__Esercizio__ Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = 2^n x \left(1 - \sqrt[n]{|x|}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R} \text{ ed } n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione. Chiaramente $f_n(-x) = -f_n(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi è sufficiente considerare il caso $x \geq 0$.

Studiamo la funzione f_n. La sua derivata è per $x > 0$

$$f_n'(x) = 2^n \left(1 - \sqrt[n]{x}\right)^n + 2^n x\, n \left(1 - \sqrt[n]{x}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}\right)$$

$$= 2^n \left(1 - \sqrt[n]{x}\right)^{n-1} \left(1 - \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x}\right)$$

$$= 2^n \left(1 - \sqrt[n]{x}\right)^{n-1} \left(1 - 2\sqrt[n]{x}\right).$$

Limitiamo lo studio all'intervallo $[0,1]$, dove $1 - \sqrt[n]{x} \geq 0$;

	0 — $\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ — 1
f_n'	$+++$	$---$
f_n	$\uparrow$	$\downarrow$

Siccome $f_n(0) = f_n(1) = 0$ deduciamo che

$$\max_{x \in [0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2^n \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Quindi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 sull'intervallo $[0,1]$.

Fissiamo ora $M > 1$. Se $x \in [1, M]$:

$$|f_n(x)| = 2^n x \left(\sqrt[n]{x} - 1\right)^n \leq 2^n M \left(\sqrt[n]{M} - 1\right)^n.$$

Siccome

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{M} - 1\right) = 0,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{M} - 1 < \frac{1}{3} \quad \forall n \geq \bar{n}$.

Dunque per $n \geq \bar{n}$

$$2^n M \left(\sqrt[n]{M} - 1\right)^n \leq M \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

e quindi

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [1, M]} |f_n(x)| = 0$$

e c'è convergenza uniforme su $[1, M]$, per ogni $M > 1$.
Su $[0, \infty)$ non c'è convergenza uniforme, in quanto

$$\lim_{x \to \infty} |f_n(x)| = +\infty,$$

$\square$

ESERCIZIO. Discutere la convergenza uniforme nel limite

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \qquad x\geq 0.$$

Soluzione. Formiamo la differenza

$$\phi_n(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad x\geq 0$$

Sappiamo che $n \longmapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è crescente, e dunque $\phi_n \geq 0$ su $[0,\infty)$.

Inoltre

$$\phi_n'(x) = e^x - n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq$$

$$\geq e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \phi_n(x) \geq 0.$$

Fissato $M>0$ si ha dunque, essendo ϕ_n crescente,

$$\sup_{x\in[0,M]}\phi_n(x) = \max_{x\in[0,M]}\phi_n(x) = \phi_n(M).$$

D'altra parte $\lim_{n\to\infty}\phi_n(M) = 0$ e quindi in $(*)$ si ha convergenza uniforme su ogni intervallo $[0,M]$.
Non si ha convergenza uniforme su $[0,\infty)$ in quanto, per ogni n fissato, si ha

$$\lim_{x\to\infty}\phi_n(x) = \lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^x}\right) = \infty.$$

$\square$

ESERCIZIO Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log(1+e^{nx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare i limiti puntuali

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) \qquad \text{dove esistono.}$$

2) Studiare la convergenza uniforme delle successioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Risoluzione. 1) Per $x \leq 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(1+e^{nx}) = 0$$

Per $x>0$ si trova invece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(1+e^{nx}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(e^{nx}\left(1+\frac{1}{e^{nx}}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\frac{1}{n} \log e^{nx}}_{\equiv\, x} + \underbrace{\frac{1}{n} \log(1+e^{-nx})}_{\downarrow\, 0} \right\} = x$$

Dunque $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

Si ha
$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \frac{n e^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$$

Se $x=0$ vediamo che $f_n'(0) = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dunque
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \frac{1}{2}.$$

Per $x>0$ si ha $e^{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, Dunque
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 1 \quad \text{se} \quad x>0.$$

Se infine $x<0$ si ha $e^{nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e dunque
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0 \quad \text{se} \quad x<0.$$

In conclusione
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 1/2 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x<0. \end{cases}$$

2) Studiamo la convergenza uniforme di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sia $x \geq 0$:
$$\phi_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n}\log(1+e^{nx}) - x \geq 0 \quad \text{per } x \geq 0$$
$$\phi_n'(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} - 1 = \frac{-1}{1+e^{nx}} < 0 \implies \phi_n \text{ decresce}$$

Di conseguenza

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\geq 0} f_n(x)-f(x) = \underbrace{f_n(0)-f(0)}_{\downarrow\, n\to\infty \atop 0}.$$

c'è CU su $[0,\infty)$

Caso $x\leq 0$:

$$\phi_n(x) = f_n(x) - f(x) = f_n(x) - 0 = f_n(x) \geq 0$$

$$\phi_n'(x) = f_n'(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} \geq 0 \quad \Rightarrow \phi_n \text{ cresce}$$

Quindi

$$\sup_{x\leq 0} |f_n(x)-f(x)| = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f_n(0)-f(0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

c'è CU su $[-\infty, 0)$.

Rimane da studiare la CU di $f_n'(x) = \dfrac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Certamente non c'è CU in un intorno di $x=0$ perché la g non è continua in $x=0$.

Calcoliamo

$$f_n''(x) = \frac{ne^{nx}(1+e^{nx}) - e^{nx}\, ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} = \frac{ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} > 0$$

Dato $\delta>0$ si ha dunque

$$\sup_{x\geq\delta} |f_n'(x)-1| = \sup_{x\geq\delta}\left(1-\frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}\right) = 1-\frac{e^{n\delta}}{1+e^{n\delta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Quindi c'è CU su $[\delta, \infty)$.

Poi:

$$\sup_{x \leq -\delta} |f_n'(x) - 0| = \sup_{x \leq -\delta} \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{e^{-n\delta}}{1+e^{-n\delta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Quindi c'è CU su $(-\infty, -\delta]$.

Risposta: (f_n') converge uniformemente su $|x| \geq \delta$ per ogni $\delta > 0$. Ma non su tutto $\mathbb{R}$.

$\square$

Esercizio funzioni

Sia $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di

$$f_n(x) = \sqrt[n]{4^n + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Soluzione i) Se $4 \le x^2$ si trova:

$$x^2 = \sqrt[n]{x^{2n}} \underset{\text{sempre}}{\le} \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} \le \sqrt[n]{x^{2n} + x^{2n}} = \sqrt[n]{2\cdot x^{2n}} = \underbrace{x^2 \cdot \sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow{n\to\infty} x^2}$$

Per confronto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} = x^2 \quad \text{se } x^2 \ge 4.$$

Se invece si ha $x^2 \le 4$ si trova:

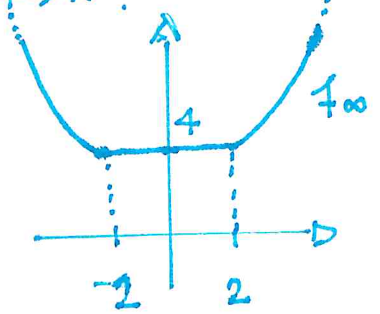
$$4 = \sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} \le \sqrt[n]{4^n + 4^n} = \sqrt[n]{2\cdot 4^n} = \underbrace{4\cdot\sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 4}$$

Per confronto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} = 4 \quad \text{se } 4 \ge x^2.$$

Conclusione

$$f_\infty(x) = \max\{4, x^2\}$$



ii) Studio la convergenza uniforme per $x^2 \le 4$ ovvero per $x \in [-2,2]$:

$$0 \le f_n(x) - f_\infty(x) = \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} - 4 \le \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} - 4 =$$

$$= \underbrace{4(\sqrt[n]{2} - 1)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

Quindi si ha convergenza uniforme su $[-2,2]$.

Studio la convergenza uniforme per $x^2 \ge 4$:

$$0 \le g_n(x) = f_n(x) - f_\infty(x) = \underbrace{\sqrt[n]{4^n + x^{2n}} - x^2}_{\ge 0}$$

Studio la funzione g_n.

Derivata:

$$g_n'(x) = \frac{d}{dx}\left((4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n}} - x^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{n} (4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n} - 1} \cdot 2n\, x^{2n-1} - 2x$$

$$= 2x \left[(4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n} - 1} x^{2(n-1)} - 1 \right].$$

Studio il segno. Per simmetria pari di g_n mi limito al caso $x \ge 0$ (ovvero $x \ge 2$).

In questo caso:

$$g_n'(x) \geq 0 \iff (4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n}-1} x^{2(n-1)} \geq 1$$

$$\iff x^{2(n-1)} \geq (4^n + x^{2n})^{1-\frac{1}{n}}$$

$$\overset{(n>1)}{\iff} x^2 \geq (4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n}}$$

$$\iff x^{2n} \geq 4^n + x^{2n} \qquad \underline{\text{MAI}}$$

Quindi $g_n'(x) \leq 0$ per $x \geq 2$ e inoltre $g_n(x) \geq 0$.

Quindi

$$\max_{x \geq 2} g_n(x) = g_n(2) = \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} - 4 = 4(\sqrt[n]{2} - 1) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

e c'è convergenza uniforme per $x^2 \geq 4$.

Conclusione $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f_\infty$ su tutto $\mathbb{R}$. $\square$

ESERCIZIO Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 + e^{nx}} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \text{ ed } n \in \mathbb{N},$$

(i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Risoluzione (i) Primo caso: $x \leq 0$; si ha:

$$\underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 1}}{\sqrt[n]{n^2}} \leq \sqrt[n]{n^2+e^{nx}} \leq \sqrt[n]{n^2+1} \leq \sqrt[n]{n^2+n^2} = \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 1}}{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^2}}$$

Per confronto: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ se $x \leq 0$.

Secondo caso: $x > 0$, In questo caso si ha definitivamente $n^2 \leq e^{nx}$ e quindi

$$e^x = \sqrt[n]{e^{nx}} \leq \sqrt[n]{n^2+e^{nx}} \leq \sqrt[n]{e^{nx}+e^{nx}} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{e^{nx}} = \sqrt[n]{2}\, e^x$$

E quindi per confronto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ per $x > 0$.

Dunque
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \leq 0 \\ e^x & \text{per } x > 0 . \end{cases}$$

(ii) Studiamo la convergenza uniforme su $(-\infty, 0]$:

$$\sup_{x\leq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\leq 0}\left(\sqrt[n]{n^2+e^{nx}} - 1\right) \underset{\uparrow}{=} \sqrt[n]{n^2+1} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

in questo $x \mapsto \sqrt[n]{n^2+e^{nx}}$ è crescente.

Quindi c'è conv. uniforme su $(-\infty, 0]$.
Studiamo il caso $x \geq 0$. Dobbiamo esaminare:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt[n]{n^2 + e^{nx}} - e^x \right|$$

$$= \sqrt[n]{n^2 + e^{nx}} - e^x = (n^2 + e^{nx})^{\frac{1}{n}} - e^x.$$

Sua derivata:

$$g_n'(x) = \frac{1}{n} (n^2 + e^{nx})^{\frac{1}{n} - 1} e^{nx} \cdot n - e^x$$

$$= e^{nx} (n^2 + e^{nx})^{\frac{1-n}{n}} - e^x$$

Studio del segno:

$$g_n'(x) \leq 0 \iff e^{nx} (n^2 + e^{nx})^{\frac{1-n}{n}} \leq e^x$$

$$\iff e^{n^2 x} (n^2 + e^{nx})^{1-n} \leq e^{nx}$$

$$\iff e^{n^2 x - nx} \leq (n^2 + e^{nx})^{n-1}$$

$$\iff e^{(n^2-n)x} \leq e^{(n^2-n)x} \left(1 + \frac{n^2}{e^{nx}}\right)^{n-1}$$

$$\iff 1 \leq \left(1 + \frac{n^2}{e^{nx}}\right)^{n-1}$$

VERIFICATO.

Quindi g_n è decrescente. Dunque:

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = g_n(0) = \sqrt[n]{n^2 + 1} - 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Risposta: c'è convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx^2 - n^2 x} .$$

Soluzione. Per $x = 0$ non c'è convergenza.

