Analisi Matematica 2 - A

Nome: Appello scritto del 29 Gennaio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema e studiarne la monotonia.

2) Calcolare la soluzione.

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri la successione di funzioni $f_n = g_n h_n$, $n \in \mathbb{N}$, dove

$$g_n(x) = \operatorname{arctg}(nx) \quad \text{e} \quad h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Studiare la convergenza uniforme delle successioni $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Provare che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x,y) = x \sin\left(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\right), \quad g(x,y) = \frac{x|y|^\beta}{x^2 + y^4},$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

3) (Facoltativo) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{|y|^\gamma}{x^2 + y^4}\right) = 0.$$

Tempo a disposizione: 2.30 ore.

Analisi Matematica 2 - A

Soluzione — Appello scritto del 29 Gennaio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema e studiarne la monotonia.

2) Calcolare la soluzione.

Soluzione. 1) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |y|+x$, è continua e verifica la condizione di Lipschitz $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = \big||y_1|-|y_2|\big| \le |y_1-y_2|$ per ogni $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Per il Teorema di esistenza e unicità locale esiste unica la soluzione $y \in C^1(-\delta,\delta)$ del Problema di Cauchy, per qualche $\delta > 0$.

Fissato $M > 0$, per ogni $|x| \le M$ si ha

$$|f(x,y)| \le |y| + |x| \le |y| + M, \quad y \in \mathbb{R},$$

e dunque f verifica le ipotesi del teorema di esistenza globale della soluzione. Dunque la soluzione massimale del Problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbb{R}$.

La disequazione $f(x,y) > 0$ è verificata se e solo se $x > -|y|$. Dunque, nella regione $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -|y|\big\}$ la soluzione y è crescente. Siccome $(x,y(x)) \in C$ per $x > 0$, deduciamo che la soluzione y è crescente su tutta la semiretta $[0,\infty)$. Siccome $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, si ha $(x,y(x)) \in D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < 0\big\}$ per ogni $x \in (-\delta,0)$; per qualche $\delta > 0$. Infatti, essendo $y \in C^1(\mathbb{R})$, si ha lo sviluppo $y(x) = y(0) + y'(0)x + o(x) = o(x)$ per $x \to 0$ e quindi $|y(x)| < |x|$ per $x \in (-\delta,0)$. Affermiamo che in realtà $(x,y(x)) \in D$ per ogni $x < 0$. Se, infatti, per assurdo fosse $f(\bar{x},y(\bar{x})) = 0$ per qualche $\bar{x} < 0$, allora si avrebbe $y'(\bar{x}) = 0$ e $y'(x) > 0$ per $x > \bar{x}$ e quindi y sarebbe strettamente crescente per $x > \bar{x}$. Questo non è compatibile con $y(0) = 0$.

La conclusione è che y è decrescente su $(-\infty,0]$ ed è crescente su $[0,\infty)$. Siccome $y(0) = 0$ deduciamo che $y(x) \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2) Essendo $y \ge 0$, dobbiamo risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. L'integrale generale dell'equazione omogenea $y' = y$ è $y(x) = Ce^x$. Con la variazione della costante $C = C(x)$ si trova l'equazione $C'(x) = xe^{-x}$, e dunque dopo un'integrazione per parti si trova $C(x) = C_0 - (x+1)e^{-x}$, dove $C_0 \in \mathbb{R}$ è una costante. La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = C_0 e^x - (x+1), \quad x \in \mathbb{R},$$

ed imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ si determina $C_0 = 1$. Osserviamo che la soluzione $y(x) = e^x - (x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, è effettivamente sempre positiva: $e^x \geq x+1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo la funzione esponenziale convessa ed $x+1$ la sua retta tangente in $x = 0$.

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri la successione di funzioni $f_n = g_n h_n$, $n \in \mathbb{N}$, dove

$$g_n(x) = \operatorname{arctg}(nx) \quad \text{e} \quad h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Studiare la convergenza uniforme delle successioni $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Provare che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Soluzione. 1) Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x), \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Chiaramente, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = \left|\frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{n}},$$

e quindi c'è la convergenza uniforme

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = 0.$$

Inoltre, fissato $\delta > 0$, dalle proprietà elementari di monotonia della funzione arcotangente segue che per ogni $|x| \geq \delta$ si ha

$$|\operatorname{arctg}(nx) - \pi/2| \leq \pi/2 - \operatorname{arctg}(n\delta),$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\geq\delta} |\mathrm{arctg}(nx) - \pi/2| = 0.$$

La successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge uniformemente in alcun intorno di $x = 0$ in quanto il suo limite puntuale è una funzione discontinua in $x = 0$.

3) Intanto osserviamo che, dette g ed h le funzioni limite di $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, abbiamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |g_n(x)h_n(x) - g_n(x)h(x)| + |g_n(x)h(x) - g(x)h(x)|,$$

e dunque fissati $0 < \delta < M < \infty$ si ha

$$\begin{aligned}\sup_{\delta\leq x\leq M} |f_n(x) - f(x)| &\leq \frac{\pi}{2} \sup_{\delta\leq x\leq M} |h_n(x) - h(x)| + \sup_{\delta\leq x\leq M} |xg_n(x) - xg(x)| \\ &\leq \frac{\pi}{2\sqrt{n}} + M \sup_{\delta\leq x\leq M} |g_n(x) - g(x)|,\end{aligned}$$

e quindi si ha convergenza uniforme su ogni intervallo $[\delta, M]$, per i fatti stabiliti al punto precedente. La stima del primo pezzo è indipendente da δ ed M.
Per migliorare la stima precedente si può argomentare nel seguente modo. Questa è la parte difficile del compito. È sufficiente mostrare la convergenza uniforme per $x > 0$. Precisamente, affermiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\mathrm{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}x \right| = 0.$$

