Analisi Matematica 2 - Parte A
Quaderno degli esercizi settimanali

Roberto Monti

Matematica – Anno Accademico 2023-24

Versione del 25 settembre 2023

Indice

Introduzione

In questo “Quaderno degli esercizi settimanali” sono raccolte dodici schede di esercizi, una per ogni settimana del corso di Analisi Matematica 2 parte A. L’ordine degli argomenti corrisponde in modo approssimativo all’ordine che sarà seguito nella presentazione della teoria. Gli esercizi cercano di illustrare in modo pratico e creativo tutti gli aspetti (definizioni, teoremi, criteri, tecniche) studiati nel corso.

In ogni scheda ci sono esercizi di base, in cui si deve controllare o applicare qualche definizione, di livello medio, dove è richiesta l’applicazione diretta della teoria alla risoluzione dei problemi, ed esercizi più avanzati. Il simbolo $\star$ indica gli esercizi per cui sono presenti la soluzione o suggerimenti nel capitolo finale degli appunti del corso oppure nelle soluzioni manoscritte online.

Il docente risolverà in classe alcuni esercizi di ciascuna scheda e lo studente sarà invitato a risolvere autonomamente gli altri esercizi.

Gli esercizi di questo Quaderno fanno parte integrante del programma del corso di Analisi Matematica 2 parte A.

SETTIMANA 1

Spazi metrici e topologia

Esercizi di base

ESERCIZIO 1.1 (Caratterizzazione sequenziale della chiusura). Siano (X,d) uno spazio metrico, $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Provare che $x \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

ESERCIZIO 1.2. Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) A° è il più grande insieme aperto contenuto in A;
ii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

ESERCIZIO 1.3. $\star$ Siano (X,d) uno spazio metrico ed $A \subset X$. Provare che $\bar{A} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$.

ESERCIZIO 1.4. Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni reali limitate:

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\big\}.$$

Indichiamo con $\mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un generico elemento di $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

1) Verificare che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale con le naturali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successioni.
2) Verificare che la funzione $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ così definita
$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup\big\{|a_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$
definisce una norma.
3) Verificare che la funzione $d_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \times \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ così definita
$$d_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|_\infty$$
è una distanza su $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 1.5. Sia (X,d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \to [0,\infty)$

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad x,y \in X.$$

Verificare che (X,δ) è uno spazio metrico e che ha la stessa topologia di (X,d).

ESERCIZIO 1.6. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \Big\{\frac{mn}{m^2+n^2+1} \in \mathbb{R} : m,n \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.7. $\star$ Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato, $x \in A$ ed $r \subset \mathbb{R}^n$ una semiretta uscente da x. Provare che $r \cap \partial A \neq \emptyset$.

Esercizio 1.8. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 < 0\}.$$

i) Provare che $A \subset [-M, M] \times [-M, M]$ per $M > 0$ opportuno.
ii) Provare che A è aperto.
iii) Dimostrare che $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 = 0\}$.
iv) Rappresentare A nel piano Cartesiano (in modo approssimativo).

Esercizi avanzati

Esercizio 1.9. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per $x_0 \in X$ ed $r > 0$ definiamo

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$
$$K_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$
$$S_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}.$$

Provare che $\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0)$ e che $\overline{B_r(x_0)} \subset K_r(x_0)$. Mostrare tramite esempi che le inclusioni possono essere strette.

Esercizio 1.10. $\star$ Provare che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.

Esercizio 1.11. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

Esercizio 1.12. Siano $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi chiusi disgiunti. Provare che esistono due insiemi aperti e disgiunti $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ tali che $C_1 \subset A_1$ e $C_2 \subset A_2$.

SETTIMANA 2

Funzioni continue e spazi metrici compatti

Esercizi di base

Esercizio 2.1. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. Provare che una *qualsiasi* funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è continua.

Esercizio 2.2. Siano $m, k, n \in \mathbb{N}$ con $m + k = n$. Su $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^k$ ed $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ fissiamo la distanza standard. Provare che se $H \subset \mathbb{R}^m$ ed $K \subset \mathbb{R}^k$ sono compatti, allora $H \times K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto.

Esercizio 2.3. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che se X è compatto allora anche K è compatto.

