty, s]) \cap g^{-1}(]-\infty, t]),$$

e l'insieme a destra è misurabile in quanto unione numerabile di misurabili.

Poi osserviamo che, dato  $\alpha \geq 0$ , si ha  $\{f^2 > \alpha\} = \{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\}$  e quindi  $f^2$  è misurabile. Dunque, anche il prodotto di funzioni  $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$  è misurabile. Lasciamo al lettore il compito di verificare la misurabilità di  $1/g$ .

Le funzioni  $f^+ = f\chi_{\{f \geq 0\}}$  ed  $f^- = -f\chi_{\{f \leq 0\}}$  sono misurabili in quanto prodotto di funzioni misurabili. Quindi è misurabile anche la funzione  $|f| = f^+ + f^-$ .  $\square$

Nella dimostrazione precedente abbiamo usato la notazione  $\chi_A = 1_A$  per la funzione caratteristica di un insieme.

DEFINIZIONE 1.6. La funzione caratteristica di un insieme  $A \subset X$  è la funzione  $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  definita nel seguente modo:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

La funzione  $\chi_A$  è misurabile se e solo se  $A$  è misurabile.

PROPOSIZIONE 1.7. Siano  $f_k : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , funzioni misurabili. Allora anche le funzioni

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$$

sono misurabili. In particolare, il limite puntuale di funzioni misurabili, se esiste, è una funzione misurabile.

DIM. Proviamo che la funzione  $g = \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$  è misurabile. Infatti, per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha

$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_k(x) < \alpha\}$$

e quindi  $g^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(]-\infty, \alpha])$  è un insieme misurabile.

In modo analogo, detta  $h = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ , per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha

$$\{x \in X : h(x) > \alpha\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_k(x) > \alpha\}$$

e quindi  $h^{-1}(] \alpha, \infty]) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(] \alpha, \infty])$  è un insieme misurabile.

Infine, anche le funzioni

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq k} f_n(x), \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} f_n(x)$$

sono misurabili.  $\square$

Ora proviamo che le funzioni misurabili non negative si possono approssimare con funzioni di struttura speciale.

TEOREMA 1.8. Sia  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  una funzione misurabile non negativa. Esiste una successione di insiemi misurabili  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tali che

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x), \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Inoltre, se  $f$  è limitata esiste una scelta di insiemi tale che la serie converge uniformemente.

DIM. Definiamo l'insieme  $A_1 = \{x \in X : f(x) \geq 1\}$ , che è misurabile. Poi definiamo l'insieme  $A_2 = \{x \in X : f(x) - \chi_{A_1}(x) \geq \frac{1}{2}\}$ , che è misurabile. Osserviamo che

$$f(x) \geq \chi_{A_1}(x) \quad \text{e di più} \quad f(x) \geq \chi_{A_1}(x) + \frac{1}{2}\chi_{A_2}(x)$$

per ogni  $x \in X$ .

Per induzione, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  possiamo definire l'insieme misurabile

$$A_k = \left\{ x \in X : f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Sempre per induzione, si prova che per ogni  $x \in X$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha

$$f(x) \geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x),$$

e dunque per  $k \rightarrow \infty$  si ottiene

$$(1.5) \quad f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x),$$

per ogni  $x \in X$ .

Proviamo che in (1.5) vale l'uguaglianza. Infatti, se  $f(x) = \infty$  allora  $x \in A_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e dunque  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ . Se, invece,  $0 \leq f(x) < \infty$  allora  $x \notin A_k$  per infiniti  $k$  (altrimenti la serie diverge), e dunque, dalla definizione di  $A_k$  segue che

$$f(x) < \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x),$$

per infiniti  $k$  e passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  si ottiene la tesi.

Ora supponiamo che risulti  $f(x) \leq M < \infty$  per ogni  $x \in X$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , siano  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  tali che

$$\frac{1}{k_1} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \sum_{j=k_1}^{k_2} \frac{1}{j} > M.$$

Dalla disuguaglianza

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \leq f(x) \leq M,$$

segue che per ogni  $x \in X$  esiste  $\bar{k} \in \mathbb{N}$  con  $k_1 \leq \bar{k} \leq k_2$  tale che  $x \notin A_{\bar{k}}$ , ovvero

$$f(x) - \sum_{j=1}^{\bar{k}-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) < \frac{1}{\bar{k}} \leq \frac{1}{k_1} < \varepsilon.$$

Per la monotonia puntuale delle somme troncate, la disuguaglianza

$$f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) < \varepsilon,$$

vale allora per tutti i  $k \geq k_2$ . Il numero  $k_2$  è stato scelto indipendentemente da  $x$ . Questo prova la convergenza uniforme.  $\square$

## 2. Convergenza quasi ovunque. Teorema di Egorov

Sia  $\mu$  una misura esterna su un insieme  $X$ . Diciamo che una successione di funzioni  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge quasi ovunque (q.o.) ad una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se esiste un insieme  $N \subset X$  di misura nulla,  $\mu(N) = 0$ , tale che per ogni  $x \in X \setminus N$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Il Teorema di Egorov mostra che la convergenza quasi ovunque di funzioni misurabili implica la convergenza uniforme su un insieme di misura grande.