Dalla proprietà della funzione arcotangente

$$\mathrm{arctg}(t) + \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

si ottiene

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\mathrm{arctg}(nx) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\Big(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big)\Big).$$

Dal punto 2) sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right| = 0.$$

D'altra parte, usando $\mathrm{arctg}(t) \leq t$ per $t > 0$, si ha per ogni $x > 0$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big) \leq \Big(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big) \leq \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2\sqrt{n}},$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big) = 0.$$

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$;

$$f(x,y) = x \sin\Big(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\Big), \quad g(x,y) = \frac{x|y|^\beta}{x^2 + y^4},$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

3) (Facoltativo) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2 + y^4}\Big) = 0. \qquad (L)$$

Soluzione. Le derivate parziali di f e g in 0 sono

$$f_x(0) = f_y(0) = 0, \quad g_x(0) = g_y(0) = 0.$$

1) Dobbiamo determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\Big) = 0. \qquad (*)$$

Usando la disuguaglianza $|\sin(t)| \leq |t|$ si ottiene

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\Big) \right| \leq \frac{|y|^\alpha}{x^4+y^2} \leq |y|^{\alpha-2}.$$

Dunque, per confronto, quando $\alpha > 2$ il limite $(*)$ è 0 e la funzione f è differenziabile in 0. Supponiamo ora che $\alpha \leq 2$. Con la scelta $x = y > 0$ si trova

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\Big(\frac{x^{\alpha-2}}{x^2+1}\Big) = \varphi(x),$$

e, per $\alpha \leq 2$, $\varphi(x)$ non tende a 0 per $x \to 0^+$. Quindi, per $\alpha \leq 2$ la funzione f non è differenziabile in 0.

2) Dobbiamo determinare tutti i $\beta > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)} = 0. \qquad (**)$$

Maggioriamo la funzione nel seguente modo:

$$\left| \frac{x|y|^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)} \right| \leq \frac{|x||y|^{\beta-1}}{x^2+y^4}.$$

Con la sostituzione $y^2 = z$ prima e con le coordinate polari $x = r\cos(\vartheta)$ e $z = r\sin(\vartheta)$ poi, si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y|^{\beta-1}}{x^2+y^4} = \lim_{(x,z)\to(0,0)} \frac{|x||z|^{(\beta-1)/2}}{x^2+z^2} = \lim_{r\to 0+} r^{(\beta-1)/2-1}|\sin\vartheta|^{(\beta-1)/2},$$

e quando $\beta > 3$ l'ultimo limite è 0 (uniformemente in ϑ). Dunque, per $\beta > 3$ la funzione g è differenziabile in 0.

Supponiamo ora che sia $\beta \leq 3$. Esaminiamo il limite (**) con la restrizione $x = y^2$ ed $y > 0$. Avremo

$$\frac{x|y|^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)} = \frac{y^{\beta-3}}{2\sqrt{y^2+1}},$$

e quando $\beta \leq 3$ l'ultima funzione non converge a 0 per $y \to 0^+$. Quindi per $\beta \leq 3$ la funzione g non è differenziabile in 0.

3) Dalla discussione del punto 2) e dalla maggiorazione

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big)\right| \leq \frac{|x||y|^\gamma}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)}$$

si deduce che il limite (L) è 0 per $\gamma > 3$. Vogliamo mostrare che in realtà il limite è 0 se e solo se $\gamma > 2$.

Fissiamo un numero $0 < \sigma < 1$ da determinare in seguito in dipendenza da $\gamma > 2$. Prendiamo un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in un intorno dell'origine e distinguiamo due casi: i) $|x| \leq |y|^{1+\sigma}$; ii) $|x| \geq |y|^{1+\sigma}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Nel caso i) abbiamo la stima

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big)\right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y|^\sigma < \varepsilon$$

se e solo se $|y| < \varepsilon^{1/\sigma}$. Nel caso ii) abbiamo $x^2 \geq |y|^{2(1+\sigma)}$ e quindi

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big)\right| \leq \frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4} \leq \frac{|y|^\gamma}{|y|^{2(1+\sigma)}} = |y|^{\gamma-2(1+\sigma)} < \varepsilon$$

se e solo $|y| < \varepsilon^{1/\lambda}$, dove si ha $\lambda = \gamma - 2(1+\sigma) > 0$ su scelta opportuna di

$$\sigma \in \Big(0, \frac{\gamma}{2} - 1\Big).$$

Questa scelta è possibile perchè $\gamma > 2$. Ciò prova che il limite (L) è 0 quando $\gamma > 2$.

Per $\gamma \leq 2$ il limite non è 0. Per provare questo fatto basta esaminare il limite (L) con la restrizione $x = y$.

Analisi Matematica 2 - A

Nome: Appello scritto del 18 Febbraio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = 2^n x\big(1 - \sqrt[n]{|x|}\big)^n, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2 (10 punti) Sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua fissata. Provare che l'equazione funzionale

$$(1+x^2)\varphi(x) + x\sin\big(\varphi(x)\big) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ha un'unica soluzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Assumendo che $g \in C^1(\mathbb{R})$, provare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+y} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale, che è crescente e concava. Trattegiarne il grafico.

2) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$ e che $a > -1/2$.

3) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{\log x}.$$

4) (facoltativo) Calcolare il valore di a.

Tempo a disposizione: 2.30 ore.

Esercizio Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = 2^n x \left(1-\sqrt[n]{|x|}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R} \text{ ed } n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione. Chiaramente $f_n(-x) = -f_n(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi è sufficiente considerare il caso $x \geq 0$.

