<u>Esercizio</u> Determinare tutti gli $\alpha>0$ tali che la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

sia a variazione totale limitata su $[0,1]$.

Soluzione. Per $\alpha>0$ è certamente $f \in C([0,1])$ e inoltre $f \in C^1(]0,1])$ per ogni $\alpha>0$.
La derivata per $x \neq 0$ è

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

É immediato vedere che per $\alpha > 2$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

e quindi

$$\alpha > 2 \Rightarrow f \in C^1([0,1]) \Rightarrow f \in BV([0,1]).$$

Osserviamo che per ogni $\alpha>0$ si ha $\alpha x^{\alpha-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \in L^1(0,1)$
infatti

$$\int_0^1 \left| \alpha x^{\alpha-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx \leq \alpha \int_0^1 \frac{1}{x^{-\alpha+1}}\, dx < \infty .$$

Studiamo l'integrabilità di $x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\int_0^1 \left| x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx = \int_0^1 \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\, dt$$

Se $\alpha > 1$ si ha $\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \in L^1(1,\infty)$ e

quindi $x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in L^1(0,1)$. Deduco che

$\forall x \in (0,1]$ ha senso ed è valida l'identità

$$f(x) = \int_0^x \underset{\substack{\cap \\ L^1(0,1)}}{f'(t)}\, dt .$$

Quindi $f \in AC([0,1])$ $\forall \alpha > 1$ e pertanto

$$\alpha > 1 \implies f \in AC([0,1]) \implies f \in BV([0,1]).$$

Voglio provare che

$$0 < \alpha \leq 1 \implies f \notin BV([0,1]).$$

Se fosse $f \in BV([0,1])$ dovrebbe essere:

i) $f'(x)$ esiste q.o. (vero nel nostro caso)

ii) $f' \in L^1(0,1)$, Da discutere, nel nostro caso

Affermo che $\frac{\sin t}{t^\alpha} \notin L^1(1,\infty)$ per $0<\alpha\leq 1$.

Da cui segue che $f' \notin L^1(0,1)$.

Infatti:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\pi/3+k\pi}^{2\pi/3+k\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)^\alpha} \cdot \pi/3 = \infty \quad \text{per } \alpha \leq 1.$$

Conclusione: $f \in BV([0,1]) \iff \alpha > 1$.

Esercizio Sia $f \in L^1(0,1)$. Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $f \in L^2(0,1)$

2) Esiste $g \in AC([0,1])$ tale che $\forall x,y \in [0,1]$ si ha

$$\left| \int_{[x,y]} f(t)\,dt \right|^2 \leq \big(g(y) - g(x)\big)(y-x)$$

Soluzione 1) => 2) Disuguaglianza di Hölder:

$$\int_{[x,y]} |f(t)|\,dt \leq \left(\int_{[x,y]} |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[x,y]} 1 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |x-y|^{1/2} \left(\int_{[x,y]} |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\left|\int_{[x,y]} f(t)\,dt\right|^2 \leq |x-y| \int_{[x,y]} |f(t)|^2\,dt =$$

$$= |x-y| \left| \int_0^y |f(t)|^2\,dt - \int_0^x |f(t)|^2\,dt \right|$$

$$= |x-y|\,|g(y) - g(x)|$$

$$= \big(g(y) - g(x)\big)(y-x)$$

dove $g(x) = \int_0^x |f(t)|^2\,dt$ è crescente ed inoltre $g \in AC([0,1])$ essendo $|f|^2 \in L^1(0,1)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supponiamo $y > x$ e dividiamo per $(y-x)^2$

$$\left| \frac{1}{x-y} \int_x^y f(t)\, dt \right|^2 \leq \frac{g(y)-g(x)}{y-x}$$

Sappiamo che per q.o. $x \in [0,1]$ si ha

- $$\lim_{y \to x^+} \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)\, dt = f(x),$$
- esiste $$g'(x) = \lim_{y \to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x}.$$

Deduciamo che

$$|f(x)|^2 \leq g'(x) \quad \text{per q.o. } x \in [0,1]$$

Siccome $g \in AC([0,1]) \Rightarrow g' \in L^1(0,1)$, la disuguaglianza prova che $f \in L^2(0,1)$.

$\square$