Analisi Reale 2014-15 Foglio 7

Esercizi vari 15 Dicembre 2014

Esercizio 1 Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{1/n} \mathrm{e}^{-x/n}, \quad x \in [0,1].$$

Studiare la convergenza puntuale, quasi ovunque, uniforme, in L^1, in L^2, in L^2-debole, e in misura di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 2 Studiare continuità e derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 Sia $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e sia

$$K = \{f \in L^1([0,1]) : |f(x)| \leqslant h(x) \text{ per q.o. } x \in [0,1]\}.$$

Provare che se $K \subset L^1([0,1])$ è (sequenzialmente) compatto allora deve essere $h \in L^1([0,1])$.

Esercizio 4 Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ provare che per q.o. $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(y) dy = f(x_0),$$

dove l'integrale è "orientato".

Sugg. Teorema di differenziazione di Lebesgue nella versione più forte.

Esercizio 5 Sia $h \in L^1([0,1])$ una funzione assegnata. Provare che esiste un'unica (q.o.) funzione $f \in L^1([0,1])$ che risolve l'equazione

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \log(1 + f(y)^2) dy,$$

per q.o. $x \in [0,1]$.

Sugg. Punto fisso di Banach.

Esercizio 6 Siano $\mathscr{B} = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \|f\|_1 \leqslant 1\}$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$.

i) Provare che $\mathscr{B}$ non è uniformemente integrabile.

ii) Provare che l'insieme $\mathscr{G} = \{g * f \in L^1(\mathbb{R}) : f \in \mathscr{B}\}$ è uniformemente integrabile.

Esercizio 7 Siano $f, g, h : [0,1] \to [0,\infty]$ funzioni non negative ed integrabili. Provare che sono equivalenti:

i) $(f(x))^2 \leqslant g(x)h(x)$ per q.o. $x \in [0,1]$.

ii) Per ogni insieme misurabile $E \subset [0,1]$ si ha

$$\Big(\int_E f(x)dx\Big)^2 \leqslant \int_E g(x)dx \int_E h(x)dx.$$

Esercizio 8 ★★ Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $\|f''\|_\infty < \infty$. Provare che $\sqrt{f}$ è Lipschitziana.

Esercizio di Analisi 1.