Per $x < 0$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} nx^2 - n^2 x = \lim_{n \to \infty} n^2 \left(-x + \frac{1}{n} x^2\right) = \infty$$

e quindi

$$\lim_{n \to \infty} e^{nx^2 - n^2 x} = \infty .$$

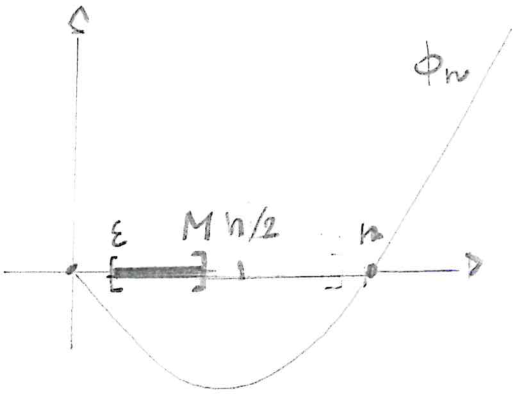
Dunque, per $x < 0$ la serie non converge.

Studio la funzione $\phi_n(x) = nx^2 - n^2 x$ (parabola):

$$\phi_n'(x) = 2nx - n^2 = 0 \iff x = \frac{n}{2}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = 0 &\iff nx^2 - n^2 x = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ oppure } nx = n^2 \\ &\iff x = 0 \text{ oppure } x = n \end{aligned}$$



Fissiamo $\varepsilon > 0$ piccolo ed $M > 0$ grande, e comunque $\varepsilon < M$.
Se $n > M$ si ha

$$\max_{x \in [\varepsilon, M]} \phi_n(x) = \max \{ \phi_n(\varepsilon), \phi_n(M) \}$$

$$= \phi_n(\varepsilon) \quad \text{se} \quad M \leq \frac{n}{2}$$

(definitivamente vera)

$$= n \varepsilon^2 - n^2 \varepsilon$$

$$= n^2 \left(-\varepsilon + \frac{1}{n} \varepsilon^2 \right)$$

$$\leq n^2 \cdot \left(- \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

se $-\varepsilon + \frac{1}{n} \varepsilon^2 \leq - \frac{\varepsilon}{2} \iff \frac{1}{n} \varepsilon^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \iff 2\varepsilon \leq n$.
(Vera definitiv.)

Dunque, per $n \geq 2M$ si ha

$$\max_{x \in [\varepsilon, M]} e^{nx^2 - n^2 x} = e^{\max_{x \in [\varepsilon, M]} nx^2 - n^2 x} \leq$$

$$\leq e^{-\frac{\varepsilon}{2} n^2}$$

Dal momento che

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{2} n^2} < \infty \qquad (\forall \varepsilon > 0),$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie (*) converge uniformemente su $[\varepsilon, M]$, per ogni $0 < \varepsilon < M < \infty$.
In particolare c'è convergenza puntuale $\forall x > 0$. $\square$

<u>Esercizio</u>: Provare che
- Non c'è conv. uniforme su $[\varepsilon, \infty)$.
- Non c'è conv. uniforme su $(0, M)$.

<u>Esercizio</u> Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

① Studiare la convergenza puntuale.

② Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione. ① Per $x=0$ la serie converge e la somma è 0. Per $x>0$ si ha:

$$0 < \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \leq \frac{x\, n^{1-x}}{n^2} = \frac{x}{n^{1+x}}$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} < \infty, \quad \text{essendo } 1+x>1,$$

per confronto la serie data converge.

Per $x<0$ il termine generale è negativo.

Inoltre per $n \geq |x|$ (quindi definitivamente)

$$\frac{|x|\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \quad \frac{|x|\, n^{1-x}}{n^2+n^2} = \frac{|x|}{2\, n^{1+x}}$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} = +\infty \quad \text{nel caso } 1+x<1,$$

deduciamo che la serie data diverge per $x<0$.

Risposta: CP per $x \in [0,\infty)$.

(2) Riprendiamo i conti precedenti. Siano $0 < \delta < M < +\infty$. Se $\delta \leq x \leq M$ allora

$$0 < \frac{x\, n^{1-x}}{n^2 + x^2} \leq \frac{x}{n^{1+x}} \leq \frac{M}{n^{1+\delta}}$$

con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{1+\delta}} < \infty$. Per il Criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente su $[\delta, M]$.

Supponiamo ora $x \geq M$. Ricordiamo che

$$\frac{2nx}{x^2+n^2} \leq 1 \qquad \forall n \quad \forall x > 0$$

ovvero $\dfrac{x}{x^2+n^2} \leq \dfrac{1}{2n}$. Dunque:

$$\frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \leq \frac{n^{1-x}}{2n} = \frac{1}{2n^x} \overset{\text{se } x \geq M}{\leq} \frac{1}{2n^M}$$

Possiamo scegliere $M > 1$ e dire che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^M} < \infty$

Per il Criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme per $x \in [M, \infty)$.

Fino qui abbiamo provato questo: la serie converge uniformemente per $x \in [\delta, \infty)$, $\forall \delta > 0$.

Soluzione alternativa per la convergenza uniforme.

Partiamo dalla maggiorazione:

$$f_n(x) = \frac{x\, n^{1-x}}{n^2 + x^2} \leq x\, n^{-1-x} = g_n(x).$$

Studiamo la funzione $g_n(x)$. Sua derivata:

$$g_n'(x) = n^{-1-x} + x(-1)(\log n)\, n^{-1-x}$$
$$= n^{-1-x}\left(1 - x\log n\right)$$

Dunque $g_n'(x) \geq 0 \iff 1 - x\log n \geq 0 \iff x \leq \dfrac{1}{\log n}$.

Fissiamo $\delta > 0$. Definitivamente si ha:

$$\frac{1}{\log n} < \delta .$$

Quindi definitivamente:

$$\sup_{x \geq \delta} f_n(x) \leq \sup_{x \geq \delta} g_n(x) = g_n(\delta) = \frac{\delta}{n^{1+\delta}}$$

Siccome $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{n^{1+\delta}} < \infty$ per il Criterio di Weierstrass la serie data converge uniformemente su $[\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$.

Mostriamo che su $[0,\delta]$ non c'è convergenza uniforme. Per $0<x\leq 1$ si ha: $n^2+x^2 \leq 2n^2 \ \forall n$.

Quindi

$$\frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \geq \frac{n^{1-x}\cdot x}{2n^2} = \frac{x}{2\, n^{1+x}}.$$

Per il confronto integrale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{1+x}}\, dt = \left[\frac{t^{-1-x+1}}{-x}\right]_{t=1}^{t=\infty} = \frac{1}{x}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \geq \frac{x}{2}\cdot x^{-1} = \frac{1}{2}$$

per $x>0$

La funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2}, \quad x\geq 0,$$

non è pertanto continua per $x\to 0^+$ perché $f(0)=0$ mentre $\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq \frac{1}{2}$.

Esercizio Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-\sqrt[3]{n}|x|}}{x^2n^2+n} , \qquad x \in \mathbb{R} .$$

1) Discutere la convergenza puntuale della serie.

2) Provare che $1-e^{-t} \leq t$ per ogni $t \geq 0$.

3) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risoluzione. 1) per $x=0$ il termine generale della serie è identicamente nullo e la somma della serie è 0.

Per $x \neq 0$ si ha la seguente stima:

$$0 < \frac{1-e^{-\sqrt[3]{n}x}}{x^2n^2+n} \leq \frac{1}{x^2n^2}$$

e poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ la serie data converge per confronto

2) Sia $\phi(t) = t+e^{-t}-1$. Chiaramente $\phi(0)=0$ e inoltre $\phi'(t) = 1-e^{-t} \geq 0$ per $t \geq 0$. Dunque ϕ cresce per $t \geq 0$ e quindi $\phi(t) \geq \phi(0) = 0$ per $t \geq 0$.

3) Usando il punto precedente si trova

$$\frac{1-e^{-\sqrt[3]{n}|x|}}{x^2n^2+n} \leq \frac{\sqrt[3]{n}\,|x|}{x^2n^2+n} := f_n(x) .$$

Studiamo le funzioni $f_n(x)$. Per simmetria pari basta guardare il caso $x \geq 0$.

La derivata di $f_n(x)$ è $f_n'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{n}(x^2n^2+n) - \sqrt[3]{n}\, x \cdot 2xn^2}{(x^2n^2+n)^2} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{n}\,(n - x^2n^2)}{(x^2n^2+n)^2} = \frac{n^{4/3}(1-nx^2)}{(x^2n^2+n)^2}.$$

Dunque $f_n' \geq 0 \iff 1 - nx^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \dfrac{1}{n}$

Deduciamo che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt[3]{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{n}\cdot n^2 + n\right)} =$$

$$= \frac{1}{2n \cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2\, n^{7/6}}$$

Siccome $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}} < \infty$, per il criterio di Weierstrass la serie data converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

□

ESERCIZIO Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} - x^{2n+2}}{1 + x^{4n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Studiare la convergenza puntuale.

2) Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione. 1) Per $x^2 = 1$ la somma è 0 in quanto $x^{2n} - x^{2n+2} = x^{2n}(1 - x^2)$.

Per $x^2 < 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^{2n}(1-x^2)}{1+x^{4n}} \right| \leq (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1-x^2}{1-x^2} = 1.$$

Quindi la serie converge assolutamente e semplicemente

Per $x^2 > 1$ si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^{2n}(1-x^2)}{1+x^{4n}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(1+x^2)}{x^{4n}} =$$

$$= (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} = (1+x^2) \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{x^2(1+x^2)}{x^2-1} < \infty$$

Conclusione: c'è conv. puntuale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2) Studiamo la convergenza uniforme.
Riprendiamo i conti precedenti.

Sia $0 < \delta < 1$. Allora

$$\sup_{x^2 \leq \delta} \left| \frac{x^{2n}(1-x^2)}{1+x^{4n}} \right| \leq \sup_{x^2 \leq \delta} |x^{2n}| = \delta^n$$

e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n < \infty$. Per il Criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente per $x^2 \leq \delta$.

Sia ora $M > 1$. Allora

$$\sup_{x^2 \geq M} \left| \frac{x^{2n}(1+x^2)}{1+x^{4n}} \right| \leq \sup_{x^2 \geq M} \frac{1+x^2}{x^{2n}} \leq$$

$$\leq \sup_{x^2 \geq M} \frac{2x^2}{x^{2n}} = 2 \, \frac{1}{M^{n-1}}$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^{n-1}} < \infty$ essendo $M > 1$. Per il Criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente per $x^2 \geq M > 1$.

Ora dimostriamo che non c'è convergenza uniforme su tutto l'intervallo $x \in [0,1]$.
Il problema è quando $x^2 = 1$.

Abbiamo

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(1-x^2)}{1+x^{4n}} \overset{x^2 \leq 1}{\geq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(1-x^2)}{2} \overset{x^2<1}{=} \frac{1}{2}$$

Dunque $f(x) \geq \frac{1}{2}$ per $x^2 < 1$ mentre $f(x) = 0$ se $x^2 = 1$. Quindi f è discontinua nei punti $x = \pm 1$. Quindi la serie non può convergere uniformemente intorno questi punti.

$\square$

ESERCIZIO Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza semplice della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risoluzione. Studiamo direttamente la convergenza uniforme. Sia $M \in \mathbb{R}$ un parametro.

Allora

$$\sup_{x \leq M} \frac{n^x}{2^n + x^2} \leq \sup_{x \leq M} \frac{n^x}{2^n} = \frac{n^M}{2^n},$$

essendo $x \longmapsto n^x$ crescente. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^M}{2^n} < \infty$$

converge per il criterio della radice (o del rapporto).

Infatti

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^M}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^M}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2}$$

converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $(-\infty, M]$ con $M \in \mathbb{R}$ arbitrariamente grande.

Non c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.
Infatti, per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n^x}{2^n + x^2} =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2} \geq \frac{(N+1)^x}{2^{N+1} + x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty .$$

Risposte:

i) Convergenza semplice $\forall x \in \mathbb{R}$

ii) Convergenza uniforme: su ogni $(-\infty, M]$ $\forall M \in \mathbb{R}$.

$\square$

Esercizio Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1+|x|)^n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Studiare la convergenza puntuale.

(ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Soluzione (i) Per $x=0$ la serie converge e la somma è 0. Proviamo che la serie converge assolutamente in ogni punto $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{|x|}{(1+|x|)^n} < \infty.$$

Per il criterio della Radice:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2} \frac{|x|}{(1+|x|)^n}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}}\right) \cdot \frac{1}{1+|x|} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \frac{1}{1+|x|} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Dunque $L<1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Quindi c'è convergenza assoluta (e quindi semplice) in ogni punto.

(ii) Studiamo la convergenza uniforme. É sufficiente studiare il caso $x \geq 0$. Consideriamo la funzione

$$\phi_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}, \quad x \geq 0.$$

La derivata è:

$$\phi_n'(x) = (1+x)^{-n} + x(-n)(1+x)^{-n-1}$$

$$= (1+x)^{-n-1}\left\{(1+x) - nx\right\}$$

Quindi $\phi_n'(x) \geq 0 \iff 1+x-nx \geq 0 \iff 1 \geq (n-1)x$

$$\iff x \leq \frac{1}{n-1} \quad (\text{per } n \geq 2)$$

Di conseguenza $x = \frac{1}{n-1}$ è il p.to di max assoluto (per $n \geq 2$):

$$\phi_n(x) \leq \frac{1}{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \qquad \begin{array}{l}\forall x \geq 0 \\ \forall n \geq 2\end{array}$$

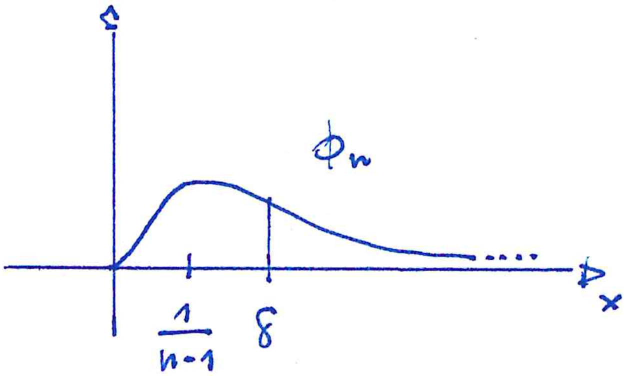
Tuttavia la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \infty$$

diverge perché il termine generale è asintotico con $\frac{1}{n}$, essendo $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = e \neq 0$.

Il criterio di Weierstrass <u>non</u> si applica con successo su tutto $[0,\infty)$.

Fissiamo $\delta > 0$. Per tutti gli n grandi il grafico di ϕ_n è questo:



Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \sup_{x \geq \delta} \frac{x}{(1+x)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{\delta}{(1+\delta)^n} < \infty .$$

Per il Criterio di Weierstass c'è convergenza uniforme su ogni intervallo $[\delta, \infty)$ con $\delta > 0$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0, \infty)$. Infatti:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1+x)^n} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x} \right)^n \overset{(x \neq 0)}{=}$$

$$= \frac{x}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}} = \frac{x}{2} \frac{x+1}{x+1-1} = \frac{x+1}{2}$$

e quindi $\lim_{x \to 0^+} f(x) \geq \frac{1}{2}$, mentre $f(0) = 0$.
Quindi la somma f <u>non</u> è continua in $x = 0$.
Quindi non può esserci convergenza uniforme su $[0, \delta]$, altrimenti la somma dovrebbe essere continua. $\square$

ESERCIZIO Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n|x|)}{1+n^2x^2} .$$

i) Provare che $\log(1+t) \leq \sqrt{t}$ per ogni $t \geq 0$.

ii) Studiare la convergenza ~~p~~ puntuale della serie.

iii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risoluzione. i) Consideriamo la funzione $\phi(t) = \log(1+t) - \sqrt{t}$ per $t \geq 0$. La sua derivata è:

$$\phi'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} .$$

Studiamo

$$\phi'(t) \leq 0 \iff \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \iff 2\sqrt{t} \leq 1+t$$

$$\iff 0 \leq (1-\sqrt{t})^2 \quad \text{sempre verificato.}$$

Quindi ϕ è decrescente. Siccome $\phi(0) = 0$ segue che $\phi(t) \leq 0$ per $t \geq 0$.

ii) Per simmetria basta studiare $x \geq 0$. Serie a termini positivi. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$, converge.

Per $x > 0$ usiamo il punto i):

$$\frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2} \leq \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{(nx)^{3/2}}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty ;$$

La serie data converge per confronto.

Conclusione: Convergenza puntuale per $x \in \mathbb{R}$.

iii) Se $x \geq \delta > 0$ allora:

$$\sup_{x \geq \delta} \frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2} \leq \sup_{x \geq \delta} \frac{1}{(nx)^{3/2}} = \frac{1}{\delta^{3/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

Per il Criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$.

iv) (Non richiesto all'esame). Non c'è convergenza uniforme su $[0, \delta]$. Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n|x|)}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo $f(0) = 0$. Inoltre, per ogni $n = 1, 2 \dots$ e per ogni $x > 0$ si ha

$$f(x) \geq \frac{\log(1+nx)}{1+n^2x^2}.$$

In particolare con $x = 1/n$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{\log 2}{2} > 0$$

Quindi f non può essere continua in $x = 0$.
Quindi la serie non può convergere uniformemente su $[0, \delta]$.

$\square$

ESERCIZIO Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n}.$$

1) Stabilire per quali $x \geq 0$ c'è convergenza semplice.

2) Studiare la convergenza uniforme.

3) C'è convergenza uniforme su $[0,\infty)$. Vero o Falso?

Soluzione 1) Per $x = 0$ c'è convergenza e la somma è 0. Per $x > 0$:

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Converge per confronto.

2) Come sopra, per $x \geq \delta > 0$ si trova

$$\sup_{x \geq \delta} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{1}{\delta} \frac{1}{n^2}$$

e quindi c'è convergenza uniforme su $[\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$.

3) Osserviamo che $\quad (2ab \leq a^2+b^2)$;

$$x^2 n^2 + \log^4 n \geq 2xn \log^2 n$$

e quindi

$$\frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{x}{2xn \log^2 n} = \frac{1}{2n \log^2 n}$$

La stima è vera $\forall x \geq 0$ e $\forall n \geq 2$.

La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} < \infty \quad \text{converge.}$$

Lo si vede con il Criterio del confronto integrale

$$\int_2^{\infty} \frac{dt}{t \log^2 t} dt = \left[-\frac{1}{\log t} \right]_{t=2}^{t=\infty}$$

$$= \frac{1}{\log 2} < \infty$$

Conclusione: per il Criterio di Weierstass la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n}$$

converge uniformemente su $[0, \infty)$.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

i) Studiare la convergenza puntuale

ii) Studiare la convergenza uniforme

Soluzione. Basta studiare $x \geq 0$. Per $x=1$ la serie NON converge.

Sia $0<\delta<1$. Se $0\leq x \leq \delta$ si ha

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n \leq \delta^n$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{0\leq x\leq \delta} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n = \frac{1}{1-\delta} < \infty$$

Dunque c'è convergenza uniforme su $[0,\delta]$ $\forall \delta<1$

Sia ora $M>1$. Se $x \geq M$ si ha

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \leq \left(\frac{1}{M}\right)^n$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\geq M} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M}\right)^n = \frac{M}{M-1} < \infty$$

Dunque c'è convergenza uniforme su $[M,\infty)$ $\forall M>1$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0,1)$.

Dato $\bar{n} \in \mathbb{N}$, il resto della serie è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} - \sum_{n=0}^{\bar{n}} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} .$$

Stimiamo

$$\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{0 \leq x < 1}{\geq} \frac{1}{2} \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} x^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{\bar{n}} x^n \right)$$

e quindi

$$\sup_{0 < x < 1} \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = +\infty .$$

Analogamente si prova che non c'è convergenza uniforme su $(1,\infty)$.

Risposte:

i) CP per $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

ii) CU per $|x| \leq \delta$ $\forall \delta < 1$ e per $|x| \geq M$ $\forall M > 1$.

$\square$

Esercizio. Per $x \in (-1,1)$ calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \,, \quad -1 < x < 1$$

Soluzione. Il raggio di convergenza è $R = 1$.

Partiamo la serie geometrica
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \,, \quad -1 < x < 1 \,.$$

Ho convergenza uniforme su $[-\delta, \delta]$ $\forall 0 < \delta < 1$.

Derivo
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} .$$

Operazione lecita, in questo la serie delle derivate converge uniformemente su $[-\delta, \delta]$ con $0 < \delta < 1$.

Ottengo l'identità
$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \,, \quad -1 < x < 1 \,.$$

Posso derivare sotto il segno di serie
$$\frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} .$$

Si ottiene:
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \frac{(1-x) + 2x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \,, \quad -1 < x < 1 .$$

□

Esercizio Sia $p \geq 0$ un parametro. Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^{p+1} e^{-nx}, \qquad x \geq 0.$$

① Discutere la convergenza puntuale.

② Studiare la convergenza totale e uniforme

③ Provare che
$$f(x) \geq \int_1^{\infty} (t-1)^p x^{p+1} e^{-tx} dt, \qquad x \geq 0.$$

④ Provare che f non è continua in $x = 0$.

Soluzione. ① Per $x=0$ la serie converge e $f(0) = 0$.
Per $x > 0$ usiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^p x^{p+1} e^{-nx}} = \lim_{n \to \infty} e^{-x} \sqrt[n]{n^p} \sqrt[n]{x^{p+1}}$$
$$= e^{-x} < 1$$

Quindi la serie converge.

② Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sup_{x \geq 0} n^p x^{p+1} e^{-nx} \right)$$

Sia $f_n(x) = n^p x^{p+1} e^{-nx}$ per $x \geq 0$.

Derivata:

$$f_n'(x) = n^p e^{-nx} \left((p+1)x^p - x^{p+1} n\right)$$

$$= n^p x^p e^{-nx} \left((p+1) - xn\right)$$

Quindi f_n cresce su $\left[0, \frac{p+1}{n}\right]$ e decresce su $\left[\frac{p+1}{n}, \infty\right)$. L'estremo superiore è preso nel punto $x = \frac{p+1}{n}$, il punto unico di massimo assoluto.

Conti:

$$f_n\left(\frac{p+1}{n}\right) = n^p \left(\frac{p+1}{n}\right)^{p+1} e^{-(p+1)}$$

$$= (p+1)^{p+1} \frac{1}{n} e^{-(p+1)}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ non si ha convergenza totale su $[0,\infty)$. In particolare non si può usare il Criterio di Weierstrass.

Fissiamo $\delta > 0$ e studiamo la convergenza uniforme su $[\delta, \infty)$. Definitivamente in n avremo

$$\sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta) \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\delta) < \infty$$

Per il Criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $[\delta, \infty)$.

③ Se $t \in [n, n+1]$ avremo $(x \geq 0)$

$$n^p \geq (t-1)^p \quad e \quad e^{-nx} \geq e^{-tx}$$

Quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^{p+1} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(n^p x^{p+1} e^{-nx} \right) dt \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (t-1)^p x^{p+1} e^{-tx} \, dt =$$

$t-1=s$

$$= \int_1^{\infty} (t-1)^p x^{p+1} e^{-tx} \, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} s^p x^{p+1} e^{-(s+1)x} \, ds$$

$sx = r$

$$= x^{p+1} e^{-x} \int_0^{\infty} s^p e^{-sx} \, ds =$$

$$= x^{p+1} e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{r^p}{x^p} e^{-r} \frac{1}{x} \, dr$$

$$= e^{-x} \int_0^{\infty} r^p e^{-r} \, dr$$

④ Avremo

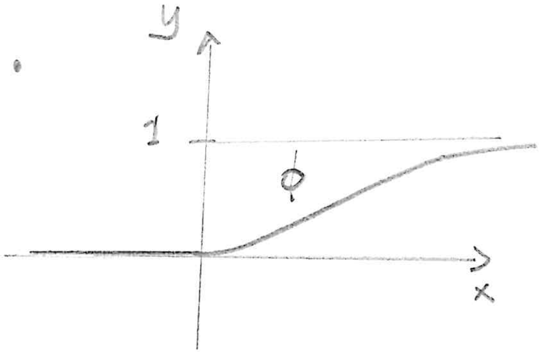
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq \lim_{x\to 0^+} e^{-x}\int_0^\infty r^p e^{-r}\,dr =$$

$$= \int_0^\infty r^p e^{-r}\,dr > 0.$$

Siccome $f(0)=0$, segue che f non è continua in $x=0$. In particolare la serie non può convergere uniformemente su nessun intervallo del tipo $[0,\delta]$ con $\delta>0$.