Esercizi intermedi

Esercizio 2.4. Provare che il seguente insieme è compatto nella topologia standard di $\mathbb{C}$:

$$K = \left\{ \frac{1 + ni}{n + i} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{i\}.$$

Provare l'affermazione sia con la definizione di compattezza per ricoprimenti sia con la definizione di compattezza sequenziale.

Esercizio 2.5. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; iv) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

Esercizio 2.6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e si considerino i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\} \quad \text{e} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}.$$

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:
1) $\star$ Se f è continua allora A è aperto.
2) $\star$ Se A è aperto allora f è continua.
3) Se f è continua allora C è chiuso.
4) Se C è chiuso allora f è continua.

Esercizio 2.7. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione biiettiva e continua. Provare che se X è compatto allora la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

Esercizio 2.8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che esistano (anche infiniti) e siano uguali i limiti

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Provare che f ha minimo oppure massimo assoluto.

Esercizio 2.9. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : X \to Y$ una funzione continua ed $A \subset X$. Provare che $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Dare condizioni sufficienti su A tali che si abbia $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

Esercizi avanzati

Esercizio 2.10. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
A) f è continua.
B) Il suo grafico $\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza standard del piano.

Esercizio 2.11. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi $H, K \subset \mathbb{R}^2$ sono compatti:

$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 \leq 1\big\},$$
$$H = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^3 + xy + y^3 \leq 1\big\}.$$

Esercizio 2.12. Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ lo spazio metrico introdotto nell'Esercizio 1.5.
1) Provare che $K = \{\mathrm{x} \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \|\mathrm{x}\|_\infty \leq 1\}$ è chiuso e limitato ma non è compatto.
2) Provare che $H = \{\mathrm{x} \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : |x_n| \leq 1/n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}$ è compatto.

SETTIMANA 3

Spazi metrici completi

Esercizi di base

ESERCIZIO 3.1. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X.

ESERCIZIO 3.2. Sia X un insieme non vuoto e sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

1) Provare che (X,d) è uno spazio metrico.
2) Descrivere le palle in X.
3) Descrivere gli insiemi aperti.
4) Provare che (X,d) è completo.

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 3.1. $\star$ Lo spazio $C([0,1])$ con la distanza data dalla norma integrale

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

non è uno spazio metrico completo.

ESERCIZIO 3.3. $\star$ Sia (X,d) uno spazio metrico completo e sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi non vuoti tali che:

i) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$.

Provare che esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

Ricordiamo che il diametro di un insieme $A \subset X$ è $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$.

ESERCIZIO 3.4. Definiamo la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$

$$d(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R},d)$ è uno spazio metrico.
ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.
iii) Determinare il completamento di $(\mathbb{R},d)$.

Esercizio 3.5. $\star$ Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
ii) Provare che se $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso, allora lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ è completo.
iii) Provare che se $(\mathbb{R}, d)$ è completo, allora $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso.

Esercizio 3.6. Siano $X = (-1, \infty)$ e $d : X \times X \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = \Big| \log\Big(\frac{1+x}{1+y}\Big)\Big|, \quad x, y \in X.$$

1) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
2) Esibire un'isometria suriettiva $\varphi : \mathbb{R} \to (X, d)$, $d(\varphi(t), \varphi(s)) = |t - s|$, con $s, t \in \mathbb{R}$.
3) Provare che (X, d) è uno spazio metrico completo.

Esercizi avanzati

Esercizio 3.7. Dopo aver determinato l'immagine della funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \Big(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

considerare lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ con la distanza

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che d è effettivamente una metrica su $\mathbb{R}$.
ii) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ non è completo.
iii) Calcolare il completamento di questo spazio metrico.

Esercizio 3.8. Lo spazio $\ell^\infty(\mathbb{R})$ introdotto nell'Esercizio 1.5 è uno spazio di Banach non separabile (non ha sottoinsiemi densi numerabili).

SETTIMANA 4

Teoremi di punto fisso

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 4.1. $\star$ Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.

ESERCIZIO 4.2. $\star$ Sia $g \in C([0,1])$ una funzione continua fissata.

i) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C([0,1])$ dell'equazione funzionale

$$y(x) = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}} dt + g(x), \quad x \in [0,1].$$

ii) Calcolare la soluzione nel caso $g(x) = x$.