Studiamo la funzione f_n. La sua derivata è per $x > 0$

$$f_n'(x) = 2^n \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^n + 2^n x\, n \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}\right)$$

$$= 2^n \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} \left(1-\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x}\right)$$

$$= 2^n \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} \left(1-2\sqrt[n]{x}\right).$$

Limitiamo lo studio all'intervallo $[0,1]$, dove $1-\sqrt[n]{x} \geq 0$:

	0		$\left(\frac{1}{2}\right)^n$		1
f_n'		$+++$		$---$	
f_n		$\uparrow$		$\downarrow$	

Siccome $f_n(0) = f_n(1) = 0$ deduciamo che

$$\max_{x \in [0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2^n \frac{1}{2^n} \left(1-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Quindi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 sull'intervallo $[0,1]$.

Fissiamo ora $M > 1$. Se $x \in [1, M]$:

$$|f_n(x)| = 2^n x \left(\sqrt[n]{x} - 1\right)^n \leq 2^n M \left(\sqrt[n]{M} - 1\right)^n.$$

Siccome

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{M} - 1\right) = 0,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{M} - 1 < \frac{1}{3} \quad \forall n \geq \bar{n}$.

Dunque per $n \geq \bar{n}$

$$2^n M \left(\sqrt[n]{M} - 1\right)^n \leq M \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

e quindi

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [1, M]} |f_n(x)| = 0$$

e c'è convergenza uniforme su $[1, M]$, per ogni $M > 1$.
Su $[0, \infty)$ non c'è convergenza uniforme, in quanto

$$\lim_{x \to \infty} |f_n(x)| = +\infty,$$

$\square$

Esercizio Sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua. Provare che l'equazione funzionale

$$(1+x^2)\,\varphi(x) + x \sin(\varphi(x)) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ha un'unica soluzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Assumendo che $g \in C^1(\mathbb{R})$, provare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Soluzione. Fissiamo $M > 0$ e sia $X = C([-M, M])$ munito della sup norma $\|\cdot\|_\infty$. Sia $T : X \to X$ l'applicazione

$$T\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}\Big(g(x) - x \sin(\varphi(x))\Big), \quad x \in [-M, M].$$

Proviamo che T è una contrazione. Per $\varphi, \psi \in X$ si ha

$$\left| T\varphi(x) - T\psi(x) \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \left| \sin(\varphi(x)) - \sin(\psi(x)) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot |\varphi(x) - \psi(x)|,$$

dal momento che $\frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $|\sin(t) - \sin(s)| \leq |t-s|$

Dunque
$$\| T\varphi - T\psi \|_\infty \leq \frac{1}{2} \| \varphi - \psi \|_\infty .$$

Siccome X è uno Spazio Metrico completo, T ha un unico punto fisso su X;

$$T\varphi(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in [-M, M].$$

Siccome $M>0$ è generico l'equazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (1+x^2)y + x\sin(y) - g(x).$$

Se $g \in C^1(\mathbb{R})$ allora $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Inoltre

$$f_x = 2xy + \sin(y) - g'(x),$$

$$f_y = 1+x^2 + x\cos(y).$$

Siccome

$$f_y = (1+x^2)\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\cos y\right)$$

$$\geq (1+x^2)\,\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

deduciamo che $f_y(x,y) \neq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dunque, per il Teorema della funzione implicita l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce una funzione $x \mapsto \varphi(x)$ di classe C^1 tale che $f(x,\varphi(x)) = 0$ identicamente.

$\square$

Esercizio. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

1) Provare che il Problema di Cauchy ha un'unica soluzione locale, che è crescente e concava. Tratteggiarne il grafico.

2) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$ e che $a > -\frac{1}{2}$.

3) Provare che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{\log x} = 1$$

4) Verificare che $a = \log 2 - 1$.

Soluzione. Sia $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y > -x \}$. Allora $(0,1) \in \Omega$ ed $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}, \qquad (x,y) \in \Omega,$$

è di classe C^∞ e quindi localmente di Lipschitz.

Per il Teorema di esistenza e unicità locale esistono $\delta > 0$ ed $y \in C^1(-\delta,\delta)$ soluzione del Problema di Cauchy.

Siccome $f > 0$ in Ω, la soluzione y è strettamente crescente.

In effetti si ha $y \in C^\infty(-\delta,\delta)$ e inoltre

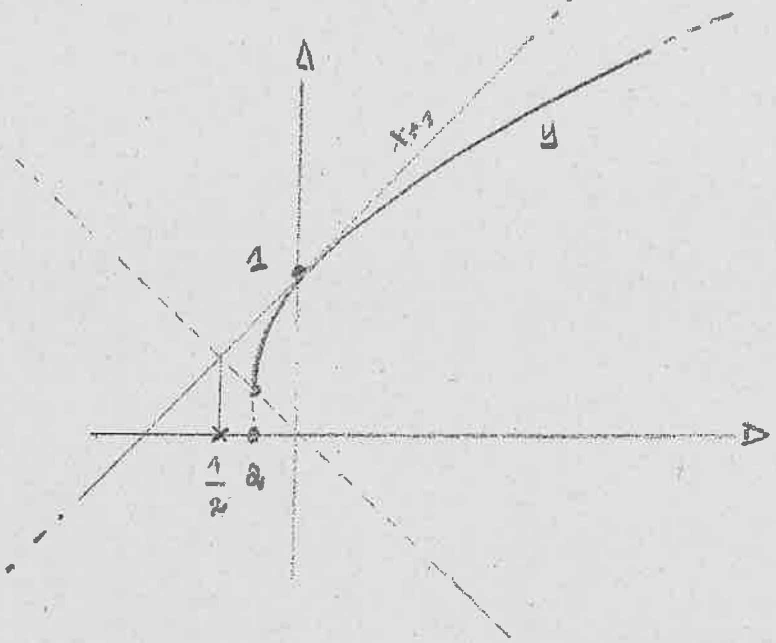
$$y'' = -\frac{1+y'}{(x+y)^2} = -\frac{1+\frac{1}{x+y}}{(x+y)^2} < 0$$

e quindi y è concava.