ESERCIZIO\PROBLEMA Sia $K \subset \mathbb{R}$ un chiuso. Costruire una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

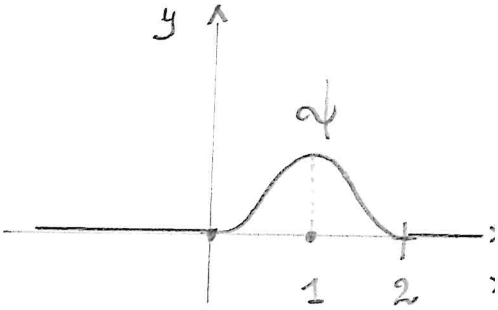
$$K = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}.$$



La funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

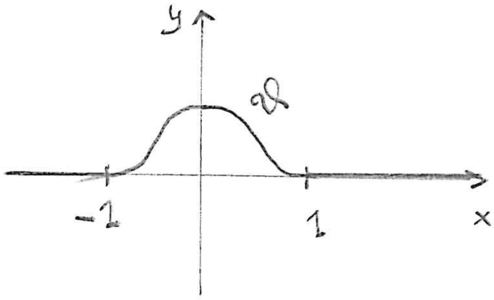
verifica $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi(x) > 0 \iff x > 0$.



La funzione

$$\psi(x) = \phi(x)\,\phi(2-x)$$

è $C^\infty(\mathbb{R})$ e $\psi(x) > 0 \iff 0 < x < 2$.

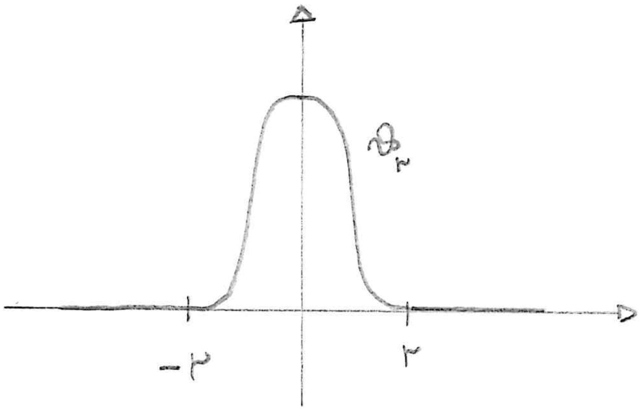


La funzione $\vartheta(x) = \psi(x+1)$

è pari e $\vartheta(x) > 0 \iff -1 < x < 1$.

Dato $r > 0$, possiamo riscalare

$$\vartheta_r(x) = \vartheta\left(\frac{x}{r}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$



Dunque: $\vartheta_r \in C^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\begin{cases} \vartheta_r(x) > 0 & \text{per } -r < x < r, \\ \vartheta_r(x) = 0 & \text{per } |x| \geq r. \end{cases}$$

Consideriamo l'enumerazione

$$(\mathbb{R}\setminus K) \cap \mathbb{Q} = \{ q_n \, ; \, n \in \mathbb{N} \}$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo la distanza

$$r_n = \operatorname{dist}(q_n, K) > 0 .$$

Le funzioni

$$f_n(x) = \vartheta_{r_n}(x - q_n) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

sono positive esattamente su $I_n = (q_n - r_n, q_n + r_n) \subset \mathbb{R}\setminus K$.

Osserviamo che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \mathbb{R}\setminus K .$$

Infatti se $x \in \mathbb{R}\setminus K$ avremo $\delta = \operatorname{dist}(x, K) > 0$.

Preso $q_n \in (x - \delta/2, x + \delta/2)$ si avrà $r_n \geq \delta/2$

e quindi $x \in I_n$.

Vogliamo sommare tutte le funzioni f_n.

Un primo tentativo è questo:

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n(x) .$$

Siccome $\| f_n \|_\infty = \| \varphi \|_\infty$, la serie converge uniformemente per il criterio di Weierstrass.

Quindi $g \in C(\mathbb{R})$ e inoltre $K = \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0 \}$.

Bisogna migliorare la definizione. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$M_n = \max \{ \| f_n^{(k)} \|_\infty : 0 \leq k \leq n \}.$$

La funzione desiderata è

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n M_n} f_n(x).$$

Proviamo che $f \in C^1(\mathbb{R})$. La serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f_n'(x)}{2^n M_n}$$

converge totalmente (e quindi uniformemente), infatti

$$\frac{\| f_n' \|_\infty}{M_n} \leq 1 \quad \text{per } n \geq 1.$$

Per i teoremi noti: $f \in C^1(\mathbb{R})$.
In effetti, $f \in C^k(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f_n^{(k)}(x)}{2^n M_n}$$

converge uniformemente, essendo

$$\frac{\| f_n^{(k)} \|_\infty}{M_n} \leq 1 \quad \text{per } n \geq k.$$

Quindi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$\square$

Esercizio Siano $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni, $n \in \mathbb{N}$, tali che:

(1) f_n è continua e $T_n > 0$ periodica;

(2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty$;

(3) $\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$.

Provare che f è periodica.

Soluzione. Si ha $f \in C(\mathbb{R})$ in quanto limite uniforme di funzioni continue.

La successione $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e quindi ha una sottosuccessione convergente:

$$\lim_{k \to \infty} T_{n_k} = T \in [0, \infty).$$

Vogliamo passare al limite nell'identità

$$(*) \qquad f_{n_k}(x + T_{n_k}) = f_{n_k}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Affermo che

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x + T_{n_k}) = f(x+T).$$

Per la continuità di f:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |f(x+T) - f(x+T_{n_k})| < \varepsilon \ \text{ se } |T - T_{n_k}| < \delta$$

Esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $|T - T_{n_k}| < \delta \ \forall k \geq \bar{k}$ e inoltre

$$\| f_{n_k} - f \|_\infty < \varepsilon \quad \text{per } k \geq \bar{k}.$$

In conclusione:

$$|f_{n_k}(x + T_{n_k}) - f(x+T)| \leq |f_{n_k}(x + T_{n_k}) - f(x + T_{n_k})| + |f(x+T_{n_k}) - f(x+T)| < 2\varepsilon \quad \forall k \geq \bar{k}.$$

Quindi passando al limite per $K \to \infty$ in $(*)$ si ottiene

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se $T > 0$ questo prova che f è periodica,

Se $T = 0$ questa informazione è vuota.

Esercizio: Discutere il caso $T = 0$

Esercizio Lasciamo cadere l'ipotesi (2): $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty$,

É ancora vero che f è periodica?

ESERCIZIO. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right)}\,dx .$$

Soluzione. Studiamo la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right)}, \qquad x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}.$$

Poichè $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right) = x^2$ si ha il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x\in[0,1]$$

(In effetti $x\in\mathbb{R}$).

Studiamo la convergenza uniforme:

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{|x^2 - n\sin(x^2/n)|}{(1+n\sin(x^2/n))(1+x^2)}$$

$$\leq |x^2 - n\sin(x^2/n)|$$

Consideriamo $\phi_n(x) = x^2 - n\sin(x^2/n)$.

Derivata: $\phi_n'(x) = 2x - 2x\cos(x^2/n)$

$$= 2x\,(1-\cos(x^2/n)).$$

Dunque si ha: $\phi_n'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.

Dal momento che $\phi_n(0) = 0$ deduciamo

che per ogni $M > 0$ si ha

$$\sup_{x \in [0,M]} |x^2 - n \sin(x^2/n)| = M^2 - n \sin\left(\frac{M^2}{n}\right)$$

e quindi

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,M]} |x^2 - n \sin(x^2/n)| = 0 .$$

Si ha convergenza uniforme su ogni intervallo $[0, M]$ con $M < \infty$. (Tuttavia non si ha convergenza uniforme su $[0, \infty)$).

Possiamo scambiare limite e integrale:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + n \sin(x^2/n)} \, dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + n \sin(x^2/n)} \, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \Big[\operatorname{arctg}(x) \Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4} .$$

$\square$

ESERCIZIO i) Provare che

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt = 0$$

ii) Si consideri $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n \, dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt}, \qquad x \in [-1,1], \ n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare il limite

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

e discutere la convergenza uniforme.

Soluzione. i)

$$\lim_{n \to \infty} (1-t^2)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \in [-1,1] \setminus \{0\} \end{cases}$$

con convergenza uniforme per $0 < \delta \leq |t| \leq 1$.

Dunque,

$$\lim_{n \to \infty} \int_\delta^1 (1-t^2)^n \, dt = \int_\delta^1 \lim_{n \to \infty} (1-t^2)^n \, dt =$$

$$= \int_\delta^1 0 \, dt = 0.$$

D'altra parte $\int_0^\delta (1-t^2)^n \, dt \leq \int_0^\delta 1 \, dt = \delta$

con $\delta > 0$ arbitrario. Segue la tesi $(*)$.

ii) Per $x = 0$ si ha $f_n(x) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0 .$$

Vogliamo provare che per $0 < x \leq 1$ si ha

$$(**) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 .$$

Abbiamo

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt} = 1 - \frac{\int_x^1 (1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt}$$

e basta provare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_x^1 (1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt} = 0 .$$

Fissiamo $\delta > 0$ e supponiamo $\delta \leq x \leq 1$.
Sia poi $0 < \eta < \delta$ un parametro (ad es. $\eta = \delta/2$).
Allora

$$0 \leq \frac{\int_x^1 (1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt} \leq \frac{(1-x)(1-x^2)^n}{\int_0^\eta (1-t^2)^n\,dt} \leq$$

$$\leq \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\eta\,(1-\eta^2)^n} = \frac{1-\delta}{\eta}\left(\frac{1-\delta^2}{1-\eta^2}\right)^n$$

Siccome $0 < \eta < \delta$ si ha $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\delta^2}{1-\eta^2}\right)^n = 0 .$

Questo prova che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\delta \le x \le 1} \underbrace{\left(1 - f_n(x)\right)}_{\geq 0} = 0,$$

e quindi il limite (**) è uniforme su $[\delta, 1]$, per ogni $\delta > 0$.

In modo analogo, per simmetria

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -1 \quad \text{per} \quad -1 \le x < 0,$$

uniforme su $[-1, -\delta]$ con $\delta > 0$.

$\square$

Esercizio Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto.
Provare che la funzione distanza $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, A) := \inf_{z \in A} |x - z|$$

è 1-Lipschitziana.

Risoluzione. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $z \in A$.
Allora

$$\operatorname{dist}(x, A) \leq |x - z| \leq |x - y| + |y - z| .$$

Facendo l'inf per $z \in A$ si trova

$$\operatorname{dist}(x, A) \leq |x - y| + \operatorname{dist}(y, A) .$$

Scambiando x con y si trova

$$\operatorname{dist}(y, A) \leq |x - y| + \operatorname{dist}(x, A) .$$

Mettendo insieme si ottiene

$$\left| \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \right| \leq |x - y| , \quad x, y \in \mathbb{R}^n .$$

□

<u>Esercizio</u> Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1+\alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.

<u>Risoluzione</u>. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x,y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$$

dove

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+\alpha x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \alpha 2x$$

$$= \frac{\alpha x}{\sqrt{1+\alpha x^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e quindi, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| = \frac{\alpha |x|}{\sqrt{1+\alpha x^2}} \leq \frac{\alpha |x|}{\sqrt{\alpha}|x|} = \sqrt{\alpha}.$$

Di conseguenza

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leq \sqrt{\alpha}\,|x-y|,$$

e per $\alpha < 1$, f è una contrazione.