ESERCIZIO 4.3. $\star$ Sia $h \in C([0,1])$ una funzione assegnata. Verificare che l'equazione funzionale

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x f(t) dx, \quad x \in [0,1],$$

ha una soluzione unica $f \in C([0,1])$.

ESERCIZIO 4.4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione

$$\sin x + \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \alpha f(x), \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che per $|\alpha| > 1$ l'equazione ha un'unica soluzione $f \in C^1([0,1])$.

ii) Provare che per $|\alpha| \leq 1$ l'equazione non ha soluzione.

ESERCIZIO 4.5. $\star$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con costante di Lipschitz $L = \mathrm{Lip}(f) < 1$. Provare che la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

è iniettiva e suriettiva.

ESERCIZIO 4.6. $\star$ Si considerino il quadrato $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$ e la funzione $f : Q \to \mathbb{R}^2$ così definita

$$f(x,y) = \Big(\frac{1}{6}(1 - y - y^2), \frac{1}{6}(x^2 - x - 1)\Big).$$

1) Provare che $f(Q) \subset Q$.

2) Usando il teorema delle contrazioni, provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 6x = 1 - y - y^2 \\ 6y = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $(x,y) \in Q$.

Esercizi avanzati

Esercizio 4.7. $\star$ Sia X uno spazio metrico compatto e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$. Provare che T ha un unico punto fisso in X.

SETTIMANA 5

Funzioni Lipschitziane, trasformazioni lineari, Ascoli-Arzelà

Esercizi di base

ESERCIZIO 5.1. Sia $V = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0 \text{ e } \mathrm{Lip}(f) \le 1\}$. Provare che V è un sottoinsieme compatto di $C([0,1])$.

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 5.2. $\star$ Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non-vuoto e definiamo la funzione distanza

$$f(x) = \mathrm{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che f è 1-Lipschitziana.

ESERCIZIO 5.3. $\star$ Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia $x \in \mathbb{R}^n$. Un punto $\bar{x} \in A$ si dice proiezione metrica di $x \in \mathbb{R}^n$ su A se $|x - \bar{x}| = \mathrm{dist}(x, A)$. Provare che ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ ha almeno una proiezione metrica. Provare che se A è convesso allora la proiezione metrica è unica.

ESERCIZIO 5.4. $\star$ Sia V l'insieme di tutte le funzioni $f \in C([0, 2\pi])$ fatte nel seguente modo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad x \in [0, 2\pi],$$

dove i coefficienti verificano $|a_n| \le 1/n^3$. Provare che V è un sottoinsieme compatto di $C([0, 2\pi])$.

ESERCIZIO 5.5. Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma e sia $T : X \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\big(1/n\big).$$

i) Provare che $T \in \mathscr{L}(X, \mathbb{R})$;
ii) Calcolare $\|T\|$;
iii) Stabilire se esiste una funzione $f \in X$ con $\|f\|_\infty \le 1$ tale che $T(f) = \|T\|$.

Esercizi avanzati

ESERCIZIO 5.6. $\star$ Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e sia $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo l'applicazione $T : X \to X$

$$T(f)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt, \quad f \in X.$$

i) Provare che $s \mapsto T(f)(s)$ è continua su $[0,1]$.
ii) Provare che $T \in \mathscr{L}(X, X)$.
iii) Dare condizioni su k affinchè T sia una contrazione.
iv) Sia $K \subset X$ limitato. Stabilire se $\overline{T(K)} \subset X$ è compatto.

SETTIMANA 6

Limiti in più variabili e differenziabilità

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 6.1. ⋆ Determinare tutti i parametri reali $\alpha, \beta > 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita sia continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.2. ⋆ Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita è continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.3. ⋆ Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che

$$L = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x|y|^\alpha}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} = 0.$$

ESERCIZIO 6.4. ⋆ Calcolare tutti gli $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

1) abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$;
2) sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 6.5. ⋆ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^6}{x^6+y^8} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 6.1. ⋆ Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin\left(\dfrac{x}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che:

i) f sia differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$;
ii) le derivate parziali di f siano continue nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.
iii) f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

ESERCIZIO 6.6. $\star$ Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + x^{2n} + y^{2n}).$$

i) Determinare D.
ii) Provare che $f \in C(D)$.
ii) Provare che $f \in C^1(D)$.