La retta tangente al grafico di y nel punto $x=0$ è

$$\varphi(x) = x+1,$$

e per la concavità si ha $y(x) \leq x+1$, $\forall x \in (a,b)$.



Dalla stima $y(x) \leq x+1$ e dal criterio di Prolungamento deduciamo che $b = \infty$. Dal disegno vediamo che $a > -\frac{1}{2}$.

Chiaramente $\lim_{x \to a^-} y'(x) = +\infty$.

Per $x \geq 0$ si ha $y(x) \geq 1$ e quindi

$$y'(x) = \frac{1}{x + y(x)} \leq \frac{1}{x+1}, \qquad x \geq 0.$$

Integrando

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t)\,dt$$

$$\leq 1 + \int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt = 1 + \log(1+x)$$

In modo analogo, usando $y(x) \leq x+1$:

$$y(x) \geq 1 + \int_0^x \frac{1}{2t+1}\,dt = 1 + \left[\frac{1}{2}\log(2t+1)\right]_{t=0}^{t=x}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2}\log(2x+1).$$

Deduciamo che

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty.$$

Per il Teorema di Hôpital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{\log x} = \lim_{x \to \infty} \frac{y'(x)}{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{y(x) + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{y(x)}{x} + 1} = 1$$

Infatti

$$0 < \frac{y(x)}{x} \leq \frac{1+\log(x+1)}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 .$$

Ora calcoliamo la soluzione in un modo ragionevolmente esplicito. Sia $z(x) = x + y(x)$. Allora $z' = 1+y'$ e z risolve il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = 1 + \frac{1}{z} \\ z(0) = 1 . \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili: $\frac{zz'}{1+z} = 1$

Integriamo

$$x = \int_0^x \frac{zz'}{1+z}\, dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) z'\, dt =$$

$$= \Big[z - \log(1+z) \Big]_{t=0}^{t=x} = z(x) - \log(1+z(x)) - z(0) + \log(1+z(0))$$

$$= z - \log(1+z) - 1 + \log 2 ,$$

Tornando alla soluzione y: $x = x+y - \log(1+x+y) - 1 + \log 2$

Ovvero:

$$y = \log(1+x+y) + 1 - \log 2$$

da cui

$$x = 2e^{y-1} - y - 1 = \psi(y) .$$

Abbiamo calcolato esplicitamente la funzione inversa della soluzione. Osserviamo che

$$\psi'(y) = 2e^{y-1} - 1$$

e quindi $\psi'(y) = 0 \iff e^{y-1} = \frac{1}{2} \iff y = 1 + \log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Il valore corrispondente della x è

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(1 + \log\left(\frac{1}{2}\right)\right) - 1 = \log 2 - 1.$$

Analisi Matematica 2 - A

Nome: Appello scritto del 5 Luglio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin\left(\frac{x}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che:

i) f sia differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$;

ii) le derivate parziali di f siano continue nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

iii) f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2 - 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale.

ii) Discutere eventuali simmetrie della soluzione.

iii) Studiare qualitativamente la monotonia delle soluzione y.

iv) Sia $(-b, b) \subset \mathbb{R}$, con $0 < b \leq \infty$, l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b < \infty$.

v) (facoltativo) Provare che $b > \sqrt{3/2}$.

Esercizio 3 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + n^2 x)\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2}, \quad x \geq 0.$$

Tempo a disposizione: 2.30 ore.

Analisi Matematica 2 - A

Soluzione — Appello scritto del 5 Luglio 2013

Esercizio 1 Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin\left(\dfrac{x}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che:

i) f sia differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$;

ii) le derivate parziali di f siano continue nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

iii) f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Soluzione. i) Quando $\alpha \leq 1$, la funzione $y \mapsto |y|^\alpha$ non è derivabile nel punto $y = 0$. Dunque, per $\alpha \leq 1$ la funzione f non è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto non ha la derivata parziale in y nei punti in cui $y = 0$ e $x \neq 0$.
Nell'insieme in cui $y \neq 0$, la funzione f è di classe C^∞, essendo prodotto e composizione di funzioni C^∞. In questo insieme f è differenziabile.
Affermiamo che, per $\alpha > 1$, f è differenziabile anche nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. In questi punti, le derivate parziali di f sono

$$\begin{aligned} f_x(x_0,0) &= 0, \\ f_y(x_0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^\alpha}{y} \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) = 0. \end{aligned}$$

Proviamo che f è differenziabile nel generico punto $(x_0, 0)$:

$$\left| \frac{f(x,y) - f(x_0,0) - \langle \nabla f(x_0,0), (x - x_0, y) \rangle}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} \right| = \frac{|y|^\alpha}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} \left| \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right| \leq |y|^{\alpha - 1},$$

e la funzione a destra tende a 0 per $y \to 0$ (indipendentemente da x).
Conclusione: f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha > 1$.