Proviamo che per $\alpha \geq 1$, f non è una contrazione in quanto non ha punti fissi. Se, infatti, fosse $x = f(x)$ per qualche $x \in \mathbb{R}$ allora

$$x = \sqrt{1+\alpha x^2} \implies x^2 = 1+\alpha x^2 \implies x^2(1-\alpha) = 1$$

Siccome $1-\alpha \leq 0$, questa è una contraddizione. $\square$

<u>Esercizio</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso. Un punto $\bar{x} \in A$ si dice proiezione metrica su A di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se

$$|x - \bar{x}| = \mathrm{dist}(x, A).$$

1) Provare che ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ha almeno una proiezione metrica su A.

2) Provare che se A è convesso, la proiezione metrica è unica.

Soluzione. Sia $R > 0$ tale che $R > \mathrm{dist}(x, A)$.

Allora

$$\mathrm{dist}(x, A) = \mathrm{dist}(x, A \cap \overline{B_R(x)})$$

$$= \inf_{z \in A \cap \overline{B_R(x)}} |x - z|$$

La funzione $f(z) = |x - z|$

è continua ed assume minimo sul compatto $A \cap \overline{B_R(x)}$. Ogni punto di minimo $\bar{x} \in A$ è una proiezione metrica di x,

2) Sia A convesso e siano $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ e $y, z \in A$ tali che

$$|y - x| = |z - x| = \mathrm{dist}(x, A).$$

Allora

Perché la palla è rotonda

$$\left| \frac{y+z}{2} - x \right| < \mathrm{dist}(x, A) \text{ se } y \neq z,$$

e dunque $\dfrac{y+z}{2} \notin A$, contro la convessità.

Problema Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e consideriamo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \le f(x)\}.$$

É vero che ogni $p \in \partial A = gr(f)$ è proiezione metrica di un $q \in \mathbb{R}^2 \setminus A$?

Stessa domanda con $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Esercizio Sia $h \in C([0,1])$ una funzione assegnata.
Verificare che l'equazione funzionale

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,1],$$

ha un'unica soluzione.

Risoluzione. $X = C([0,1])$ con la sup-norma è uno spazio di Banach. Definiamo l'applicazione $T: X \to X$

$$(Tf)(x) = h(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,1].$$

Osserviamo che $f \in C([0,1]) \Rightarrow x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ è $C^1([0,1])$

Quindi, è effettivamente $Tf \in C([0,1])$.

Se proviamo che T è una contrazione su X con la sup-norma, allora per il Teorema di Banach T ha un unico punto fisso su X.

Siano $f, g \in X$. Allora

$$Tf(x) - Tg(x) = \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x g(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)\,dt$$

e dunque

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leq \frac{1}{2} \int_0^x |f(t) - g(t)|\,dt$$
$$\leq \frac{1}{2} x \, \|f-g\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f-g\|_\infty$$

e in conclusione $\|Tf - Tg\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f-g\|_\infty$.

T è contrazione di fattore $\lambda = 1/2$.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathrm{Lip}(f)<1$. Provare che $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$F(x,y)=\big(x+f(y),\ y+f(x)\big),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

è 1-1 e su. Provare che $F^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ è Lipschitz.

SOLUZIONE. Dato $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ cerchiamo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tale che

$$(*)\qquad \begin{cases} x+f(y)=\xi \\ y+f(x)=\eta \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x=\xi-f(y) \\ y=\eta-f(x). \end{cases}$$

Definiamo la funzione $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$G(x,y)=\big(\xi-f(y),\ \eta-f(x)\big).$$

Proviamo che G è una contrazione per la distanza standard:

$$|G(x,y)-G(\bar{x},\bar{y})|=|(f(\bar{y})-f(y),\ f(\bar{x})-f(x))|=$$

$$=\sqrt{|f(\bar{y})-f(y)|^2+|f(\bar{x})-f(x)|^2}\leq$$

$$\leq\sqrt{L^2|\bar{y}-y|^2+L^2|\bar{x}-x|^2}=L\,|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})|$$

con $L=\mathrm{Lip}(f)$.

Per il Teorema di Banach G ha un punto fisso $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che è dunque la soluzione <u>unica</u> di $(*)$.
Questo prova che F è 1-1 e su.

Cerco una costante di Lipschitz per F^{-1},
É sufficiente trovare $m>0$ tale che

$$(**) \qquad \left| F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y}) \right| \geq m \left| (x,y) - (\bar{x},\bar{y}) \right|$$

per ogni $(x,y), (\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$.
Per la prima coordinata di F:

$$\left| (x+f(y)) - (\bar{x}+f(\bar{y})) \right| = \left| x-\bar{x} + f(y) - f(\bar{y}) \right| \geq$$

$$\geq \left| |x-\bar{x}| - |f(y)-f(\bar{y})| \right|$$

e analogamente per la seconda

$$\left| (y+f(x)) - (\bar{y}+f(\bar{x})) \right| \geq \left| |y-\bar{y}| - |f(x)-f(\bar{x})| \right|.$$

Lavoriamo con la norma $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.
Avremo:

$$\| F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y}) \|_1 \geq \left| |x-\bar{x}| - |f(y)-f(\bar{y})| \right| + \left| |y-\bar{y}| - |f(x)-f(\bar{x})| \right|$$

uso $L = Lip(f) < 1$

$$\geq (1-L)|x-\bar{x}| + (1-L)|y-\bar{y}| = (1-L) \| (x,y) - (\bar{x},\bar{y}) \|_1$$

Siccome $|\cdot|$ e $\|\cdot\|_1$ sono equivalenti,
questo prova $(**)$.

$\square$

Esercizio Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e sia $K: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Definiamo l'applicazione $T: X \longrightarrow X$

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s,t)\, f(t)\, dt \quad , \quad f \in X.$$

i) Provare che $s \longmapsto (Tf)(s)$ è continua (ovvero $Tf \in X$);

ii) Provare che $T \in \mathcal{L}(X,X)$;

iii) Dare condizioni su K affinché T sia una contrazione.

Risoluzione. i) K è uniformemente continua su $[0,1]\times[0,1]$ per il Teorema di Heine-Cantor:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \ : \quad |(s,t)-(\bar{s},\bar{t})| < \delta \implies |K(s,t) - K(\bar{s},\bar{t})| < \varepsilon.$$

Segue che:

$$\begin{aligned} |T(f)(s) - T(f)(\bar{s})| &= \left| \int_0^1 (K(s,t) - K(\bar{s},t))\, f(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(s,t) - K(\bar{s},t)|\, |f(t)|\, dt \\ &\leq \varepsilon\, \|f\|_\infty \qquad \text{se} \quad |s-\bar{s}| < \delta. \end{aligned}$$

ii) T è lineare, per la linearità dell'integrale. Proviamo che T è limitato. Sia $f \in X$ con $\|f\|_\infty \leq 1$. Allora

$$\begin{aligned} |(Tf)(s)| &\leq \int_0^1 |K(s,t)|\, |f(t)|\, dt \\ &\leq \|f\|_\infty \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} |K(s,t)| \leq \|K\|_\infty \end{aligned}$$

e quindi $\|T\| \leq \|K\|_\infty < \infty$.

iii) Se $\|K\|_\infty < 1$ allora T è una contrazione.

$\square$

ESERCIZIO. Calcolare tutti gli $\alpha>0$ tali che

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|^{\alpha}}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} = 0.$$

SOLUZIONE. Tentativo con le coordinate polari

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta.$$

Si ottiene

$$\left| \frac{r^{1+\alpha}\cos\theta\,|\sin\theta|^{\alpha}}{r^4(\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)} \right| = r^{\alpha-3}\,\frac{|\cos\theta|\,|\sin\theta|^{\alpha}}{\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}.$$

La stima purtroppo dipende da θ.

Altro tentativo:

$$\left| \frac{x\,|y|^{\alpha}}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} \right| = \frac{|x|\,|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$\leq \frac{|x|\,|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4}$$

Osserviamo ora che con la sostituzione $z=y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\,|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4} = \lim_{(x,z)\to(0,0)} \frac{|x|\,|z|^{\frac{\alpha-2}{2}}}{x^2+z^2} = (*)$$

Con coordinate polari $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$

si trova

$$(*) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{1+\frac{\alpha-2}{2}}}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r^{\frac{\alpha-2}{2}-1}$$

$$= 0 \quad \text{se e solo se} \quad \frac{\alpha-2}{2} - 1 > 0 \iff \alpha > 4.$$

Dunque, se $\alpha > 4$ il limite è 0.

Supponiamo $\alpha \leq 4$. Con la scelta $x = y^2$ (e $y > 0$)

si trova

$$\frac{x\,|y|^\alpha}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} = \frac{y^{2+\alpha}}{2y^4 \cdot y^2(1+y^2)} = \frac{y^{\alpha-4}}{2(1+y^2)}$$

e per $\alpha \leq 4$ si ha

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^{\alpha-4}}{1+y^2} \neq 0.$$

Conclusione: $L = 0 \iff \alpha > 4.$

$\square$

__Esercizio__ Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

e sia $K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 2 \}$.

1) Dire se K è chiuso.

2) Stabilire se K è compatto.

3) Stabilire se K è convesso.

Risoluzione. 1) Proviamo che f è continua in 0 (e quindi su tutto $\mathbb{R}^2$):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2 (\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 0$$

indipendentemente da θ in quanto $\cos^4\theta + \sin^4\theta \leq 1$.

Dunque $K = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, 2]}_{\text{chiuso di } \mathbb{R}})$ = chiuso in quanto anti-immagine di un chiuso con f continua.

2) Per il teorema di Heine-Borel basta vedere se K è limitato. Si ha $(x,y) \in K$ se e solo se

$$x^4+y^4 \leq 2x^2+2y^2 \iff x^4-2x^2+y^4-2y^2 \leq 0$$

$$\iff (x^2-1)^2+(y^2-1)^2 \leq 2$$

L'ultima disequazione implica che:

$$(x^2-1)^2 \leq 2 \iff |x^2-1| \leq \sqrt{2} \implies x^2 \leq 1+\sqrt{2}$$
$$(y^2-1)^2 \leq 2 \quad \dots \implies y^2 \leq 1+\sqrt{2}$$

e dunque $K \subset \left[-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right] \times \left[-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$.

Dunque K è compatto.

3). Mostriamo che K non è convesso. Scegliamo $x=1$ e risolviamo l'equazione $f(1,y)=2$ ovvero

$$1+y^4 = 2(1+y^2) \iff y^4-2y^2-1=0$$

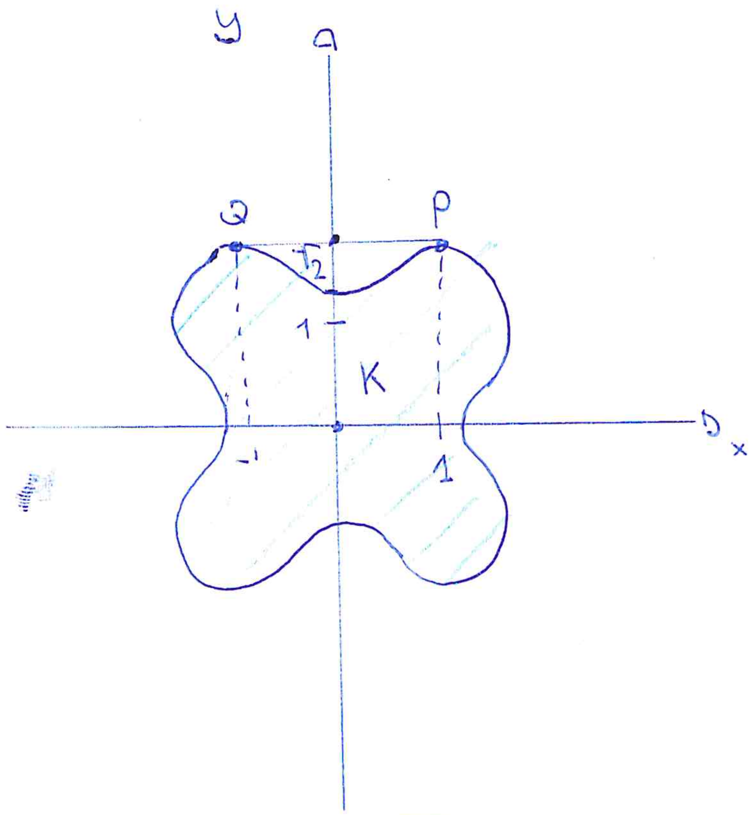
$$\iff y^2 = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$\iff y^2 = 1+\sqrt{2}$$

Quindi i punti $P = (1, \sqrt{1+\sqrt{2}})$ e $\cancel{Q = (1, -\sqrt{1+\sqrt{2}})}$ $Q = (-1, \sqrt{1+\sqrt{2}})$ appartengono a K. Il punto medio

$$M = \frac{P+Q}{2} = (0, \sqrt{1+\sqrt{2}})$$

tuttavia non appartiene a K.



