Analisi Reale 2014-15 Foglio 8

Funzioni BV e AC 15 Gennaio 2015

Esercizio 1 Consideriamo la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{x}{|\log(x/2)|^\alpha} \sin(1/x) & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f \in BV([0,1])$.

Esercizio 2 Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Provare che (a meno di insiemi di misura nulla):

i) Se $f \in W^{1,p}(0,1)$ con $1 < p \leqslant \infty$ allora f è Hölderiana.

ii) Si ha $f \in W^{1,\infty}(0,1)$ se e solo se f è Lipschitziana.

Esercizio 3 Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni. Discutere la validità delle seguenti affermazioni:

i) Se $f, g \in BV([0,1])$ allora il prodotto $fg \in BV([0,1])$.

ii) Se $f, g \in AC([0,1])$ allora il prodotto $fg \in AC([0,1])$.

Esercizio 4 Sia $\{q_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : n \in \mathbb{N}\}$ una enumerazione di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ e indichiamo con $\chi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione caratteristica dell'intervallo (q_n, q_{n+1}), ovvero $\chi_n(x) = 1$ se x è (strettamente) compreso fra q_n e q_{n+1}, e $\chi_n(x) = 0$ altrimenti. Provare che per $\alpha > 1$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \chi_n(x), \quad x \in [0,1].$$

è a variazione totale limitata su $[0,1]$.

Esercizio 5 Sia $f \in AC([0,1])$ una funzione assolutamente continua. Provare che f trasforma insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.