ESERCIZIO 6.7. (Formula di Eulero) Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice (positivamente) omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$ e $t > 0$. Provare che se $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è omogenea di grado α allora le sue derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha - 1$. Verificare inoltre che, per $x \neq 0$,

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x).$$

Esercizi avanzati

ESERCIZIO 6.8. Siano (X,d) uno spazio metrico, $A \subset X$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su A. Provare che per ogni $x_0 \in \bar{A}$ esiste finito il seguente limite

$$\bar{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

In altri termini, f si estende in modo continuo su $\bar{A}$.

ESERCIZIO 6.9. $\star$ Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e sia $f \in C(\bar{A}) \cap C^1(A)$ una funzione con derivate parziali f_x ed f_y uniformemente continue su A. Provare che esistono finite anche le seguenti derivate parziali al bordo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t} \quad \text{e}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y^+}(x,0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t}.$$

ESERCIZIO 6.10. $\star$ Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso non vuoto e definiamo la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$d(x) = \operatorname{dist}(x;K) = \inf_{y \in K} |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che l'inf è un min e che $\operatorname{Lip}(d) = 1$ (se $K \neq \mathbb{R}^n$).
2) Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ un punto di differenziabilità di d. Provare che x ha proiezione metrica unica su K.

SETTIMANA 7

Derivate di ordine superiore. Formula di Taylor

Esercizi intermedi

Esercizio 7.1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Stabilire se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$;
ii) Stabilire se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 7.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(-\log(x^2+y^2))^{1/2}, & 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Provare che $f \in C^1(A)$;
ii) Provare che esistono $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$;
iii) Stabilire se $f \in C^2(A)$.

Esercizio 7.3. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $u(x) = |x|$. Provare che per $x \neq 0$ si ha $\det D^2u(x) = 0$.

Esercizio 7.4. Sia $\Delta : C^2(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ l'operatore differenziale del secondo ordine (operatore di Laplace)

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Verificare che per $n \geq 3$ la funzione $u(x) = |x|^{2-n}$, $x \neq 0$, verifica $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. La funzione u è la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace.

Esercizio 7.5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\cos(ny)}{n2^n}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Stabilire se esiste una costante $\delta > 0$ tale che per $|x| < \delta$ ed $|y| < \delta$ si abbia $f(x,y) \geq x$.

Esercizi avanzati

Esercizio 7.6. $\star$ Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $f(0) = 0$ e $\nabla f(0) = 0$. Provare che esiste $r > 0$ tale che, detto $p_r = (0,r) \in \mathbb{R}^{n+1}$, si abbia

$$B_r(p_r) \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > f(x)\} = \mathrm{epi}(f),$$

ed inoltre $\partial B_r(p_r) \cap \mathrm{gr}(f) = \{0\}$.

Esercizio 7.7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}}$$

se $xy \neq 0$ ed $f(x,y) = 0$ se $xy = 0$.

i) Provare che f non è continua nel punto $(0,0)$;

ii) Provare che per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ esistono le seguenti derivate parziali

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x,y)$$

in ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

SETTIMANA 8

Massimi, minimi e convessità

Esercizi intermedi

Esercizio 8.1. $\star$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x, y) = \mathrm{e}^{3x} - 3y\mathrm{e}^x + y^3.$$
Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 8.2. $\star$ Al variare del parametro $\lambda \geq 0$ si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2}y^4.$$
Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 8.3. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy.$$
Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 8.4. $\star$ Siano $\beta > 0$ un parametro, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - \beta xy.$$
i) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K.
ii) Calcolare tutti i punti di minimo assoluto di f in K.

Esercizio 8.5. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e consideriamo l'insieme
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{1}{\alpha^2 + y^2}\right\}.$$
Provare che la funzione $f(x, y) = 2xy$ assume massimo su A e calcolarlo.

Esercizio 8.6. $\star$ In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2.$$
i) Determinare tutti i valori di α tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.
ii) Per ciascun $\alpha \in [-2, 2]$ discutere esistenza e unicità di punti di minimo di f.

Esercizio 8.7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y} + x^4 + y^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Provare che f ha un unico punto critico e che si tratta di un punto di minimo assoluto.