**TEOREMA 2.9 (Egorov).** *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura finito,  $\mu(X) < \infty$ , e siano  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , funzioni misurabili tali che  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  per quasi ogni  $x \in X$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme  $X_\varepsilon \subset X$  tale che  $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$  e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

**DIM.** A meno di togliere da  $X$  un insieme di misura nulla, non è restrittivo supporre che  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , per ogni  $x \in X$ . Per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$  definiamo gli insiemi

$$S_{n,k} = \bigcap_{j \geq n} \left\{ x \in X : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Ogni insieme  $S_{n,k}$  è misurabile, si ha la monotonia  $S_{n,k} \subset S_{n+1,k}$ , e inoltre  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,k} = X$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Infatti, fissato  $x \in X$ , in virtù della convergenza puntuale esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$  per ogni  $j \geq n$ , ovvero  $x \in S_{n,k}$ .

Per la continuità della misura per successioni monotone, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(S_{n,k}) = \mu(X),$$

ed essendo la misura  $\mu$  finita, si deduce che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  fissato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X \setminus S_{n,k}) = 0.$$

Pertanto, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $n_k \in \mathbb{N}$  tale che

$$\mu(X \setminus S_{n_k, k}) < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

dove  $\varepsilon > 0$ . Definiamo l'insieme  $X_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{n_k, k}$ . La misura del complementare si stima nel seguente modo:

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X \setminus S_{n_k, k}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus S_{n_k, k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Chiaramente, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha  $X_\varepsilon \subset S_{n_k, k}$  e dunque per ogni  $n \geq n_k$  si ha

$$\sup_{x \in X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

Questa è la convergenza uniforme su  $X_\varepsilon$ .  $\square$

### 3. Integrale di Lebesgue

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura. In questa sezione definiamo l'integrale di Lebesgue di funzioni misurabili. Partiamo dalle funzioni semplici, poi definiamo l'integrale di funzioni non negative e solo alla fine definiamo l'integrale di funzioni con segno.

**DEFINIZIONE 3.10** (Funzione semplice). Una funzione misurabile  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *funzione semplice* se l'insieme  $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$  ha cardinalità finita.

Data una funzione semplice  $\varphi$ , esistono un numero finito di insiemi misurabili  $A_1, \dots, A_n \subset X$  e delle costanti  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{con unione disgiunta,}$$

ed inoltre

$$(3.6) \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in X.$$

Se richiediamo che i valori  $c_1, \dots, c_n$  siano distinti (e che gli insiemi  $A_1, \dots, A_n$  siano disgiunti), allora la rappresentazione è unica.

**DEFINIZIONE 3.11** (Integrale di una funzione semplice). L'integrale di una funzione semplice non negativa  $\varphi : X \rightarrow [0, \infty)$  è per definizione

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) \in [0, \infty].$$

**CONVENZIONE.** In questa definizione, conveniamo che  $c_i \mu(A_i) = 0$  quando  $c_i = 0$  e  $\mu(A_i) = \infty$ .

Sappiamo che una funzione misurabile  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  ha la rappresentazione

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x), \quad x \in X.$$

Qui, gli insiemi  $A_k$  sono misurabili ma non disgiunti. Tuttavia, le troncate della serie, ovvero le funzioni

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

assumono un numero finito di valori e dunque sono funzioni semplici. Dal Teorema 1.8 deduciamo il seguente fatto:

**COROLLARIO 3.12.** *Data una funzione misurabile  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  esiste una successione crescente di funzioni semplici  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tale che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x), \quad x \in X.$$

*Inoltre, la convergenza si può assumere uniforme se  $f$  è limitata.*

DEFINIZIONE 3.13 (Integrale di una funzione misurabile non negativa). Definiamo l'integrale di una funzione misurabile non negativa  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  come

$$\int_X f(x) d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu : \varphi \text{ f.s. tale che } 0 \leq \varphi \leq f \text{ su } X \right\} \in [0, \infty].$$

Se l'integrale è finito diremo che la funzione  $f$  è *integrabile* su  $X$ .

Definiamo ora l'integrale per le funzioni con segno. Data una funzione  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ , definiamo la sua parte positiva e la sua parte negativa

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\},$$

di modo che  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$  ed  $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ .

DEFINIZIONE 3.14. Diciamo che una funzione misurabile  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  è *sommabile* se la funzione  $|f|$  è integrabile. In questo caso scriviamo  $f \in L^1(X) = L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$  e definiamo l'integrale di  $f$  su  $X$  in  $d\mu$

$$\int_X f(x) d\mu = \int_X f^+(x) d\mu - \int_X f^-(x) d\mu.$$

Non c'è una convenzione universale sul significato dei termini “integrabile” e “sommabile”. Noi li useremo come sinonimi. Un limite dell'integrale di Lebesgue è che, nel caso di indeterminazioni  $\infty - \infty$ , non rileva eventuali cancellazioni fra le “aree positive” e le “aree negative” nel sottografico della funzione integranda  $f$ , come invece riesce a fare l'integrale improprio di Riemann.

Nel seguente teorema elenchiamo le proprietà standard dell'integrale di Lebesgue. La dimostrazione è omessa.

TEOREMA 3.15. *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura.*

i) *Se  $f, g \in L^1(X)$  allora per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  si ha  $\alpha f + \beta g \in L^1(X)$  ed inoltre*

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\mu = \alpha \int_X f(x) d\mu + \beta \int_X g(x) d\mu.$$

*Questa è la proprietà di linearità dell'integrale.*

ii) *Se  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  sono funzioni misurabili (oppure  $f, g \in L^1(X)$ ) tali che  $f(x) \leq g(x)$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ , allora*

$$\int_X f(x) d\mu \leq \int_X g(x) d\mu.$$

*Questa è la proprietà di monotonia dell'integrale.*

iii) *Per ogni  $f \in L^1(X)$  si ha la proprietà di subadditività*

$$\left| \int_X f(x) d\mu \right| \leq \int_X |f(x)| d\mu.$$

iv) *Se  $A \subset X$  è misurabile ed  $f \in L^1(X)$ , allora  $f \in L^1(A)$  e si ha*

$$\int_A f(x) d\mu = \int_X f(x) \chi_A(x) d\mu.$$



OSSERVAZIONE 3.16. Anticipando il Teorema di Fubini-Tonelli sullo scambio dell'ordine di integrazione, possiamo dare la seguente interpretazione dell'integrale di Lebesgue. Sia  $f \in L^1(X)$  una funzione non negativa, allora

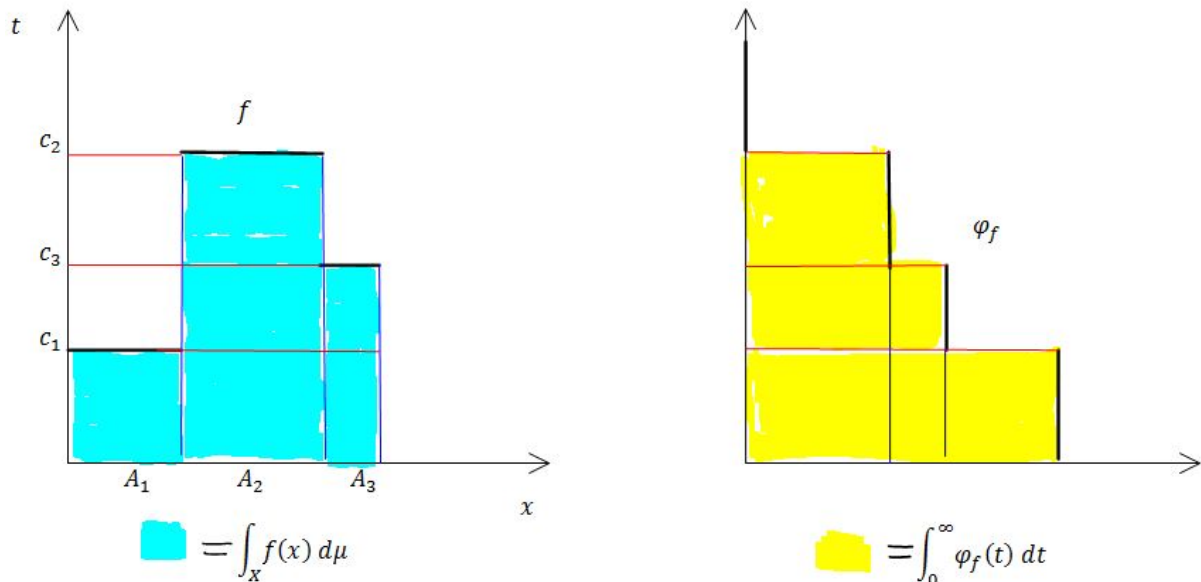
$$\begin{aligned} \int_X f(x) dx &= \int_X \int_0^{f(x)} dt d\mu(x) \\ &= \int_X \int_0^\infty \chi_{(0, f(x))}(t) dt d\mu(x) \quad [\text{Fubini-Tonelli, ad es. con } \mu(X) < \infty] \\ &= \int_0^\infty \int_X \chi_{(0, f(x))}(t) dt d\mu(x) \\ &= \int_0^\infty \int_X \chi_{\{f > t\}}(x) d\mu(x) dt \\ &= \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) dt. \end{aligned}$$

La funzione  $\varphi_f(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$  si dice funzione di ripartizione o funzione di distribuzione di  $f$ . Siccome  $\varphi_f$  è monotona decrescente, l'ultimo integrale è definito anche come integrale di Riemann.

