Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: 24/8/2020 - Modalità telematica

INSTRUZIONI:

Spedire le soluzioni in bella copia manoscritta e controfirmata in ogni pagina come unico file pdf all'indirizzo monti@math.unipd.it entro le ore 11.00. Estensione del file:

`cognome_nome_matricola.pdf`

Il mancato rispetto di tali regole comporterà l'annullamento della prova.

Esercizio 1 Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4|y|^\alpha}{(x^2+y^4)^{7/4}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

i) Determinatere tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua nel punto $(0,0)$.

ii) Determinatere tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia differenziabile nel punto $(0,0)$.

Esercizio 2 Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \left(2x + \frac{1}{1+y^2}, 2y + \frac{1}{1+x^2}\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

ii) Stabilire se F è ~~un~~ iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

---

1 ora e 50 minuti a disposizione + 10 minuti per la consegna del file

__Esercizio__ Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 |y|^\alpha}{(x^2+y^4)^{7/4}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) Prima stima:

$$\frac{x^4 |y|^\alpha}{(x^2+y^4)^{7/4}} \leq \frac{x^4 |y|^\alpha}{|x|^{7/2}} = \sqrt{|x|}\, |y|^\alpha \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

se $\alpha \geq 0$.

Dunque:

$$\alpha \geq 0 \implies f \text{ continua in } 0.$$

Studiamo il caso $\alpha < 0$. Lungo $y = x^m$ (con m parametro) si ha

$$f(x, x^m) = \frac{x^4 |x|^{m\alpha}}{(x^2 + |x|^{4m})^{7/4}} =$$

$$= \frac{|x|^{4+m\alpha-7/2}}{(1+|x|^{4m-2})^{7/2}}$$

Scegliamo $m \in \mathbb{N}$ tale che:

1) $4m - 2 > 0$

2) $4 + m\alpha - 7/2 < 0$

Esiste tale m in quanto $\alpha < 0$.

Con tale scelta:

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^m) = +\infty .$$

Dunque:

$$\alpha < 0 \implies f \text{ non è continua in } (0,0).$$

ii) Sugli assi è $f = 0$. Dunque $\nabla f(0,0) = 0$.

Dobbiamo capire per quali $\alpha > 0$ si ha

$$\circledast \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 \, |y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2} \, (x^2+y^4)^{7/4}} = 0$$

Prima stima:

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^3 \, |y|^\alpha}{(x^2+y^4)^{7/4}} \right| \leq \frac{|x|^3 \, |y|^\alpha}{(x^2+y^4)^{7/4}} \leq (x^2+y^4)^{\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{4} - \frac{7}{4}}$$

Quando l'esponente $\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{4} - \frac{7}{4} = \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4}$ è positivo la ⊛ è vera. Dunque per $\alpha > 1$ f è differenziabile.

Seconda stima:

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{|x|}\,|y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}$$

Quando l'esponente $\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}$ è positivo ($\Leftrightarrow \alpha > 1/2$) la ⊛ è vera. È una stima migliore. Dunque:

$$\alpha > \frac{1}{2} \Longrightarrow f \text{ diff. in } 0.$$

~~Con $y = x^m$ ed $m \in \mathbb{N}$ tale che $4m > 2$~~ :

$$\cancel{\frac{f(x,x^m)}{\sqrt{x^2+x^{2m}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{1+x^{2m-2}}} \cdot \frac{|x|^{4+m\alpha-7/2}}{(1+x^{4m-2})^{7/2}}}$$

Con la scelta $x = y$ si trova

$$\frac{x^4 \, |y|^{\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^4)^{7/4}} = \frac{|x|^{4+\alpha-1-7/2}}{\sqrt{2}\,(1+x^2)^{7/4}} =$$

$$= \frac{|x|^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\,(1+x^2)^{7/4}}$$

Per $\alpha \leq 1/2$ vediamo che l'ultima quantità non è infinitesima. Dunque

$$\alpha \leq 1/2 \implies f \text{ non è differenziabile in } 0.$$

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \left(2x + \frac{1}{1+y^2} \; , \; 2y + \frac{1}{1+x^2} \right)$$

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale

ii) Stabilire se F è 1-1 e su da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione. i) La matrice Jacobiana di F è

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{-2y}{(1+y^2)^2} \\[2ex] \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} & 2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\det(JF(x,y)) = 4 - 4 \frac{xy}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

Osserviamo che

$$\frac{|x|}{(1+x^2)^2} = \underset{\overset{\wedge}{1/2}}{\frac{|x|}{(1+x^2)}} \cdot \underset{\overset{\wedge\!\!|}{1}}{\frac{1}{(1+x^2)}} \leq \frac{1}{2}$$

Dunque $\det(JF(x,y)) = 4\left(1 - \frac{xy}{\left[(1+x^2)(1+y^2)\right]^2}\right) \geq 4\left(1-\frac{1}{4}\right)$:

Dal teorema di invertibilità locale segue che

F è un diffeomorfismo locale.

ii) Dato un punto $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ cerchiamo di risolvere l'equazione $F(x,y) = (\xi,\eta)$ che è

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{1+y^2} = \xi \\[2ex] 2y + \dfrac{1}{1+x^2} = \eta \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+y^2} \\[2ex] y = \dfrac{\eta}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

Definiamo $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$G(x,y) = \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+y^2}, \frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right)$$

dove ξ, η sono fissati. Proviamo che G è una contrazione da $\mathbb{R}^2$ in sé:

$$G(x_1, y_1) - G(x_2, y_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y_2^2} - \frac{1}{1+y_1^2},\ \frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2} \right)$$

Ora osserviamo che

$$\left| \frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2} \right| = \left| \frac{x_1^2 - x_2^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} \right| =$$

$$= \left| (x_1 - x_2) \frac{x_1 + x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} \right| \leq |x_1 - x_2|$$

Di conseguenza

$$\left| G(x_1, y_1) - G(x_2, y_2) \right| \leq \frac{1}{2} \left| (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \right| .$$

Conclusione: G ha un unico punto fisso (per ogni (ξ, η) fissato). Dunque $F(x,y) = (\xi, \eta)$ ha soluzione unica. Ovvero $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è 1-1 e su.

□