Esercizio 8.8. (Teorema di Rolle) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$, e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione con queste proprietà: 1) f è continua su K; 2) f è differenziabile in $\mathrm{int}(K)$; f è costante su ∂K. Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \mathrm{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.

Esercizi avanzati

Esercizio 8.9. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n)$ una funzione superlineare:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{|x|} = \infty.$$

Definiamo la funzione $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (la *trasformata di Legendre* di f)

$$f^*(\xi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle \xi, x\rangle - f(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che il sup è un max.
2) Verificare che f^* è convessa.
3) Calcolare f^* nel caso $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$.

Esercizio 8.10. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione convessa e consideriamo l'applicazione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \nabla f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che F è iniettiva sull'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : Hf(x) > 0\}.$$

SETTIMANA 9

Equazioni differenziali del primo ordine

Esercizi intermedi

Esercizio 9.1. $\star$ Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare esistenza e unicità della soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema

$$\begin{cases} x^3 y' - y + 1 = 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Esercizio 9.2. $\star$ Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

Esercizio 9.3. $\star$ Calcolare la soluzione dei seguenti Problemi di Cauchy

$$\text{i)} \begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} y' = y^2 \log(x+3) \\ y(-2) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 9.4. $\star$ Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x+y+3) \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

Esercizio 9.5. $\star$ Si consideri l'equazione differenziale

$$(1-\cos y)y' = x \sin x \sin y.$$

i) Determinare tutte le soluzioni costanti;
ii) Calcolare (in forma implicita) l'integrale generale;
iii) Calcolare la soluzione che verifica la condizione iniziale $y(0) = \frac{5}{2}\pi$.

Esercizio 9.6. Si consideri l'equazione differenziale

$$x^3 y' - 2y + 2x = 0.$$

Provare che:

i) Ogni soluzione $y \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ si estende ad una funzione in $C^1(\mathbb{R})$;
ii) L'equazione non ha soluzioni analitiche definite in un intorno di $x = 0$.

Esercizi avanzati

Esercizio 9.7. Consideriamo il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x} + \sqrt{|y|}, \quad x \geq 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Dimostrare che ogni soluzione y verifica $y(x) \geq \frac{2}{3}x^{3/2}$ per $x \geq 0$.
ii) Usando il Teorema delle contrazioni provare che esiste un'unica soluzione locale del problema.
iii) Provare che la soluzione è definita su tutto $[0, \infty)$.
iv) Dimostrare che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^2} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x^{3/2}} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 9.8. Calcolare la soluzione $y \in C^1(a,b)$, $-\infty \leq a < 1 < b \leq \infty$, del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y-x}{y+x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e disegnare un grafico qualitativo di y. Calcolare b e mostrare che $a > -\frac{1}{2}e^{-\pi/2}$.

Esercizio 9.9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata e fissiamo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Provare che il Problema di Cauchy $y' = f(x,y)$ e $y(x_0) = y_0$ ha almeno una soluzione. Usare il Teorema di punto fisso di Schauder e il Teorema di Ascoli-Arzelà.

SETTIMANA 10

Equazioni differenziali del secondo ordine e sistemi

Esercizi intermedi

Esercizio 10.1. $\star$ Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Esercizio 10.2. $\star$ Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 10.3. Sia A la matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali $y' = Ay$.

Esercizio 10.4. $\star$ Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(1) = 0$ e sia $0 < x_0 < 1$ un numero reale. Provare che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = xf(x^2 + y^2) - y \\ y' = yf(x^2 + y^2) + x \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 10.5. Siano $a, b \in C(\mathbb{R})$ funzioni continue e sia $y_1 \in C^2(\mathbb{R})$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + ay' + by = 0$$

tale che $y_1(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Determinare una soluzione $y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ linearmente indipendente da y_1.

Esercizi avanzati

Esercizio 10.6. $\star$ Sia $f \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua tale che $tf(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Provare che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + e^{-x} f(y) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione $y = 0$.

Esercizio 10.7. $\star$ Sia $F \in C^1([0,\infty))$ una funzione tale che $F(0) > 0$ ed $F'(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Provare che ogni soluzione $y \in C^2([0,\infty))$ dell'equazione differenziale

$$y'' + F(x)y = 0, \quad x \geq 0,$$

è limitata. Suggerimento: moltiplicare per y' ed integrare.