Ad esempio per una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  della forma

$$f(x) = c_1 \chi_{A_1}(x) + c_2 \chi_{A_2}(x) + c_3 \chi_{A_3}(x),$$

con la misura di Lebesgue su  $[0, 1]$  la situazione è la seguente:



#### 4. Assoluta continuità dell'integrale

Vedremo nel seguito del corso le definizioni di funzione assolutamente continua e di misura assolutamente continua. Qui verifichiamo l'assoluta continuità dell'integrale rispetto alla sua misura di riferimento.

**TEOREMA 4.17** (Assoluta continuità dell'integrale). *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $f \in L^1(X)$  una funzione sommabile. Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni insieme misurabile  $A \subset X$  vale l'implicazione*

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq \varepsilon.$$

**DIM.** A meno di sostituire  $f$  con  $|f|$ , non è restrittivo supporre  $f \geq 0$ . Siccome  $f \in L^1(X)$ , il suo integrale è finito, e quindi, per la definizione di integrale, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una funzione semplice  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}, \quad \int_X f(x) d\mu - \int_X \varphi(x) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

dove  $n \geq 1$ ,  $A_i \subset X$  sono insiemi misurabili e  $c_i \geq 0$  sono costanti tali che  $\mu(A_i) = \infty$  implica  $c_i = 0$ .

Se  $f$  non è identicamente nulla, è possibile supporre che anche  $\varphi$  non sia nulla identicamente (q.o.). L'integrale di  $\varphi$  su un insieme misurabile  $A \subset X$  è

$$\int_A \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap A_i) \leq \mu(A) \sum_{i=1}^n c_i.$$

Dunque, con la scelta

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^n c_i}$$

si ha

$$0 \leq \int_A f(x) d\mu \leq \int_X (f(x) - \varphi(x)) d\mu + \int_A \varphi(x) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

non appena  $\mu(A) < \delta$ . □

## 5. Teorema della convergenza monotona e Lemma di Fatou

Il Teorema della convergenza monotona, noto anche come Teorema di Beppo Levi, permette di passare con il limite dentro il segno di integrale quando la successione di funzioni integrate è puntualmente crescente. La dimostrazione si basa sulla continuità della misura per successioni crescenti di insiemi.

**TEOREMA 5.18** (Beppo Levi). *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura, e sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione crescente di funzioni misurabili positive,  $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per q.o.  $x \in X$ . Detta  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  la funzione limite, si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu.$$

**DIM.** La funzione limite  $f$  è misurabile in quanto limite q.o. di funzioni misurabili. Siccome  $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ , per la monotonia dell'integrale si ha

$$0 \leq \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f_{n+1}(x) d\mu \leq \int_X f(x) d\mu.$$

Dunque, il seguente limite esiste e si ha

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f(x) d\mu.$$

Verifichiamo la disuguaglianza opposta. Se mostriamo che ogni funzione semplice  $0 \leq \varphi \leq f$  verifica

$$\int_X \varphi(x) d\mu \leq L,$$

allora la tesi segue. La funzione semplice  $\varphi$  è della forma  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}(x)$  dove  $c_i \geq 0$  e  $A_i \subset X$  sono insiemi misurabili. Fissato  $\delta \in (0, 1)$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$  definiamo gli insiemi

$$E_n = \{x \in X : \delta\varphi(x) \leq f_n(x)\}.$$

Dalla monotonia  $f_n \leq f_{n+1}$  segue che  $E_n \subset E_{n+1}$ , e inoltre dalla convergenza puntuale segue che

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Infatti, se  $x \in X$  ed  $f(x) > 0$  allora si ha  $f_n(x) \rightarrow f(x) > \delta\varphi(x)$ , e dunque  $f_n(x) \geq \delta\varphi(x)$  per tutti gli  $n$  sufficientemente grandi.

Integrando la disuguaglianza  $\delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) \leq f_n(x)$  per  $x \in X$ , e passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = L.$$

L'integrale al membro di sinistra è

$$\int_X \delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) d\mu = \sum_{i=1}^k \delta c_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Per la continuità della misura sulle successioni crescenti di insiemi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \cap E_n\right) = \mu\left(A_i \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(A_i),$$

e dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) d\mu = \delta \sum_{i=1}^k c_i \mu(A_i) = \delta \int_X \varphi(x) d\mu.$$

Per  $\delta \rightarrow 1^-$  nella disuguaglianza

$$\delta \int_X \varphi(x) d\mu \leq L$$

si ottiene la tesi. □

Dal teorema della convergenza monotona segue il Lemma di Fatou.

