Esercizio. Sia μ una misura di probabilità su $\mathbb{R}$.

Allora

$$(1) \qquad |E| = \int_{\mathbb{R}} \mu(x+E)\,dx \qquad \forall E \subset \mathbb{R} \text{ Boreliano.}$$

Soluzione. Scrivo

$$(2) \qquad \mu(x+E) = \int_{x+E} d\mu = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(y-x)\,d\mu(y)$$

e dunque

$$(3) \qquad \int_{\mathbb{R}} \mu(x+E)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(y-x)\,d\mu(y) \right) dx$$

$$\overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(y-x)\,dx \right) d\mu(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |E|\,d\mu(y)$$

$$= |E|\,\mu(\mathbb{R}) = |E|,$$

#

Esercizio $\varphi : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ crescente $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$

$f_n = \varphi(n)\, \chi_{(0,1/n)}$ in $[0,1]$

Sono eq.:

i) f_n converge in $L^1(0,1)$

ii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è unif. integrabile

iii) $\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$

Sono eq.

a) Esiste $g \in L^1(0,1)$ t.c. $|f_n| \le g$ $\forall n$

b) Si ha $\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt < \infty$

Sol.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

i) $\Leftrightarrow$ ii) È il Teor. Lebesgue - Vitali

ii) $\Rightarrow$ iii) Ipotesi: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che

$$\mathcal{L}^1(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f_n(x)|\, dx < \varepsilon \quad \forall n$$

In particolare con $A = (0, \frac{1}{m})$ ed $\frac{1}{m} < \delta$:

$$\int_0^{1/m} \varphi(n)\, \chi_{(0,1/n)}(x)\, dx = \varphi(n) \cdot \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} \quad \forall n$$

Dunque

$$\frac{1}{m} < \delta \Rightarrow \varphi(n) \cdot \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In particolare con $n = m > \frac{1}{\delta}$ si trova

$$\frac{\varphi(n)}{n} < \varepsilon$$

Sia ora $x > \frac{1}{\delta} + 1$. Allora esiste $n > \frac{1}{\delta}$ tale che $n \leq x < n+1$ e dunque

$$\frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{\varphi(n+1)}{n} = \frac{n+1}{n} \frac{\varphi(n+1)}{n+1} \leq 2\varepsilon .$$

iii) $\Rightarrow$ i)

$$\| f_n \|_1 = \int_0^1 f_n(x)\, dx = \varphi(n) \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

* * *

a) $\Rightarrow$ b) Sia ψ la funzione tale che

$$\psi(x) = \varphi(n) \quad \text{se } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

Chiaramente

$$f_n \leq \psi(x) \leq g(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n(n+1)} = \int_0^1 \psi(x)\, dx \leq \int_0^1 g(x)\, dx < \infty$$

Di conseguenza

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt$$

$$\le \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi(n+1)}{n^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{n^2} \, \frac{\varphi(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\le 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi(n+1)}{(n+1)(n+2)} < \infty$$

Viceversa

$$\infty > \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt$$

$$\ge \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi(n)}{(n+1)^2} = \sum \frac{n}{n+1} \, \frac{\varphi(n)}{n(n+1)}$$

$$\ge \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(x)\,dx$$

$\square$

Esercizio Sia (X,μ) uno spazio di probabilità, sia $f \in L^1(X)$ con $f \geq 1$.

Provare che

$$(1) \qquad \int_X f(x) \log f(x)\, d\mu \geq \int_X f(x)\, d\mu \cdot \int_X \log f(x)\, d\mu$$

SOLUZIONE:

Noto che $\log f \in L^1(X)$ e che $f \log f \geq 0$.

Posso applicare Fubini-Tonelli, considero

$$D = \int_X f(x) \log f(x)\, d\mu(x) - \int_X f(x)\, d\mu(x) \int_X \log f(y)\, d\mu(y) =$$

$$= \int_X \left\{ \int_X f(x) \log f(x)\, d\mu(x) - \log f(y) \int_X f(x)\, d\mu(x) \right\} d\mu(y)$$

$$= \int_{X\times X} \left\{ f(x) \log f(x) - f(x) \log f(y) \right\} d\mu \otimes d\mu$$

Siccome le variabili x e y sono simmetriche trovo

$$D = \frac{1}{2} \int_{X\times X} \left\{ f(x) \log f(x) - f(x) \log f(y) + f(y) \log f(y) - f(y) \log f(x) \right\} d\mu \otimes d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_{X\times X} \left\{ f(x) \left(\log f(x) - \log f(y)\right) - f(y) \left(\log f(x) - \log f(y)\right) \right\} d\mu \otimes d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_{X\times X} \left(f(x) - f(y)\right)\left(\log f(x) - \log f(y)\right) d\mu \otimes d\mu \geq 0$$

perché $\log$ è monotona.