ii) Per il punto precedente, possiamo restringerci al caso $\alpha > 1$. Calcoliamo le derivate parziali di f nei punti in cui $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{|y|^\alpha}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right), \\ f_y(x,y) &= \alpha |y|^{\alpha-2} y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{|y|^\alpha x}{y^2} \cos\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Chiaramente si ha

$$\left|\frac{|y|^\alpha}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq |y|^{\alpha-1},$$
$$\left|\alpha|y|^{\alpha-2}y\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq \alpha|y|^{\alpha-1},$$

e le quantità a destra tendono a 0 per $y \to 0$ (indipendentemente da x). Esaminiamo il secondo addendo che appare in $f_y(x,y)$:

$$\left|\frac{|y|^\alpha x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq |y|^{\alpha-2}|x|.$$

Quando $\alpha \geq 2$ (incluso il caso $\alpha = 2$), si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|^{\alpha-2}|x| = 0.$$

D'altra parte, quando $\alpha < 2$ il seguente limite non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Per vedere questo fatto scegliamo $0 < \varepsilon < 2-\alpha$ e $x = |y|^\varepsilon$. Si ha allora

$$|y|^{\alpha-2}|x| = |y|^{\alpha-2+\varepsilon} \to \infty \quad \text{per} \quad y \to 0,$$

mentre la funzione $\cos(x/y) = \cos(|y|^\varepsilon/y)$ non ha limite per $y \to 0$.
Conclusione: le derivate parziali di f sono continue in 0 se e solo se $\alpha \geq 2$.

iii) Rimane da controllare la continuità delle derivate parziali nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$, con $x_0 \neq 0$. Quando $\alpha > 2$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} |y|^{\alpha-2}|x| = 0.$$

Quando $\alpha = 2$, invece, il seguente limite non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{|y|^\alpha x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Conclusione: le derivate parziali di f sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha > 2$.

Esercizio 2 Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2 - 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale.

ii) Discutere eventuali simmetrie.

iii) Studiare qualitativamente la monotonia delle soluzione y.

iv) Sia $(-b, b) \subset \mathbb{R}$, con $0 < b \leq \infty$, l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b < \infty$.

v) (facoltativo) Provare che $b > \sqrt{3/2}$.

Soluzione. i) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, è di classe C^∞ e dunque è localmente Lipschitziana. Dunque, il Problema di Cauchy ha una soluzione locale unica $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$. La soluzione è in effetti di classe C^∞.

ii) Proviamo che la soluzione y è una funzione dispari. Consideriamo la funzione ausiliaria $z(x) = -y(-x)$, $x \in (-\delta, \delta)$. Si ha

$$z'(x) = y'(-x) = y(-x)^2 + (-x)^2 - 1 = z(x)^2 + x^2 - 1, \quad x \in (-\delta, \delta),$$

ed inoltre $z(0) = -y(0) = 0$. Dunque, z è soluzione del Problema di Cauchy. Per l'unicità della soluzione deve essere $z = y$ e quindi y è una funzione dispari.

iii) Dentro il cerchio $x^2 + y^2 < 1$, la funzione f è negativa. Dunque, quando il grafico della soluzione y si trova dentro il cerchio, la soluzione è strettamente decrescente. Siccome il punto iniziale $(0, y(0)) = (0, 0)$ è proprio il centro del cerchio, la soluzione è certamente decrescente in un intorno di $x = 0$. Fuori dal cerchio, la soluzione è crescente.

Il grafico della soluzione y deve intersecare la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. In questi punti si ha $y' = 0$. Una volta lasciato il cerchio, il grafico della soluzione non può più rientrarvi.

Dunque esiste un punto $\bar{x} \in (0, 1)$ tale che y è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\bar{x}, \bar{x})$, è crescente per $x > \bar{x}$ (fintantochè la soluzione è definita), ed è crescente nell'intervallo a sinistra di $-\bar{x}$.

Dalla precedente discussione segue anche che la funzione è certamente definita su tutto l'intervallo $(-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$.

iv) Per la discussione precedente, esiste (unico) un punto $x_0 \in (1, b)$ tale che $y(x_0) = 0$. Definiamo il numero $\beta = \sqrt{x_0^2 - 1} > 0$. Avremo allora, per $x \geq x_0$,

$$y'(x) \geq y(x)^2 + \beta^2,$$

dividendo ed integrando sull'intervallo (x_0, x) con il dato iniziale $y(x_0) = 0$ si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{y^2 + \beta^2} dt \geq x - x_0.$$

Il calcolo dell'integrale è immediato e si ottiene

$$\operatorname{arctg}\Big(\frac{y(x)}{\beta}\Big) \geq \beta(x - x_0),$$

e quindi si trova $y(x) \geq \beta \operatorname{tg}\big(\beta(x - x_0)\big)$. Per confronto si ottiene la stima $\beta(b - x_0) < \pi/2$, e dunque, in particolare, $b < \infty$.

v) In primo luogo osserviamo che $y' = y^2 + x^2 - 1 \geq -1$ e integrando su $(0, x)$ si trova $y(x) \geq -x$, per ogni $x \in [0, b)$. Quando $y(x) \leq 0$, la disuguaglianza $y(x) \geq -x$ è equivalente a $y(x)^2 \leq x^2$. Di conseguenza, per ogni $x \geq 0$ tale che $y(x) \leq 0$, si ha

$$y'(x) \leq 2x^2 - 1.$$

L'insieme di tali x forma un intervallo. Integrando su $[0, x]$ la disuguaglianza precedente si ottiene

$$y(x) \leq \int_0^x (2t^2 - 1)dt = \frac{2}{3}x^3 - x.$$

Per confronto, deduciamo che deve necessariamente essere $b > \sqrt{3/2}$.