**TEOREMA 5.19 (Lemma di Fatou).** *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una successione di funzioni misurabili non negative,  $f_n \geq 0$ . Allora*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu.$$

DIM. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  definiamo la funzione misurabile  $g_n : X \rightarrow [0, \infty]$

$$g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x), \quad x \in X.$$

La successione  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è crescente. Dal Teorema di Beppo Levi segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) d\mu.$$

Dal momento che  $g_n \leq f_n$ , si ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) d\mu = \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu.$$

Questa è la tesi. □

## 6. Convergenza dominata e Teorema di Lebesgue-Vitali

Il teorema della convergenza dominata è uno degli strumenti più flessibili per passare al limite sotto il segno di integrale.

**TEOREMA 6.20** (Convergenza dominata). *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili tali che il limite*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

*esista per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ .*

*Se esiste una funzione  $g \in L^1(X)$ , detta maggiorante, tale che  $|f_n(x)| \leq g(x)$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $f \in L^1(X)$  e si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0.$$

*In particolare, questo implica che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu.$$

DIM. Le funzioni  $g_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ,

$$g_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)|, \quad x \in X,$$

sono misurabili e positive,  $g_n \geq 0$ , in quanto  $|f_n| \leq g$  ed  $|f| \leq g$ . Usando la convergenza puntuale  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per q.o.  $x \in X$  quando  $n \rightarrow \infty$ , per il Lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned} 2 \int_X g(x) d\mu &= \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x) d\mu \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu = 2 \int_X g(x) d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} - \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu, \end{aligned}$$

che è equivalente a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq 0,$$

che a sua volta è equivalente al fatto che il limite è zero. □

Il teorema della convergenza dominata non descrive in modo preciso (con un se e solo se) quando la convergenza puntuale implica quella in  $L^1(X)$ . Tale caratterizzazione è data dal Teorema di Lebesgue-Vitali e la nozione chiave è quella di *uniforme integrabilità*.

DEFINIZIONE 6.21. Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura. Una famiglia di funzioni  $\mathcal{F} \subset L^1(X)$  si dice uniformemente integrabile se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f(x)| d\mu < \varepsilon$$

per ogni insieme  $A \subset X$  misurabile.

TEOREMA 6.22 (Lebesgue-Vitali). *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $f_n \in L^1(X)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  una successione di funzioni tale che  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ . Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(A)  $f \in L^1(X)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0$ ;

(B) Valgono le due affermazioni:

(i) La successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è uniformemente integrabile.

(ii) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $X_\varepsilon \subset X$  tale che  $\mu(X_\varepsilon) < \infty$  e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

DIM. A)  $\Rightarrow$  B). Proviamo la (i). Dato  $\varepsilon > 0$ , per ipotesi esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } n > \bar{n}.$$

Per l'assoluta continuità dell'integrale esistono  $\delta_0, \delta_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, \bar{n}$ , tali che

$$\mu(A) \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \int_A |f(x)| d\mu \leq \varepsilon, \quad \mu(A) \leq \delta_k \quad \Rightarrow \quad \int_A |f_k(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Scegliamo  $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{\bar{n}}\}$ . Ora, per  $n > \bar{n}$  si ha

$$\int_A |f_n(x)| d\mu \leq \int_A |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int_A |f(x)| d\mu \leq 2\varepsilon$$

non appena  $\mu(A) \leq \delta$ . Con questo la (i) è provata.

Passiamo alla (ii). Fissato  $\varepsilon > 0$ , per  $t > 0$  consideriamo l'insieme  $A_{0,t} = \{x \in X : |f(x)| \geq t\}$ . Allora

$$\mu(A_{0,t}) = \int_{A_{0,t}} d\mu \leq \frac{1}{t} \int_X |f(x)| d\mu < \infty,$$

e inoltre, essendo  $|f| \in L^1(X)$ , dal teorema della convergenza monotona deriva che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{X \setminus A_{0,t}} |f(x)| d\mu = 0,$$

e quindi esiste  $t_0 > 0$  tale che

$$\int_{X \setminus A_{0,t_0}} |f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Per ipotesi esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon, \text{ per ogni } n > \bar{n}.$$

Per  $k = 1, \dots, \bar{n}$  si considerano gli insiemi  $A_{k,t} = \{x \in X : |f_k(x)| \geq t\}$ . Per l'argomento precedente questi insiemi hanno misura finita e inoltre esistono  $t_k > 0$  tali che

$$\int_{X \setminus A_{k,t_k}} |f_k(x)| d\mu \leq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, \bar{n}.$$

A questo punto si definisce  $X_\varepsilon = \bigcup_{k=0}^{\bar{n}} A_{k,t_k}$ . Risulta  $\mu(X_\varepsilon) < \infty$  e inoltre

$$\int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_k(x)| d\mu \leq \int_{X \setminus A_{k,t_k}} |f_k(x)| d\mu \leq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, \bar{n}.$$

D'altra parte, per  $n > \bar{n}$  si ha

$$\int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x)| d\mu \leq \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f(x)| d\mu \leq 2\varepsilon.$$

Con questo anche la (ii) è provata.

