Analisi Reale 2014-15 Foglio 1

σ-algebre, misure, $\mathscr{L}^n$ ed $\mathscr{H}^s$ 16 Ottobre 2014

Esercizio 1 Sia X un insieme con $\mathrm{Card}(X) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Sia $\mathscr{A}$ la famiglia degli insiemi $A \subset X$ tali che $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ oppure $\mathrm{Card}(A') \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Si definisca $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ ponendo $\mu(A) = 0$ se $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ e $\mu(A) = 1$ se $\mathrm{Card}(A') \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Provare che $\mathscr{A}$ è una $\sigma-$algebra e che μ è una misura.

Esercizio 2 Sia X un insieme e sia $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}(X)$. Provare che l'insieme

$$\bigcap \big\{ \mathscr{A} : \mathscr{Q} \subset \mathscr{A} \ \text{ ed } \mathscr{A} \text{ è una } \sigma\text{-algebra di } X \big\}$$

è la più piccola σ-algebra contenente $\mathscr{Q}$, detta σ-algebra generata da $\mathscr{Q}$.

Esercizio 3 Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Un punto $x \in X$ tale che $\{x\} \in \mathscr{A}$ si dice atomo di μ se $\mu(\{x\}) > 0$. Provare che se $\mu(X) < \infty$ allora l'insieme degli atomi è al più numerabile.

Esercizio 4 Costruire un esempio di successione decrescente di insiemi $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \mathscr{L}^1(A_n) \neq \mathscr{L}^1\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Big).$$

Esercizio 5 Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$. Definiamo $x_0 + A = \{x_0 + x \in \mathbb{R}^n : x \in A\}$ e $\lambda A = \{\lambda x \in \mathbb{R}^n : x \in A\}$. Provare che $\mathscr{L}^n(x_0 + A) = \mathscr{L}^n(A)$ e che $\mathscr{L}^n(\lambda A) = \lambda^n \mathscr{L}^n(A)$.

Esercizio 6 Provare che, per ogni $s \geq 0$, la funzione di insiemi $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ definita in classe è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 7 Sia $I = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)$ un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$ con misura $\mathrm{mis}(I) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$. Sia $\mathscr{L}^n$ la misura esterna di Lebesgue.

i) Provare che $\mathrm{mis}(I) = \mathscr{L}^n(I)$.

ii) Provare che I è $\mathscr{L}^n$-misurabile.

iii) Provare che ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ è $\mathscr{L}^n$-misurabile.