Infatti con $x=0$ ed $y=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ si trova

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = y^2 = 1+\sqrt{2} > 2$$

Esercizio Sia $\beta > 0$ un parametro e si consideri

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = (x^5 + y^5)^\beta$.

i) Determinare tutti i $\beta > 0$ tali che f ~~sia~~ abbia tutte le derivate direzionali nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti i $\beta > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) Dato $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(t^5 v_1^5 + t^5 v_2^5 \right)^\beta$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^{5\beta}}{t} (v_1^5 + v_2^5)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } 5\beta > 1 \\ (v_1^5 + v_2^5)^{1/5} & \text{se } \beta = 1/5 \\ \text{non esiste finito se} & \beta \quad 1/5 \end{cases}$$

Risposta: $\beta \geq 1/5$

ii) Se $\beta < 1/5$ f non può essere differenziabile perché non esistono le derivate direzionali.

Se $\beta = 1/5$ f non è differenziabile perché

$$v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0) = (v_1^5 + v_2^5)^{1/5} \quad \text{non è lineare}$$

Rimane da studiare il caso $\beta > 1/5$. In questo caso: $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Test della differenziabilità:

$$\frac{f(x,y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^5+y^5)^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Stime:

$$\left| \frac{(x^5+y^5)^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{(|x|^5+|y|^5)^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\left[\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5\right]^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq 2^\beta \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{5\beta-1} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{\text{se } 5\beta-1>0} 0$$

Risposta: f differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2 \iff \beta > 1/5$.

$\square$

<u>COMMENTO</u> La funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^5+y^5)^\beta$$

NON è ben definita per tutti i valori di $\beta > 0$.
É però ben definita per $\beta = \dfrac{m}{2n+1}$ con $m = 1, 2, 3 \ldots$ ed $n = 0, 1, 2 \ldots$

ESERCIZIO Sia $\beta \geq 0$ un parametro e si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\beta |y|}{|x| + \sqrt{|y|}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti i $\beta \geq 0$ tali che:

i) f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$;

iii) f abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$.

iv) f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) Continuità in $0 \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{|x|^\beta |y|}{|x| + \sqrt{|y|}} \leq \frac{|x|^\beta |y|}{\sqrt{|y|}} = |x|^\beta \sqrt{|y|} \xrightarrow[\text{se } y \to 0]{} 0$$

indipendentemente da $\beta \geq 0$.

Quindi f cont. in $0 \in \mathbb{R}^2 \iff \beta \geq 0$.

ii) Su $x \neq 0$ f è continua (quoziente di funzioni continue). Studiamo la cont. nel punto $(0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $y_0 \neq 0$. Se $\beta > 0$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \dfrac{|x|^\beta y}{|x| + \sqrt{|y|}} = 0 = f(0, y_0)$.

Se $\beta = 0$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \dfrac{\overbrace{|x|^0}^{=1} y}{|x| + \sqrt{|y|}} = \sqrt{|y_0|}\, \operatorname{sign}(y_0) \neq 0$.

Quindi: f cont. su $\mathbb{R}^2 \iff \beta > 0$.

iv) ~~ii~~) Poniamo limitarci al caso $\beta > 1/2$. In questo caso

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Per essere differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$, f deve verificare:

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\beta \, |y|}{(|x| + \sqrt{|y|}) \sqrt{x^2+y^2}} \qquad (*)$$

Procediamo con delle stime dirette:

$$\frac{|x|^\beta \, \overbrace{|y|}^{= \sqrt{|y|}\cdot\sqrt{|y|}}}{(|x| + \sqrt{|y|})(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{|x|^\beta \sqrt{|y|}}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}}}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

Nel caso che

$$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} \iff \beta > \frac{1}{2}$$

il limite in $(*)$ è $= 0$.

Dunque: f differenziabile in $0 \iff \beta > \frac{1}{2}$.

□

iii) Se esiste, la derivata direzionale nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$ nella direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{|t|^{\beta+1} |v_1|^{\beta} |v_2|}{|t|\,|v_1| + \sqrt{|t|}\sqrt{|v_2|}}$$

Se $\beta = 0$ si trova

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t\sqrt{|t|}} \frac{|v_2|}{\sqrt{|t|}\,|v_1| + \sqrt{|v_2|}}$$

e il limite esiste solo se $v_2 = 0$.

Se $\beta > 0$ si trova

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t|^{\beta+1}}{t\sqrt{|t|}} \frac{|v_1|^{\beta} |v_2|}{\sqrt{|t|}\,|v_1| + \sqrt{|v_2|}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } |v_2| = 0 \quad \text{indip. da } \beta \\ 0 & \text{se } \beta > 1/2 \\ \text{non esiste finito} & \text{se } \beta \leq 1/2 \end{cases}$$

Conclusione: tutte le derivate direzionali esistono (e sono $= 0$) se e solo se $\beta > 1/2$.

Esercizio Dato $\alpha > 0$ si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione. i) Stime:

$$|f(x,y)| = \frac{|x|\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)} \leq \frac{(x^2+y^2)^{1/2}\,(x^2+y^2)^{\alpha/2}}{\log(1+x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\log(1+x^2+y^2)} = \frac{r^{\alpha+1}}{\log(1+r^2)} \qquad \text{dove } r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Siccome $\log(1+r^2) = r^2(1+o(1))$ per $r \to 0^+$, si trova:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^{\alpha+1}}{\log(1+r^2)} = \lim_{r\to 0^+} r^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ \infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Deduciamo che

$$\alpha > 1 \implies f \text{ continua in } (0,0).$$

Esaminiamo il caso $\alpha \leq 1$. Test delle rette $y = mx$:

$$f(x, mx) = \frac{x\ |m|^\alpha\ |x|^\alpha}{\log(1+x^2+m^2x^2)} = \left[\begin{array}{l} o(1) \to 0 \\ \text{per } x \to 0 \end{array}\right]$$

$$= \frac{x\ |x|^\alpha\ |m|^\alpha}{x^2(1+m^2)(1+o(1))} = \frac{|m|^\alpha}{1+m^2}\ \frac{|x|^\alpha}{x\ (1+o(1))}$$

Per $\alpha \leq 1$ il limite $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ non esiste finito oppure dipende da m (quando $\alpha = 1$ e $x \to 0^+$)

Questo prova che:

$$\alpha \leq 1 \implies f \text{ non è continua in } (0,0).$$

ii) Siccome $f = 0$ sui due assi, le derivate parziali in $(0,0)$ esistono e sono

$$f_x(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = 0.$$

Dunque, f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\ |y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Procedendo come sopra:

$$\left|\frac{x\ |y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{2}}}{\log(1+x^2+y^2)} = \frac{r^\alpha}{\log(1+r^2)}$$

dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ora si ha:

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{r^\alpha}{\log(1+r^2)} = \lim_{r \to 0^+} \frac{r^{\alpha-2}}{1+o(1)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ \infty & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

Questo prova che

$$\alpha > 2 \implies f \text{ differenziabile in } (0,0).$$

Quando $\alpha \leq 2$ con il test delle rette $y = mx$ si vede che il limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

non esiste finito. Dunque:

$$\alpha \leq 2 \implies f \text{ non è differenziabile in } (0,0).$$

Esercizio Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

(i) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua.
(ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Soluzione (i) Proviamo con il test delle rette. Sia $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$. Allora:

$$f(x, mx) = \frac{x\,|x|^\alpha |m|^\alpha}{x^4 + |x|^3 |m|^3} = \frac{x\,|x|^\alpha}{|x|^3} \, \frac{|m|^\alpha}{|x| + |m|^3}$$

Vediamo che per $\alpha + 1 \leq 3 \iff \alpha \leq 2$ il limite

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx)$$

o non esiste oppure non è zero. Dunque:

$$\alpha \leq 2 \implies f \text{ \underline{non} è continua in } 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Consideriamo ora il caso $\alpha > 2$.

Stime:

$$\left| \frac{x\,|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} \right| = \frac{|x|\,|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} \leq \frac{(x^4 + |y|^3)^{\frac{1}{4}} (x^4 + |y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{x^4 + |y|^3} =$$

$$= (x^4 + |y|^3)^{\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} - 1}$$

Imponiamo

$$\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} - 1 > 0 \iff \frac{\alpha}{3} > \frac{3}{4} \iff \alpha > \frac{9}{4}$$

Deduciamo che :

$$\alpha > \frac{9}{4} \implies f \text{ è continua in } 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Rimane da esaminare il caso $2 < \alpha \leq 9/4$.

Consideriamo la curva $\gamma(t) = (t, t^{4/3})$.
Si ha (per $t>0$)

$$f(\gamma(t)) = \frac{t\, t^{\frac{4}{3}\alpha}}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}\, t^{1+\frac{4}{3}\alpha - 4}.$$

Imponiamo

$$1 + \frac{4}{3}\alpha - 4 \leq 0 \iff \frac{4}{3}\alpha \leq 3 \iff \alpha \leq \frac{9}{4}$$

Per questi α si ha

$$\lim_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) \neq 0$$

e quindi f non è continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Conclusione:

$$f \text{ cont. in } 0 \iff \alpha > \frac{9}{4}.$$

(ii) Le derivate parziali di f in $0 \in \mathbb{R}^2$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Quindi f è differenziabile in 0 se e solo se

$$(*) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|^\alpha}{(x^4 + |y|^3)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Lungo la curva $r(t) = (t, t^{4/3})$ si trova

$$\frac{t\, t^{\frac{4}{3}\alpha}}{(t^4 + t^4)\sqrt{t^2 + t^{8/3}}} = t^{1+\frac{4}{3}\alpha - 4 - 1} \frac{1}{\sqrt{1 + t^{2/3}}}$$

Deduciamo che per $\frac{4}{3}\alpha - 4 \leq 0 \iff \alpha \leq 3$ il limite in ⊛ non può essere zero. Dunque

$$\alpha \leq 3 \implies f \text{ \underline{non} è differenziabile in } 0.$$

Studiamo il caso $\alpha > 3$. Stime:

$$\left| \frac{x\, |y|^\alpha}{(x^4 + |y|^3)\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|y|^\alpha}{(x^4 + |y|^3)} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(x^4 + |y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{(x^4 + |y|^3)} \cdot 1$$

$$= (x^4 + |y|^3)^{\frac{\alpha}{3} - 1}$$

Per confronto deduciamo che per $\frac{\alpha}{3} - 1 > 0$ si ha la validità del limite ⊛.

Conclusione:

$$f \text{ è differenziabile in } 0 \iff \alpha > 3.$$

$\square$

ESERCIZIO Dato il parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y}{|x|^3 + |y|^5} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f è continua in $(0,0)$.

ii) Provare che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$.

Risoluzione. i) Proviamo a fare direttamente la stima di continuità:

$$0 \leq \frac{|x|^\alpha |y|}{|x|^3 + |y|^5} \leq \frac{(|x|^3)^{\frac{\alpha}{3}} (|y|^5)^{\frac{1}{5}}}{|x|^3 + |y|^5} \leq \frac{(|x|^3 + |y|^5)^{\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{5}}}{|x|^3 + |y|^5}$$

$$\leq (|x|^3 + |y|^5)^{\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{5} - 1}$$

Se $\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{5} - 1 > 0$ allora f è continua in $(0,0)$ in quanto per confronto:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|}{|x|^3 + |y|^5} = 0 = f(0).$$

La condizione è $\frac{\alpha}{3} > \frac{4}{5} \iff \alpha > \frac{12}{5}$. Dunque:

$$\alpha > \frac{12}{5} \implies f \text{ è continua in } (0,0)$$

Dobbiamo provare l'implicazione inversa. Il test delle rette con

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad \text{con } \theta \text{ fissato ed } r \to 0^+$$

fornisce:

$$f(x,y) = \frac{r^{1+\alpha}|\cos\theta||\sin\theta|}{r^3|\cos\theta|^3 + r^5|\sin\theta|^5}$$

$$= \frac{1}{r^{2-\alpha}} \frac{|\cos\theta||\sin\theta|}{|\cos\theta|^3 + r^2|\sin\theta|^5}$$

Se $2-\alpha \geq 0$ (ovvero $\alpha \leq 2$) il limite per $r \to 0^+$ NON è 0.