$B) \Rightarrow A)$ . Mostriamo preliminarmente che (i) e (ii) valgono anche per la funzione  $f$ . Ad esempio, usando il Lemma di Fatou

$$\int_{X \setminus X_\varepsilon} |f(x)| d\mu = \int_{X \setminus X_\varepsilon} \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Analogamente si prova l'estensione della (ii).

Sia  $\varepsilon > 0$  fissato. Esiste  $X_\varepsilon \subset X$  tale che  $\mu(X_\varepsilon) < \infty$  e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Inoltre esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $\mu(A) < \delta$  allora

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Per il teorema di Egorov esiste un insieme  $Y_\varepsilon \subset X_\varepsilon$  tale che  $\mu(X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon) < \delta$  ed  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $Y_\varepsilon$ . Ora si può scomporre l'integrale da stimare in questo modo

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu = \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int_{X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int_{Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu.$$

Grazie alla convergenza uniforme esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che per  $n > \bar{n}$  si ha

$$\int_{Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Per la scelta di  $Y_\varepsilon$ , per l'ipotesi (i) si ha

$$\int_{X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon$$

uniformemente per  $n \in \mathbb{N}$ . In conclusione si ottiene

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq 3\varepsilon, \quad \text{per ogni } n > \bar{n}.$$

Segue immediatamente che  $f \in L^1(X)$ . Il teorema è così interamente provato.  $\square$

ESEMPIO 6.23. Sia  $X = (0, 1)$  con la misura di Lebesgue. La successione di funzioni  $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{se } 1/n \leq x < 1, \end{cases}$$

converge a 0 in ogni punto  $x \in (0, 1)$  ed inoltre

$$\int_{[0,1]} |f_n(x)| dx = 1$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . La successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tuttavia, non è uniformemente integrabile.

ESEMPIO 6.24. Sia  $X = \mathbb{R}$  con la misura di Lebesgue. La successione di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

è uniformemente integrabile ed  $f_n(x) \rightarrow 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Tuttavia non verifica la condizione (ii) nel Teorema di Lebesgue-Vitali.

ESERCIZIO 6.1. Derivare il Teorema della convergenza dominata dal Teorema di Lebesgue-Vitali.

## 7. Derivata sotto il segno di integrale

Usiamo il teorema della convergenza dominata per provare un teorema di derivazione sotto segno di integrale.

TEOREMA 7.25. *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty]$  una funzione con queste proprietà:*

- i) *Per ogni  $t \in \mathbb{R}$  la funzione  $x \mapsto f(x, t)$  è integrabile.*
- ii) *Per quasi ogni  $x \in X$  la funzione  $t \mapsto f(x, t)$  è derivabile.*
- iii) *Fissato  $t_0 \in \mathbb{R}$  esistono  $\delta > 0$  e  $g \in L^1(X)$  tali che*

$$\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right| \leq g(x)$$

*per ogni  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  e per q.o.  $x \in X$ .*

Allora la funzione  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu$$

è derivabile nel punto  $t_0$  e risulta

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f(x, t_0)}{\partial t} d\mu.$$

DIM. Osserviamo preliminarmente che per il punto iii) si ha

$$\frac{\partial f(x, t_0)}{\partial t} \in L^1(X).$$

La misurabilità della funzione segue dal fatto di essere limite di funzioni misurabili (i rapporti incrementali).

Per la caratterizzazione sequenziale del limite è sufficiente verificare che per ogni successione  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $t_0$  si può portare il limite del rapporto incrementale dentro l'integrale:

$$(7.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\mu.$$

Per il Teorema di Lagrange, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $t_n \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  e per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$  esiste  $\tau_n(x) \in (t_0, t_n)$  tale che

$$g_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial f(x, \tau_n(x))}{\partial t},$$

e di conseguenza  $|g_n(x)| \leq g(x)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sufficientemente grande e per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ . Siamo dunque nelle ipotesi del Teorema della convergenza dominata, che giustifica il passaggio al limite (7.7).  $\square$

## 8. Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue

In questa sezione proviamo che una funzione è Riemann-integrabile precisamente quando l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura di Lebesgue nulla. Poi proviamo che tutte le funzioni Riemann-integrabili sono Lebesgue integrabili e che i due integrali coincidono.