Esercizio 3 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + n^2 x)\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2}, \qquad x \geq 0.$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + n^2 x)\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x \mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2},$$

e che per $x \geq 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} < \infty.$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie a sinistra converge uniformemente su $[0, \infty)$.
È dunque sufficiente studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x \mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \qquad x \geq 0. \tag{*}$$

Per $x = 0$ la serie converge a 0 in quanto il termine generale è 0 per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Studiamo brevemente le funzioni $f_n(x) \geq 0$, per $x \geq 0$. La derivata è:

$$f_n'(x) = \frac{n^2 \mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2}(1 - nx).$$

Dunque, la funzione f_n cresce su $[0, 1/n]$ e decresce su $[1/n, \infty)$. Deduciamo che, fissato $\delta > 0$, per ogni $n \geq 1/\delta$ si ha

$$\sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta).$$

Siccome la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \delta e^{-n\delta}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta e^{-n\delta} = \frac{\delta}{1-e^{-\delta}} < \infty,$$

deduciamo dal Criterio di Weierstrass che la serie $(*)$ converge uniformemente su $[\delta, \infty)$, per ogni $\delta > 0$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0, \infty)$. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x e^{-nx}}{1+n^2} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{x}{2} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Siccome

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{2} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

deduciamo che la serie $(*)$ definisce una funzione su $[0, \infty)$ che vale 0 per $x = 0$ e che non è continua in $x = 0$. Siccome la convergenza uniforme preserva la continuità, concludiamo che la serie $(*)$ non converge uniformemente su $[0, \infty)$, e dunque nemmeno la serie iniziale.

Analisi Matematica 2 - A

Nome: Appello scritto del 16 Luglio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2x)\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}, \qquad x \geq 0.$$

Esercizio 2 (10 punti) In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2.$$

i) Determinare tutti i valori di α tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) Per ciascun $\alpha \in [-2,2]$ discutere esistenza e unicità di punti di minimo di f.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $g \in C([0,1])$ una funzione continua fissata.

i) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C([0,1])$ dell'equazione funzionale

$$y(x) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}}dt + g(x), \qquad x \in [0,1].$$

ii) Calcolare la soluzione nel caso $g(x) = x$.

Tempo a disposizione: 2.30 ore.

Analisi Matematica 2 - A

Soluzione Appello scritto del 16 Luglio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2x)e^{-nx}}{1+n^2}, \qquad x \geq 0.$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2x)e^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2xe^{-nx}}{1+n^2},$$

e che per $x \geq 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \infty.$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie a sinistra converge uniformemente su $[0,\infty)$.
È dunque sufficiente studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2xe^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \geq 0. \tag{*}$$

Per $x = 0$ la serie converge a 0 in quanto il termine generale è 0 per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Studiamo brevemente le funzioni $f_n(x) \geq 0$, per $x \geq 0$. La derivata è:

$$f_n'(x) = \frac{n^2e^{-nx}}{1+n^2}(1-nx).$$

Dunque, la funzione f_n cresce su $[0, 1/n]$ e decresce su $[1/n, \infty)$. Deduciamo che, fissato $\delta > 0$, per ogni $n \geq 1/\delta$ si ha

$$\sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta).$$

Siccome la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\delta e^{-n\delta}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta e^{-n\delta} = \frac{\delta}{1-e^{-\delta}} < \infty,$$

deduciamo dal Criterio di Weierstrass che la serie $(*)$ converge uniformemente su $[\delta, \infty)$, per ogni $\delta > 0$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0,\infty)$. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x e^{-nx}}{1+n^2} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{x}{2} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Siccome

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

deduciamo che la serie $(*)$ definisce una funzione su $[0,\infty)$ che vale 0 per $x=0$ e che non è continua in $x=0$. Siccome la convergenza uniforme preserva la continuità, concludiamo che la serie $(*)$ non converge uniformemente su $[0,\infty)$, e dunque nemmeno la serie iniziale.

Esercizio 2 (10 punti) In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2.$$

i) Determinare tutti i valori di α tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) Per ciascun $\alpha \in [-2,2]$ discutere esistenza e unicità di punti di minimo di f.

Soluzione. i) Chiaramente, si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dobbiamo calcolare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice Hessiana di f sia semidefinita positiva, $Hf \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime di f sono:

$$\begin{aligned} f_x &= e^{x+y} + 2x + \alpha y \\ f_y &= e^{x+y} + \alpha x + 2y. \end{aligned}$$

Le derivate parziali seconde di f sono:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= e^{x+y} + 2 \\ f_{yy} &= e^{x+y} + 2 \\ f_{xy} &= e^{x+y} + \alpha. \end{aligned}$$

La matrice Hessiana è semitefinita positiva, $Hf \geq 0$, se e solo se si ha $\mathrm{tr}(Hf) \geq 0$ e $\det(Hf) \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$ dove

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(Hf) &= f_{xx} + f_{yy} = 2e^{x+y} + 4 \\ \det(Hf) &= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (e^{x+y}+2)^2 - (e^{x+y}+\alpha)^2 \end{aligned}$$

sono la traccia e il determinante della matrice Hessiana. Chiaramente si ha $\mathrm{tr}(Hf) > 4$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Studiamo la disequazione $\det(Hf) \geq 0$, ovvero $4e^{x+y} + 4 - 2\alpha e^{x+y} - \alpha^2 \geq 0$ che è equivalente a

$$(2-\alpha)(2e^{x+y} + 2 + \alpha) \geq 0.$$

Nel caso $\alpha > 2$ questa disequazione non è verifica in alcun punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nel caso $\alpha = 2$ la disuguaglianza è un'uguaglianza. Nel caso $\alpha < 2$ la disuguaglianza è verificata su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $2e^{x+y} + 2 + \alpha \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ovvero se e solo se $2 + \alpha \geq 0$. In conclusione, f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha \in [-2, 2]$.