Esercizio 10.8. $\star$ Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che:

a) Gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$ sono compatti per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) $\nabla f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)), \quad t \geq 0, \\ \gamma(0) = x_0, \end{cases}$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

i) Il problema ha un'unica soluzione $\gamma_{x_0} \in C^2([0,\infty))$;
ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma_{x_0}(t) = 0$;
iii) Nel caso $f(x) = |x|^2/2$, calcolare il flusso $\Phi : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t, x_0) = \gamma_{x_0}(t)$.

Analisi qualitativa del Problema di Cauchy

Esercizi intermedi

Esercizio 11.1. $\star$ Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+y} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale, che è crescente e concava. Trattegiarne il grafico.
2) Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$ e che $a > -1/2$.
3) Calcolare il limite
$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{\log x}.$$
4) Calcolare il valore di a.

Esercizio 11.2. $\star$ Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2 - 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale.
ii) Discutere eventuali simmetrie.
iii) Studiare qualitativamente la monotonia delle soluzione y.
iv) Sia $(-b, b) \subset \mathbb{R}$, con $0 < b \le \infty$, l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b < \infty$ e che $b > \sqrt{3/2}$.

Esercizio 11.3. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2 - x^2 + 1} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$;
ii) Provare che la soluzione è una funzione crescente;
iii) Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di esistenza della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$.
iv) Provare che $y(x) > x$ per ogni $x \in (a, b)$;

v) Provare che
$$\lim_{x\to\infty} y(x) - x = 0.$$

Esercizi avanzati

Esercizio 11.4. $\star$ Sia $y \in C^2(\mathbb{R})$ la soluzione del Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' + 2y^3 = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$
Provare che la soluzione è effettivamente definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, che $\|y\|_\infty \leq 1$, che y è pari e periodica.

Esercizio 11.5. $\star$ Dimostrare che la soluzione del Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = -(x+1)y^2 + x \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$
è definita su tutto $\mathbb{R}$.

SETTIMANA 12

Teoremi di invertibilità locale e di Dini

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 12.1. $\star$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

i) Determinare il più grande aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che f sia un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su A.
ii) Stabilire se f è un diffeomorfismo su A;
iii) Dare esempi di insiemi aperti $B \subset A$ massimali su cui f è un diffeomorfismo.

ESERCIZIO 12.2. $\star$ Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \log(1 + x + y) - \mathrm{e}^{x(1+y)} + 1.$$

1) Provare che l'equazione $f = 0$ definisce implicitamente intorno a $0 \in \mathbb{R}^2$ una funzione φ definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.
2) Esprimere φ' in funzione di φ e calcolare poi $\varphi'(0)$.
3) Calcolare $\varphi''(0)$.

ESERCIZIO 12.3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $\det(Jf(x)) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$$f^{-1}(\{y\}) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = y\big\}$$

ha cardinalità al più numerabile.

ESERCIZIO 12.4. Determinare tutti i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \big(x + \lambda y, y - (\lambda + 1)x^2\big)$$

sia un diffeomorfismo. Calcolare in questi casi la funzione inversa.

ESERCIZIO 12.5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = z\mathrm{e}^{xy} + xy\mathrm{e}^z + xyz$.

i) Provare che l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce intorno a 0 una funzione φ di classe C^∞ che esplicita una variabile in funzione delle altre due.
ii) Calcolare il gradiente di φ in $0 \in \mathbb{R}^2$.
iii) Provare che φ ha in $0 \in \mathbb{R}^2$ un punto di sella.

ESERCIZIO 12.6. $\star$ Sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua fissata. Provare che l'equazione funzionale

$$(1 + x^2)\varphi(x) + x \sin\big(\varphi(x)\big) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ha un'unica soluzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Assumendo che $g \in C^1(\mathbb{R})$, provare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Esercizi avanzati

Esercizio 12.7 (Teorema della mappa aperta). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A;\mathbb{R}^m)$ con $1 \leq m \leq n$. Supponiamo che sia $\text{rango}(J_f(x)) = m$ per ogni $x \in A$. Provare che f è aperta, ovvero che trasforma insiemi aperti in aperti.