Ricordiamo che l'oscillazione di una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  su un insieme  $I \subset [0, 1]$  è definita nel seguente modo

$$\omega(f, I) = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I\}.$$

Poi, l'oscillazione locale di  $f$  nel punto  $x \in [0, 1]$  è

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, I_\delta(x)) = \inf_{\delta > 0} \omega(f, I_\delta(x)),$$

dove  $I_\delta(x) = \{y \in [0, 1] : |x - y| < \delta\}$ .

Osserviamo che per ogni  $t > 0$  l'insieme  $E_t = \{x \in [0, 1] : \omega(f, x) < t\}$  è aperto relativamente a  $[0, 1]$ , ovvero il complementare è chiuso, ovvero la funzione  $x \mapsto \omega(f, x)$  è superiormente semicontinua. Infatti, se  $x \in E_t$  allora esiste  $\delta > 0$  tale che  $\omega(f, I_\delta(x)) < t$  e quindi per ogni  $y \in I_\delta(x)$  esiste un  $\delta' > 0$  tale che  $I_{\delta'}(y) \subset I_\delta(x)$  e dunque

$$\omega(f, y) \leq \omega(f, I_{\delta'}(y)) \leq \omega(f, I_\delta(x)) < t.$$

La funzione  $f$  è continua nel punto  $x \in [0, 1]$  se e solo se  $\omega(f, x) = 0$ , e l'insieme

$$D(f) = \{x \in [0, 1] : \omega(f, x) > 0\}$$

è l'insieme dei punti di discontinuità di  $f$ .

**LEMMA 8.26.** *Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Supponiamo che per ogni  $x \in [0, 1]$  risulti  $\omega(f, x) < \varepsilon$ . Allora esiste  $\delta > 0$  tale che  $\omega(f, I) < \varepsilon$  per ogni intervallo  $I \subset [0, 1]$  con  $\mathcal{L}^1(I) < \delta$ .*

**DIM.** Per ogni  $x \in [0, 1]$  esiste  $\delta_x > 0$  tale che  $\omega(f, I_{\delta_x}(x)) < \varepsilon$ . La famiglia di intorno  $\{I_{\delta_x/2}(x) : x \in [0, 1]\}$  è un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$  dal quale è possibile estrarre un sottoricoprimento finito  $\{I_{\delta_i/2}(x_i) : i = 1, \dots, n\}$ , dove  $\delta_i = \delta_{x_i}$ . Scegliendo



$\delta = \min\{\delta_i/2 : i = 1, \dots, n\}$ , allora per ogni  $x \in [0, 1]$  esiste  $i$  tale che  $I_\delta(x) \subset I_{\delta_i}(x_i)$ , e pertanto

$$\omega(f, I_\delta(x)) \leq \omega(f, I_{\delta_i}(x_i)) < \varepsilon.$$

□

**TEOREMA 8.27.** *Una funzione limitata  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è Riemann-integrabile se e solo se  $\mathcal{L}^1(D(f)) = 0$ .*

**DIM.** Proviamo che se  $\mathcal{L}^1(D(f)) > 0$  allora  $f$  non è Riemann-integrabile. Siccome

$$D(f) = \{x \in [0, 1] : \omega(f, x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in [0, 1] : \omega(f, x) \geq \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k,$$

esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $\mathcal{L}^1(D_k) > 0$ .

Sia  $\sigma$  una suddivisione di  $[0, 1]$  e indentifichiamo  $\sigma$  con la famiglia degli intervalli associati  $\sigma = \{I\}$ . Indichiamo con  $S(f, \sigma)$  e  $s(f, \sigma)$  le somme inferiori e superiori di  $f$  relative a  $\sigma$ . Allora avremo

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) &= \sum_{I \in \sigma} \omega(f, I) \mathcal{L}^1(I) \geq \sum_{\text{int}(I) \cap D_k \neq \emptyset} \omega(f, I) \mathcal{L}^1(I) \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{\text{int}(I) \cap D_k \neq \emptyset} \mathcal{L}^1(I) \geq \frac{1}{k} \mathcal{L}^1(D_k). \end{aligned}$$

Infatti si ha

$$\mathcal{L}^1(D_k) \leq \sum_{\text{int}(I) \cap D_k \neq \emptyset} \mathcal{L}^1(I)$$

e inoltre  $\omega(f, I) \geq \omega(f, x) \geq 1/k$  per qualche  $x \in \text{int}(I) \cap D_k$ . Questo prova la non integrabilità di  $f$ .