ii) Per i valori $\alpha \in [-2, 2]$ la funzione f è convessa, e dunque i punti di minimo coincidono con i punti critici. Cerchiamo eventuali punti critici. Le equazioni $f_x = f_y = 0$ danno il sistema

$$e^{x+y} + 2x + \alpha y = 0, \quad e^{x+y} + \alpha x + 2y = 0.$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene $(2 - \alpha)x - (2 - \alpha)y = 0$. Quando $\alpha = 2$ questa condizione è vuota: le due equazioni precedenti diventano $e^{x+y} + 2(x+y) = 0$. L'equazione $e^t + 2t = 0$ ha una soluzione unica $t^* < 0$ (si vede con il teorema degli zeri). Dunque tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x + y = t^*$ sono (tutti i) punti critici di f.

Esaminiamo il caso $\alpha \neq 2$. L'equazione $(2 - \alpha)x - (2 - \alpha)y = 0$ fornisce $x = y$ e quindi si ottiene l'equazione $e^{2x} + (2 + \alpha)x = 0$. Quando $\alpha = -2$, l'equazione non ha soluzione e dunque f non ha punti critici (equiv. punti di minimo). Quando $\alpha \in (-2, 2)$, l'equazione precedente ha una soluzione unica e dunque f ha un unico punto critico (di minimo).

Esercizio 3 (10 punti) Sia $g \in C([0, 1])$ una funzione continua fissata.

i) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C([0, 1])$ dell'equazione funzionale

$$y(x) = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}} dt + g(x), \quad x \in [0, 1].$$

ii) Calcolare la soluzione nel caso $g(x) = x$. (È sufficiente determinare la soluzione in forma integrale.)

Soluzione. i) Lo spazio vettoriale $X \doteq C([0, 1])$ munito della norma del sup è uno spazio metrico completo. Introduciamo la trasformazione $T : X \to X$ che alla funzione $y \in X$ associa la funzione $Ty \in X$ definita da

$$Ty(x) = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}} dt + g(x), \quad x \in [0, 1].$$

Osserviamo innanzi tutto che Ty è una funzione continua. Infatti, dati $x_1, x_2 \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned}|Ty(x_1) - Ty(x_2)| &= \left|\frac{1}{3} \int_{x_2}^{x_1} \frac{y(t)}{\sqrt{t}} dt + g(x_1) - g(x_2)\right| \\ &\leq \frac{1}{3} \|y\|_\infty \left| \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \right| + |g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq \frac{2}{3} \|y\|_\infty |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + |g(x_1) - g(x_2)|,\end{aligned}$$

da cui si deduce la continuità di $x \mapsto Ty(x)$. Qui usiamo la continuità di g.
Verifichiamo ora che T è una contrazione da X in se. Infatti, se $y_1, y_2 \in X$ allora

$$|Ty_1(x) - Ty_2(x)| = \frac{1}{3}\Big|\int_0^x \frac{y_1(t)-y_2(t)}{\sqrt{t}}dt\Big| \le \frac{1}{3}\|y_1 - y_2\|_\infty \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{3}\|y_1 - y_2\|_\infty,$$

e quindi $\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \le \frac{2}{3}\|y_1 - y_2\|_\infty$. Per il Teorema di punto fisso di Banach, T ha un unico punto fisso $y \in Y$, che è la soluzione, unica, dell'equazione funzionale data.

ii) Se y risolve l'equazione funzionale, allora $y(0) = 0$. Possiamo derivare in x l'identità

$$y(x) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}}dt + x, \quad x \in [0,1],$$

e trovare l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{3}\frac{y(x)}{\sqrt{x}} + 1, \quad x \in (0,1].$$

Si tratta di un'equazione lineare, che può essere integrata con il metodo standard. Usando il dato iniziale $y(0) = 0$ si trova la soluzione

$$y(x) = \int_0^x e^{\frac{2}{3}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}dt, \quad x \in [0,1].$$

Omettiamo i conti intermedi. Usando la sostituzione $s = \frac{2}{3}\sqrt{t}$ si trova

$$\int_0^x e^{-\frac{2}{3}\sqrt{t}}dt = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{x}} e^{-s}s\,ds,$$

e l'ultimo integrale di calcola per parti. Dopo alcuni conti che sono omessi si arriva alla soluzione

$$y(x) = \frac{9}{2}\Big[e^{\frac{2}{3}\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1\Big].$$

Analisi Matematica 2 - A

Nome: Appello scritto del 9 Settembre 2013

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(y+x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione definita su tutto $(-\infty, \infty)$.

ii) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \sin(y+x)$ della forma $y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$.

iii) Studiare la monotonia della soluzione del Problema di Cauchy e disegnarne un grafico qualitativo.

iv) Calcolare eventuali asintoti della soluzione.

Esercizio 2 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definite:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log\left(x^{2n} + n^{2x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x,y) = \frac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2}, \quad g(x,y) = y\sin\left(\frac{|x|^\beta}{x^2 + y^4}\right),$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

3) (Facoltativo) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{|x|^\gamma}{x^4 + y^2}\right) = 0.$$

Tempo a disposizione: 2.30 ore.

Analisi Matematica 2 - A

Nome: Appello scritto del 16 Luglio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(y+x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione definita su tutto $(-\infty, \infty)$.

ii) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \sin(y+x)$ della forma $y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$.

iii) Studiare la monotonia della soluzione del Problema di Cauchy e disegnarne un grafico qualitativo.

iv) Calcolare eventuali asintoti della soluzione.

