ESERCIZIO Sia $h \in L^1([0,1])$ una funzione assegnata. Provare che esiste un'unica soluzione $f \in L^1([0,1])$ dell'equazione

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \log(1+f(y)^2)\,dy$$

per q.o. $x \in [0,1]$

Soluzione. Sappiamo che $\log(1+t^2) \leq Ct \quad \forall t \geq 0$ per qualche costante $C>0$. Dunque

$$\int_0^1 \int_0^x \log(1+f(y)^2)\,dy\,dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^x C\,|f(y)|\,dy\,dx \leq C\,\|f\|_1$$

Dunque $T : L^1([0,1]) \to L^1([0,1])$

$$Tf(x) = h(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \log(1+f(y)^2)\,dy$$

è ben definito.

Sappiamo che $L^1([0,1])$ è uno spazio di Banach se T è una contrazione l'affermazione segue dal Teorema di punto fisso di Banach.

$$Tf(x) - Tg(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\log(1+f(y)^2) - \log(1+g(y)^2)\right)dy$$

Studio la funzione $\phi(t) = \frac{1}{2}\log(1+t^2)$:

$$\phi'(t) = \frac{1}{2}\,\frac{2t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall t \geq 0.$$

quindi

$$\left| \frac{1}{2}\left(\log(1+f(y)^2) - \log(1+g(y)^2) \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} |f(y) - g(y)|$$

e quindi

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leq \frac{1}{2} \int_0^x |f(y) - g(y)| \, dy$$

$$\leq \frac{1}{2} \|f - g\|_1$$

e integrando su $[0,1]$:

$$\|Tf - Tg\|_1 \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_1 .$$

$\square$

ESERCIZIO $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ = σ-algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}^n$

$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ misura tale che

1) $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$

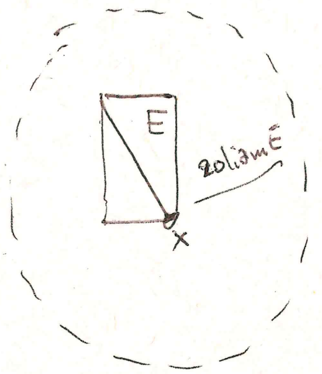
2) $\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$\operatorname{diam}(E) < \delta \implies \mu(E) < \varepsilon$$

per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Soluzione. È sufficiente provare l'affermazione quando $E = B$ palla di $\mathbb{R}^n$ infatti $\forall E \subset \mathbb{R}^n \ \exists x \in \mathbb{R}^n$ tale che $E \subset B(x, 2\operatorname{diam}(E))$.



Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto e prendiamo $x \in K$

$$\lim_{r \to 0^+} \mu(B(x,r)) = \mu\Big(\bigcap_{r>0} B(x,r)\Big) = \mu(\{x\}) = 0$$

Quindi $\exists\, r_x > 0$ tale che

$$\mu(B(x, r_x)) < \varepsilon$$

Chiaramente

$$K \subset \bigcup_{x \in K} \underbrace{B\left(x, \tfrac{r_x}{2}\right)}_{\text{palle aperte}}$$

Per compattezza esistono $x_1, \dots, x_N \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r_i/2) \qquad \text{con} \quad r_i = r_{x_i}$$

Sia $\delta = \min\{ r_1/4, \dots, r_N/4 \} > 0$

Se $E \subset K$ e $\operatorname{diam}(E) < \delta$ allora esiste $i = 1, \dots, N$ tale che $\underset{\substack{\Downarrow \\ y \text{ Esiste}}}{E \cap B(x_i, r_i/2) \neq \emptyset}$ e $\forall x \in E$ si ha

$$|x - x_i| \leq |x - y| + |y - x_i| < \delta + r_i/2 < \frac{3}{4} r_i$$

ovvero $E \subset B(x_i, r_i)$ e dunque

$$\mu(E) \leq \mu(B(x_i, r_i)) < \varepsilon .$$

Dunque l'affermazione è vera per $E \subset \overline{B(0,R)}$ con $R > 0$ che possiamo scegliere.

Ora osserviamo che

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{K=1}^{\infty} \overline{B(0,K)} = \overline{B(0,1)} \cup \bigcup_{K=2}^{\infty} \overline{B(0,K)} \setminus \overline{B(0,K-1)}$$

e dunque

$$1 = \mu(\overline{B(0,1)}) + \sum_{K=2}^{\infty} \mu(\overline{B(0,K)} \setminus \overline{B(0,K-1)})$$

Dunque esiste $\overline{K} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{K=\overline{K}}^{\infty} \mu(\overline{B(0,K)} \setminus \overline{B(0,K-1)}) < \varepsilon$$

$$= \mu(\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| > \overline{K} - 1 \})$$

Dunque se $E \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \bar{k} - 1\}$ si ha (indipendentemente dal diametro) $\mu(E) < \varepsilon$.

Mettendo insieme le due considerazioni si ottiene la soluzione. Dettagli lasciati al lettore.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Provare che per q.o. $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy = f(x_0).$$

Soluzione. Per il teorema di Lebesgue q.o. $x_0 \in \mathbb{R}$ verifica:

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{I_r(x_0)} |f(y) - f(x_0)|\,dy = 0$$

dove $I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

Dunque

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy - f(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x - x_0} \big(f(y) - f(x_0)\big)\,dy \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{(x_0 - r, x_0 + r)} |f(y) - f(x_0)|\,dy \qquad \text{con } r = |x - x_0|$$

$$\leq 2 \cdot \frac{1}{2r} \int_{I_r(x_0)} |f(y) - f(x_0)|\,dy \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0$$

$\square$

ESERCIZIO Si consideri la palla unitaria in $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$B = \{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) \ ; \ \|f\|_1 \leq 1 \}$$

(i) Provare che B non è uniformemente integrabile.

(ii) Sia $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una funzione assegnata.
Provare che l'insieme

$$G = \{ g * f \in L^1(\mathbb{R}^n) \ ; \ f \in B \}$$

è uniformemente integrabile

Soluzione. Un insieme $B \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ è uniformemente integrabile se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{tale che} \quad \mathcal{L}^n(A) < \delta \implies \int_A |f| dx < \varepsilon$$

per ogni $f \in B$

dove $A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile.

Per $\lambda > 0$ parametro, la funzione

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n \lambda^n} & \text{se} \quad |x| < \lambda \\ 0 & \text{se} \quad |x| \geq \lambda \end{cases}$$

verifica $f_\lambda \in B$. Tuttavia per $\omega_n \lambda^n < \delta$ si ha $\mathcal{L}^n(B(0,\lambda)) < \delta$ mentre $\displaystyle\int_{B(0,\lambda)} |f(x)| dx = 1$.

(ii) Se $g, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sappiamo che

$$\|g * f\|_1 \leq \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty$$

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\mathcal{L}^n(A) < \delta \implies \int_A |g| dx < \varepsilon$$

per l'assoluta continuità dell'integrale.

Quindi

$$\int_A |g*f(x)|\,dx = \int_A \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\, f(y)\, dy \right| dx \leq$$

Tonelli

$$\leq \int_A \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\, |f(y)|\, dy\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_A |g(x-y)|\, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{A-y} |g(z)|\, dz \right) dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \cdot \varepsilon\, dy = \varepsilon$$

in quanto $\mathcal{L}^n(A-y) = \mathcal{L}^n(A) < \delta$.