Proviamo che se  $\mathcal{L}^1(D(f)) = 0$  allora  $f$  è Riemann-integrabile. Mostriamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una suddivisione  $\sigma$  di  $[0, 1]$  tale che  $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) \leq \varepsilon$ . Come sopra, avremo  $D(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ , e siccome  $\mathcal{L}^1(D(f)) = 0$  risulta  $\mathcal{L}^1(D_k) = 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , esiste una famiglia al più numerabile  $\mathcal{F}_1 = \{I\}$  di intervalli (aperti o, equivalentemente, chiusi) tali che  $D_k \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}_1} I$  e

$$\sum_{I \in \mathcal{F}_1} \mathcal{L}^1(I) \leq \varepsilon.$$

L'insieme  $D_k$  è un sottoinsieme chiuso di  $[0, 1]$  e quindi è compatto. Dunque, possiamo supporre che la famiglia  $\mathcal{F}_1$  sia finita. Avremo allora

$$[0, 1] \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_1} \text{int}(I) = \bigcup_{I \in \mathcal{F}_2} I$$

per una famiglia finita  $\mathcal{F}_2$  di intervalli chiusi disgiunti. Poichè  $\omega(f, x) < 1/k$  per ogni  $x \in I$ ,  $I \in \mathcal{F}_2$ , dal Lemma 8.26 segue che  $\bigcup_{I \in \mathcal{F}_2} I = \bigcup_{I \in \mathcal{F}_3} I$  per una famiglia finita  $\mathcal{F}_3$  di intervalli chiusi essenzialmente disgiunti tali che  $\omega(f, I) < 1/k$  per ogni  $I \in \mathcal{F}_3$ . Due intervalli  $I$  e  $J$  sono essenzialmente disgiunti se  $\mathcal{L}^1(I \cap J) = 0$ , cioè se si intersecano al più in un punto.

Sia  $\sigma$  la suddivisione di  $[0, 1]$  univocamente determinata dalla famiglia di intervalli  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_3$ . Allora, detto  $M = \sup_{[0,1]} |f|$ , si trova

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \sigma} \omega(f, I) \mathcal{L}^1(I) &= \sum_{I \in \mathcal{F}_1} \omega(f, I) \mathcal{L}^1(I) + \sum_{I \in \mathcal{F}_3} \omega(f, I) \mathcal{L}^1(I) \\ &\leq 2M \sum_{I \in \mathcal{F}_1} \mathcal{L}^1(I) + \frac{1}{k} \leq (2M + 1)\varepsilon, \end{aligned}$$

non appena  $k > 1/\varepsilon$ . □

**TEOREMA 8.28.** *Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata Riemann-integrabile. Allora  $f$  è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali coincidono.*

**DIM.** Mostriamo che  $f$  è una funzione misurabile. Sia  $t \in \mathbb{R}$  e proviamo che l'insieme  $E_t = \{x \in [0, 1] : f(x) < t\}$  è misurabile. Sia  $D(f) = \{x \in [0, 1] : \omega(f, x) > 0\}$  l'insieme dei punti di discontinuità di  $f$ . Per il Teorema 8.27 risulta  $\mathcal{L}^1(D(f)) = 0$ . Per un esercizio visto in classe segue che  $f$  è misurabile.

Sappiamo che se  $f$  è Riemann-integrabile, allora anche le parti positiva e negativa  $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$  e  $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ ,  $x \in [0, 1]$ , sono Riemann-integrabili. Quindi non è restrittivo supporre  $f \geq 0$ . Indichiamo con  $S(f)$  l'insieme delle funzioni semplici minoranti di  $f$  ed indichiamo con  $S([0, 1])$  l'insieme delle suddivisioni di  $[0, 1]$ . Allora avremo

$$\int_0^1 f(x) dx = \sup_{\sigma \in S([0,1])} \sum_{I \in \sigma} \mathcal{L}^1(I) \inf_I f \leq \sup_{\varphi \in S(f)} \int_{[0,1]} \varphi(x) dx = \int_{[0,1]} f(x) dx.$$

Infatti, ad ogni suddivisione  $\sigma = \{I\}$  di  $[0, 1]$  corrisponde la funzione semplice  $\varphi(x) = \sum_{I \in \sigma} (\inf_I f) \chi_I(x) \in S(f)$ .

Proviamo la disuguaglianza opposta. Sia  $\sigma$  una suddivisione di  $[0, 1]$  e sia  $\varphi \in S(f)$  una funzione semplice che minora la funzione  $f$ ,  $0 \leq \varphi \leq f$  su  $[0, 1]$ . Avremo

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in [0, 1],$$

dove  $c_i \geq 0$ , gli insiemi  $A_i$  sono misurabili e  $\bigcup_{i=1}^n A_i = [0, 1]$  con unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \varphi(x) dx &= \sum_{i=1}^n c_i \int_{[0,1]} \chi_{A_i}(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{I \in \sigma} \int_I \chi_{A_i}(x) dx = \sum_{I \in \sigma} \int_I \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(x) dx \\ &\leq \sum_{I \in \sigma} \mathcal{L}^1(I) \sup_{x \in I} f(x). \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di  $\varphi \in S(f)$  nell'insieme delle funzioni semplici minoranti e di  $\sigma$  nell'insieme delle suddivisioni di  $[0, 1]$  segue che

$$\int_{[0,1]} f(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

□