Analisi Reale 2014-15 Foglio 2

Funzioni misurabili, integrabili, passaggio al limite 23 Ottobre 2014

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ una funzione misurabile non-negativa tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0.$$

Provare che $f(x) = 0$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni $\mathscr{L}^1$-misurabili. Provare che l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge ad un valore finito}\}$$

è $\mathscr{L}^1$-misurabile.

Esercizio 3 Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx.$$

Esercizio 4 Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f \in L^1(X)$. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + \left(\frac{|f(x)|}{n}\right)^2\right) d\mu.$$

Esercizio 5 Siano $f, f_n \in L^1(X)$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni tali che $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per q.o. $x \in X$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x)| d\mu = \int_X |f(x)| d\mu.$$

Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0.$$

Esercizio 6 Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile non negativa, $f \geqslant 0$. Supponiamo che esista un numero $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$\int_{[0,1]} f(x)^n dx = \alpha.$$

Provare che f è la funzione caratteristica di un insieme misurabile.

Esercizio 7 ★ Sia $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

i) $t \mapsto f(t,x)$ è misurabile per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ii) per q.o. $t \in [0,1]$, la funzione $x \mapsto f(t,x)$ è continua.

Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che la funzione $g(t) = f(t,\varphi(t))$, $t \in [0,1]$, è misurabile.

Esercizio 8 ★ Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M < \infty$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$. Provare che

$$\Big(\int_0^1 f(x)dx \Big) \Big(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \Big) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$