Soluzione. i) La funzione $f(x,y) = \sin(x+y)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi localmente (in effetti globalmente) Lipschitziana. Per il Teorema di esistenza e unicità locale esiste un'unica soluzione locale. Inoltre si ha $|f(x,y)| \leq 1$ e quindi per il Teorema di esistenza globale con crescita sub-lineare la soluzione è definita su tutto $(-\infty, \infty)$.

ii) Se $y = mx + q$ è una soluzione allora

$$m = y' = \sin(y+x) = \sin(mx+q+x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Deduciamo che deve essere $m = -1$ e $\sin q = -1$, ovvero $q = 3\pi/2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$..

iii) Per il Teorema di unicità, la soluzione y non può intersecare le rette $y = -x - \pi/2$ e $y = -x + 3\pi/2$. Dunque deve essere

$$-x - \frac{\pi}{2} < y(x) < -x + \frac{3}{2}\pi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fatta questa premessa, studiamo la monotonia della soluzione. Possiamo limitarci alla regione (striscia) delimitata dalle due rette precedenti. La soluzione y è crescente nella regione dove

$$\sin(y+x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < y+x < \pi.$$

La soluzione y è decrescente nella regione dove

$$\sin(y+x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < y+x < 0 \quad \text{oppure} \quad \pi < y+x < \frac{3}{2}\pi.$$

In conclusione, esiste $x^* \in (0,\pi)$ tale che:
- y decresce su $(-\infty, 0)$;
- y cresce su $(0, x^*)$;
- y decresce su (x^*, ∞).

iv) Proviamo che $y = -x + \frac{3}{2}\pi$ è un asintoto a ∞. Dividiamo per $x > 0$ la disuguaglianza

$$-x - \frac{\pi}{2} < y(x) < -x + \frac{3}{2}\pi,$$

e otteniamo

$$-1 - \frac{\pi}{2x} < \frac{y(x)}{x} < -1 + \frac{3\pi}{2x}.$$

Per confronto si ottiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = -1.$$

Affermiamo che

$$\lim_{x\to\infty} y(x) + x = \frac{3}{2}\pi.$$

La funzione $z(x) = y(x) + x$ risolve

$$z' = y' + 1 = \sin(y + x) + 1 = \sin(z) + 1 \geq 0.$$

Dunque, z è crescente e pertanto esiste il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} y(x) + x = \lim_{x\to\infty} z(x) \leq \frac{3}{2}\pi,$$

infatti $y(x) + x < 3\pi/2$. Se per assurdo fosse $L < 3\pi/2$:

$$\lim_{x\to\infty} z'(x) = \lim_{x\to\infty} \sin(z(x)) + 1 = \sin(L) + 1 > 0.$$

Questo implicherebbe che $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) = \infty$. Questo è assurdo.
In modo analogo si prova che $y = -x - \pi/2$ è un asintoto a $-\infty$.

Esercizio 2 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definite:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log\left(x^{2n} + n^{2x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Quando $-1 \leq x \leq 1$ si ha

$$-\frac{2\log n}{n} \leq \frac{\log n^{2x}}{n} \leq \frac{\log(x^{2n}+n^{2x})}{n} \leq \frac{\log(1+n^2)}{n},$$

e per confronto si deduce che si ha convergenza puntuale a 0:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Di più, si ha la convergenza uniforme:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-1\leq x\leq 1} |f_n(x)| = 0.$$

Studiamo la convegenza puntuale per $x^2 > 1$. Riscriviamo la funzione nel seguente modo:

$$f_n(x) = \log x^2 + \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right).$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2x}}{x^{2n}} = 0 \quad \text{per } x^2 > 1,$$

deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \log x^2, \quad x^2 > 1.$$

In definitiva, il limite puntuale è

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x^2 \leq 1 \\ \log x^2 & \text{per } x^2 > 1. \end{cases}$$

Studiamo la convergenza uniforme per $x < -1$. Consideriamo la differenza

$$g_n(x) = |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(x) - f_\infty(x) \geq 0.$$

La sua derivata è

$$g_n'(x) = \frac{1}{n}\frac{2nx^{2n-1} + 2n^{2x}\log n}{x^{2n}+n^{2x}} - \frac{2}{x} = \frac{2n^{2x}(x\log n - n)}{nx(x^{2n}+n^{2x})}.$$

Chiaramente, per $x < -1$ si ha $g_n'(x) \geq 0$ e di conseguenza

$$\sup_{x\leq -1} |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(-1) - f_\infty(-1) = f_n(-1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Si ha dunque convergenza uniforme su $(-\infty, -1]$.

Studiamo la convergenza uniforme su $1 < x \leq M$, dove $M > 1$ è arbitrario. Definitivamente (per tutti gli n sufficientemente grandi) si ha $g_n'(x) < 0$ per $1 \leq x \leq M$ (infatti $x \log n - n \leq M logn - n < 0$ definitivamente). Di conseguenza

$$\sup_{1 \leq x \leq M} |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(1) - f_\infty(1) = f_n(1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

In conclusione, si ha convergenza uniforme su $[1, M]$ per ogni $M > 1$. Non si ha invece convergenza uniforme su $[1, \infty)$, in quanto

$$\lim_{x \to \infty} f_n(x) - f_\infty(x) = \infty$$

per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x, y) = \frac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2}, \quad g(x, y) = y \sin\left(\frac{|x|^\beta}{x^2 + y^4}\right),$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

3) (Facoltativo) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{|x|^\gamma}{x^4 + y^2}\right) = 0.$$

Tempo a disposizione: 2.30 ore.