Dunque: $\alpha \leq 2 \Rightarrow f$ NON è continua in $(0,0)$.

Rimangono da studiare i valori $2 < \alpha \leq 12/5$.

Prendiamo la curva

$$\begin{aligned} x &= t^5 \\ y &= t^3 \end{aligned} \qquad \text{con } t \to 0^+$$

Si ha

$$f(x,y) = \frac{t^{5\alpha+3}}{2t^{15}} = \frac{1}{2} t^{5\alpha+3-15} = \frac{1}{2} t^{5\alpha-12}$$

Se $5\alpha - 12 \leq 0$ il limite per $t \to 0^+$ NON è 0. Dunque

$$\alpha \leq \frac{12}{5} \Rightarrow f \text{ non è continua in } (0,0).$$

Conclusione:

$$f \text{ cont. in } (0,0) \iff \alpha > \frac{12}{5}.$$

ii) Siccome $f = 0$ per $xy = 0$ (sugli assi), si ha

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Test della differenziabilità: trovare $\alpha > 0$ tali che

$$\circledast \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha y}{(|x|^3 + |y|^5)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Sappiamo che dobbiamo trovare un sottoinsieme di $\left(\frac{12}{5}, \infty\right)$.

Il testo suggerisce la risposta $\alpha > 3$.

Stime:

$$\frac{|x|^\alpha |y|}{(|x|^3 + |y|^5)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|^3 + |y|^5} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|^3} = |x|^{\alpha-3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{se } \alpha > 3$$

Dunque, se $\alpha > 3$ il limite in $\circledast$ è 0, e quindi:

$$\alpha > 3 \implies f \text{ differenziabile in } (0,0).$$

Facciamo il test delle rette in $\circledast$ con $x = t$ e $y = t$.
Si trova:

$$\frac{t^{\alpha+1}}{(t^3+t^5)\,t\sqrt{2}} = \frac{t^\alpha}{\sqrt{2}\,t^3(1+t^2)} = \frac{t^{\alpha-3}}{\sqrt{2}(1+t^2)}$$

che NON converge a 0 per $t \to 0^+$ se $\alpha \leq 3$. Quindi:

$$\alpha \leq 3 \implies f \text{ non è differenziabile in } (0,0).$$

$\square$

ESERCIZIO Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0, \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di f.

Soluzione. La funzione $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(t) = t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \qquad t \neq 0$$

$$\phi(0) = 0$$

è continua su $\mathbb{R}$. Inoltre $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
In $t=0$, ϕ non è derivabile, in quanto non esiste il

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

Siccome $f(x,y) = \phi(xy)$, f è continua su $\mathbb{R}^2$, in quanto composizione di funzioni continue.

Studiamo l'esistenza delle derivate parziali.
In $0 \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0.$$

Nel punto $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0 \neq 0$, non esiste $\frac{\partial f}{\partial y}$ infatti non esiste il

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} x_0 \sin\left(\frac{1}{x_0 y}\right).$$

Analogamente, in $(0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $y_0 \neq 0$, non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Su $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy \neq 0\}$ f è di classe C^∞.

Dunque su tale insieme f è differenziabile (e quindi derivabile).

Studiamo la differenziabilità in $0 \in \mathbb{R}^2$.
In questo punto $\nabla f(0) = 0$, quindi dobbiamo esaminare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{xy}\right) = L.$$

Con le coordinate polari $x = r\cos\vartheta$ e $y = r\sin\vartheta$ troviamo

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{xy}\right) \right| \leq \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = r\,|\cos\vartheta|\,|\sin\vartheta|$$
$$\leq r \to 0$$

con stima indipendente da ϑ.

Deduciamo che $L = 0$ e quindi f è differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

<u>ESERCIZIO</u> Provare che la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

è differenziabile in tutti i punti ma $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$.

Soluzione. La funzione $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

è derivabile in tutti i punti con $\phi'(0) = 0$. Quindi f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, in quanto composizione di funzioni differenziabili.

Per $xy \neq 0$ calcoliamo ad esempio

$$f_x(x,y) = 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) + x^2y^2 \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2y}\right)$$

$$= 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - y \cos\left(\frac{1}{xy}\right).$$

Se $y_0 \neq 0$, il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,y_0)} 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - y \cos\left(\frac{1}{xy}\right)$$

<u>non</u> esiste.

Quindi $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$. □

ESERCIZIO Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \int_0^1 \frac{1-e^{xyt}}{t+t^2}\, dt, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(1) Provare che f è ben definita $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(2) Provare che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (risp. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$);

(3) Calcolare $\nabla f(x,y)$ (ad es. per $(x,y) = (0,0)$).

Soluzione. È $f(x,y) = \phi(xy)$ con

$$\phi(s) = \int_0^1 \frac{1-e^{st}}{t+t^2}\, dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $e^{st} = st + o(st) = st(1+o(1))$ e quindi l'integranda si estende in modo continuo fino a $t=0$. L'integrale è definito come integrale di Riemann.

Se proviamo che $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ (risp. $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$) segue il punto (2). Abbiamo

$$e^{st} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(st)^k}{k!}$$

con conv. uniforme per st in un compatto.

Quindi

$$\phi(s) = -\int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k t^k}{k!}}{t(1+t)}\, dt =$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{1+t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!} t^{k-1}\, dt$$

dove, per s fissato, si ha convergenza uniforme in $t \in [0,1]$.

Dunque,

$$\phi(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \cdot c_k \,, \qquad 0 \leq c_k = \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{t+1}\, dt \leq 1 .$$

La serie di potenze che definisce ϕ ha raggio di convergenza $R = \infty$. Quindi $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$. In particolare,

$$\phi'(0) = -\frac{c_1}{1!} = -\int_0^1 \frac{1}{t+1}\, dt$$

$$= -\Big[\log(t+1)\Big]_{t=0}^{t=1} = -\log 2 .$$

Per la regola della derivata della funzione composta:

$$df(x,y) = d\phi(xy) \cdot dg(x,y) \qquad \text{con } g(x,y) = x \cdot y$$

In termini di gradiente

$$\nabla f(x,y) = \phi'(xy) \cdot (y, x)$$

e nel punto $x = y = 0$

$$\nabla f(0) = \phi'(0)\,(0,0) = 0 .$$

$\square$

<u>Esercizio</u> Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y > 0\}$ ed $f \in C(\bar{A}) \cap C^1(A)$ con $f_x, f_y \in UC(A)$, uniformemente continue su A.

Provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esistono

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t},$$

(2) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t}.$$

Soluzione. Proviamo (1). Siccome $f_x \in UC(A)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste il limite

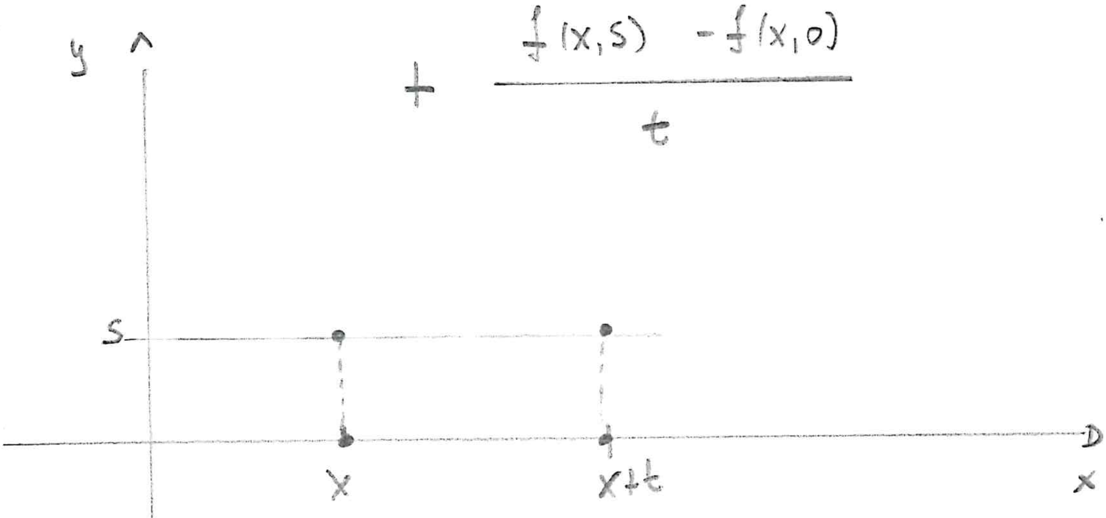
$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,0) \\ y>0}} f_x(x,y) = g(x_0,0).$$

Fissiamo $t > 0$. Allora, per $s > 0$ si ha

$$\frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t} = \frac{f(x+t,0) - f(x+t,s)}{t} +$$

$$+ \frac{f(x+t,s) - f(x,s)}{t} +$$

$$+ \frac{f(x,s) - f(x,0)}{t}$$



Possiamo scegliere $s = s(t) > 0$ tale che

$$\left| \frac{f(x+t, s) - f(x+t, 0)}{t} \right| < |t|,$$

$$(s = s(t))$$

$$\left| \frac{f(x, s) - f(x, 0)}{t} \right| < |t|.$$

Qui usiamo il fatto che $f \in C(\bar{A})$.

Per il Teorema di Lagrange esiste $t^* \in (0, t)$ tale che

$$\frac{f(x+t, s(t)) - f(x, s(t))}{t} = f_x(x+t^*, s(t)).$$

La scelta di $s(t)$ può essere fatta in modo tale che

$$\lim_{t \to 0} s(t) = 0.$$

Di conseguenza

$$\lim_{t \to 0} f_x(x+t^*, s(t)) = g(x, 0),$$

e si conclude che

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, 0) - f(x, 0)}{t} = g(x, 0).$$

$\square$

Esercizio Fissati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sia $X = \{\varphi \in C^1([0,1]) : \varphi(0) = \alpha$ e $\varphi(1) = \beta\}$. Sia poi $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{1+\varphi'(t)^2}\, dt .$$

(1) Provare che se F ammette minimo, allora questo è unico.

(2) Determinare il minimo.

Soluzione. La funzione $\mathcal{L}(s) = \sqrt{1+s^2}$, $s \in \mathbb{R}$, è strettamente convessa:

$$\mathcal{L}'(s) = \frac{s}{(1+s^2)^{1/2}}$$

$$\mathcal{L}''(s) = \frac{(1+s^2)^{1/2} - s\,\frac{s}{(1+s^2)^{1/2}}}{(1+s^2)}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} > 0 \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Siano $\varphi, \psi \in X$ con $\varphi \neq \psi$. Allora esiste $t \in [0,1]$ tale che $\varphi'(t) \neq \psi'(t)$. Altrimenti:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi' = \psi' \text{ su } [0,1] \\ \varphi(0) = \psi(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \psi \text{ su } [0,1],$$

Dunque, siccome $\varphi, \psi \in C^1([0,1])$ esiste $I \subset [0,1]$ intervallo tale che $\varphi' \neq \psi'$ su I.

Supponiamo che φ e ψ siano entrambi minimi: $F(\varphi) = F(\psi)$.

Allora:

$$F\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{\varphi'+\psi'}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_I \sqrt{1+(\ldots)^2}\,dt + \int_{[0,1]\setminus I} \sqrt{1+(\ldots)^2}\,dt$$

$$\wedge \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbin{/\!\wedge}$$

$$\int_I \frac{1}{2}\sqrt{1+\varphi'^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\psi'^2}\,dt \qquad \int_{[0,1]\setminus I} \frac{1}{2}\sqrt{1+\varphi'^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\psi'^2}$$

e di conseguenza

$$F\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) < \frac{1}{2}F(\varphi) + \frac{1}{2}F(\psi) = F(\varphi),$$

assurdo.

