Analisi Reale 2014-15 Foglio 6

Fubini-Tonelli, insieme di Cantor, misure Boreliane 27 Novembre 2014

Esercizio 1 Consideriamo il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ e sia $f : Q \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire se f è integrabile su Q. Calcolare gli integrali ripetuti, nei due ordini.

Esercizio 2 Sia $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \mathrm{e}^{-yx^2} \sin y$. Verificare che i seguenti integrali ripetuti esistono e sono uguali

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty f(x,y)dx \Big) dy = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty f(x,y)dy \Big) dx.$$

Provare che $f \notin L^1([0,\infty) \times [0,\infty))$.

Sugg. Integrare sul rettangolo $[0,n] \times [0,m]$ e poi passare al limite. Conti lunghi.

Esercizio 3 Sia μ una misura Boreliana di probabilità su $\mathbb{R}$, $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Provare che per ogni insieme Boreliano $E \subset \mathbb{R}$ si ha

$$\mathscr{L}^1(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu(x+E)dx.$$

Sugg. Scambio ordine integrazione (si suppone μ completa).

Esercizio 4 Sia μ una misura Boreliana finita su $[1,\infty)$ e definiamo la funzione $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \int_1^\infty \cos(tx)d\mu(x).$$

Provare che esiste $t \in [0,\pi]$ tale che $f(t) = 0$.

Sugg. Moltiplicare per $\sin(t)$ e integrare.

Esercizio 5 ★ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile tale che

$$\int_I f(x)dx = 0$$

per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$ di lunghezza 1 o $\sqrt{2}$. Provare che $f = 0$ $\mathscr{L}^1$-q.o.

Esercizio 6 ★ Costruire una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che: 1) $f \in C^1([0,1])$; 2) f è strettamente crescente; 3) L'insieme $C \subset \mathbb{R}$ dei valori critici di f è più che numerabile, dove $C = \{f(x) \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$.