(2) Data $\varphi \in X$, sia $\gamma_\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma_\varphi(t) = (t, \varphi(t)).$$

Per la formula della lunghezza

$$\int_0^1 \sqrt{1+\varphi'^2}\,dt = V(\gamma_\varphi) = \sup_{0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1} \sum_{i=1}^n |\gamma_\varphi(t_i) - \gamma_\varphi(t_{i-1})|$$

$$\geq \sup_{0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1} \left| \sum_{i=1}^n \gamma_\varphi(t_i) - \gamma_\varphi(t_{i-1}) \right| =$$

$$= |\gamma_\varphi(t_n) - \gamma_\varphi(t_0)| = |(1,\beta) - (0,\alpha)|$$

$$= \sqrt{1+(\beta-\alpha)^2} .$$

Il segmento $\gamma(t) = (t, \alpha + t(\beta-\alpha))$, $t \in [0,1]$

che corrisponde a $\varphi(t) = \alpha + t(\beta-\alpha)$

ha variazione totale

$$V(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1+\varphi'^2} = \sqrt{1+(\beta-\alpha)^2} ,$$

Dunque l'unico minimo di F su X è

$$\varphi(t) = \alpha + t(\beta-\alpha) .$$

□

<u>ESERCIZIO</u> Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso, $K \neq \emptyset$. Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ un punto in cui $f = \text{dist}(\cdot; K)$ è differenziabile. Provare che x ha proiezione metrica unica.

SOLUZIONE. Sia $\bar{x} \in K$ una proiezione metrica di x:

$$|x - \bar{x}| = \text{dist}(x; K).$$

Ogni punto $y \in [\bar{x}, x]$ ha ancora proiezione metrica $\bar{x}$. Dunque, per $t \in [0,1]$:

$$f(x + t(\bar{x} - x)) = (1-t)\,|x - \bar{x}|.$$

La derivata direzionale di f nella direzione $v = x - \bar{x}$ è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x - t(\bar{x} - x)) - f(x)}{t}$$

$$= -\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + t(\bar{x} - x)) - f(x)}{t}$$

$$= |x - \bar{x}|$$

Quindi con $v = x - \bar{x}$:

$$(*) \qquad \langle \nabla f(x), v \rangle = |x-\bar{x}| = |v|$$

da cui si deduce che $|\nabla f(x)| \geq 1$.

D'altra parte, per ogni altro $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \nabla f(x), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

$$\leq \mathrm{Lip}(f)\,|v| \leq |v| .$$

Con $v = \nabla f(x)$ deduciamo che $|\nabla f(x)| \leq 1$.

Quindi

$$(**) \qquad |\nabla f(x)| = 1 .$$

La $(*)$, ovvero :

$$\left\langle \nabla f(x), \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right\rangle = 1$$

insieme a $(**)$ implica che

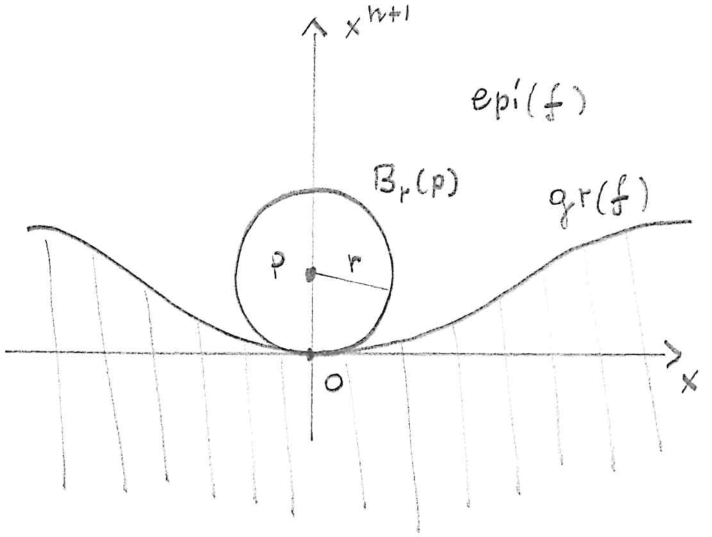
$$\nabla f(x) = \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} .$$

□

<u>Esempio</u>. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $f(0) = 0$ e $\nabla f(0) = 0$. Cerchiamo $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ ed $r > 0$ tali che

$$B_r(p) \subset \{ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > f(x) \} = epi(f)$$

$$\partial B_r(p) \cap gr(f) = \{0\}$$



La funzione f ha lo sviluppo

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x-x_0), x - x_0 \rangle + o(|x-x_0|^2)$$

per $x \to x_0 = 0$

Dunque in $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Hf(x_0) x, x \rangle + o(|x|^2) \quad \text{per } x \to 0.$$

Scegliamo $p = r e_{n+1} = (0, \dots, 0, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$(x, x_{n+1}) \in \partial B_r(p) \iff |x|^2 + (x_{n+1} - r)^2 = r^2$$

$$\iff (x_{n+1} - r)^2 = r^2 - |x|^2 \iff x_{n+1} = r \pm \sqrt{r^2 - |x|^2}$$

Consideriamo la funzione

$$g(x) = r - \sqrt{r^2 - |x|^2} \qquad , \qquad |x| \le r.$$

Chiaramente $g(0) = 0$. Inoltre

$$g_{x_i}(x) = -\frac{1}{2} \frac{-2x_i}{\sqrt{r^2-|x|^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{r^2-|x|^2}}$$

e quindi $\nabla g(0) = 0$.

Calcoliamo le derivate seconde:

$$g_{x_ix_j}(x) = \frac{\delta_{ij}\sqrt{r^2-|x|^2} - x_i \frac{-x_j}{\sqrt{r^2-|x|^2}}}{r^2-|x|^2}$$

dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i \ne j \end{cases}$. Dunque

$$Hg(0) = \frac{1}{r} I_n \qquad \text{matrice identità } n \times n.$$

Dunque

$$g(x) = g(0) + \langle \nabla g(0), x \rangle + \frac{1}{2} \langle Hg(0)x, x \rangle + o(|x|^2$$

$$= \frac{1}{2r}|x|^2 + o(|x|^2).$$

Confrontiamo f e g:

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \left| Hf(0)x \right| |x| + o(|x|^2)$$

$$\leq \frac{1}{2} \| Hf(0) \| \cdot |x|^2 + o(|x|^2)$$

Se scegliamo $r>0$ tale che $\| Hf(0) \| < \frac{1}{r}$:

$$f(x) - g_r(x) \leq \frac{1}{2}\left(\| Hf(0) \| - \frac{1}{r} \right) |x|^2 + o(|x|^2)$$

$$= |x|^2 \left[\frac{1}{2} \left(\| Hf(0) \| - \frac{1}{r} \right) + o(1) \right]$$

$$< 0 \quad \text{per } 0<|x|<\delta$$

con $\delta>0$ sufficientemente piccolo.

$\square$

ESERCIZIO Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n}) .$$

i) Determinare D.
ii) Provare che $f \in C(D)$.
iii) Provare che $f \in C^1(D)$.

i) Dobbiamo determinare tutti gli $x,y \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n})$$

converga. Se $|x| \geq 1$ oppure $|y| \geq 1$ allora

$$\log(1+x^{2n}+y^{2n}) \geq \log 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi la serie non converge.
Proviamo che per $|x|<1$ e $|y|<1$ la serie converge.
Usando

$$\log(1+t) \leq t \quad \forall t > -1$$

Si trova

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}+y^{2n} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2}$$

e per confronto la serie converge. Di più, per $0<\delta<1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{|x|\leq\delta \\ |y|\leq\delta}} \log(1+x^{2n}+y^{2n}) \leq 2\sum_{n=0}^{\infty} \delta^{2n} = \frac{2}{1-\delta^2} < \infty .$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente sui quadrati $[-\delta,\delta]\times[-\delta,\delta]$, per ogni $0<\delta<1$.

ii) Poiché le funzioni $(x,y)\mapsto \log(1+x^{2n}+y^{2n})$ sono continue e la serie converge uniformemente sui compatti di D, segue che f è continua su D.

iii) Calcoliamo in modo formale la derivata parziale

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n})$$

$$(*) \overset{(?)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \log(1+x^{2n}+y^{2n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\,x^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}} = (**)$$

Se l'ultima serie converge uniformemente per $|x|\leq\delta<1$ allora si può scambiare $\sum$ con $\frac{\partial}{\partial x}$ in $*$) e dunque esiste f_x su D.

Osserviamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\,x^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}} \leq 2\sum_{n=0}^{\infty} n\,x^{2n-1}$$

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{2n-1}$ ha raggio di convergenza $R=1$ e quindi converge uniformemente per $|x| \leq \delta < 1$.

Conclusione per confronto; la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\, x^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}}$$ converge uniformemente per $|x| \leq \delta < 1$ (e per $|y| < 1$).

Dunque il passaggio (?) è lecito.

Inoltre la serie (**) definisce una funzione continua in quanto converge uniformemente.

Di conseguenza;

$$f_x \in C(D).$$

In modo identico si prova che $f_y \in C(D)$.

Quindi $f \in C^1(D)$.

$\square$

ESERCIZIO Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = e^{3x} - 3ye^x + y^3.$$

Determinare i punti critici e i punti di min/max locale e globale.

SOLUZIONE. É certamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Il gradiente è

$$f_x(x,y) = 3e^{3x} - 3ye^x$$

$$f_y(x,y) = -3e^x + 3y^2,$$

e quindi

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} e^{3x} - ye^x = 0 \\ -e^x + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = e^{2x} \\ y^2 = e^x \end{cases} \implies e^{4x} = e^{2x} \iff x = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

c'è un unico punto critico. La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 9e^{3x} - 3ye^x & -3e^x \\ -3e^x & 6y \end{pmatrix}$$

e quindi nel punto $(0,1)$:

$$Hf(0,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Determinante

$$\det Hf(0,1) = 36 - 9 > 0$$

Traccia

$$\operatorname{tr} Hf(0,1) = 12 > 0$$

Deduciamo che $Hf(0,1) > 0$.

Quindi $(0,1)$ è un p.to di minimo locale stretto.

Vediamo se è un p.to di minimo globale:

$$\lim_{y \to -\infty} f(0,y) = \lim_{y \to -\infty} (1 - 3y + y^3) = -\infty,$$

Quindi $(0,1)$ non è un p.to di minimo globale.

$\square$

ESERCIZIO Al variare del parametro $\lambda \geq 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2} y^4 .$$

Determinare i punti critici e i punti di min/max locale e globale di f.

SOLUZIONE É certamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Il gradiente è

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + \lambda y \, , \, \lambda x + 2y^3 \right).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ \lambda x + 2y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} y \\ -\frac{\lambda^2}{2} y + 2y^3 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha la soluzione $y = 0$ (che implica $x = 0$) e poi

$$y^2 = \frac{\lambda^2}{4} \iff y = \pm \frac{\lambda}{2}$$

e quindi

$$x = -\frac{\lambda}{2} y = \mp \frac{\lambda^2}{4} .$$

Conclusione:

- se $\lambda = 0$ c'è un punto critico $(x,y) = (0,0)$
- se $\lambda > 0$ ci sono tre punti critici

$$(0,0) \, , \; \underbrace{\left(-\frac{\lambda^2}{4} \, , \, \frac{\lambda}{2} \right)}_{= P_1} \, , \; \underbrace{\left(\frac{\lambda^2}{4} \, , \, -\frac{\lambda}{2} \right)}_{= P_2}$$

La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 6y^2 \end{bmatrix}$$

Caso $\lambda = 0$. In $(0,0)$:

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 .$$

In effetti $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2} y^4$ e quindi $(0,0)$ è il punto (unico) di min assoluto.

Caso $\lambda > 0$. In $(0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det &= -\lambda^2 < 0 \\ \operatorname{tr} &= 2 > 0 \end{aligned}$$

Gli autovalori hanno segno opposto. Dunque $(0,0)$ non è né punto di min loc né di max loc. In $(0,0)$ c'è un <u>punto di sella</u>.

Nel punto $\left(-\frac{\lambda^2}{4}, \frac{\lambda}{2}\right)$:

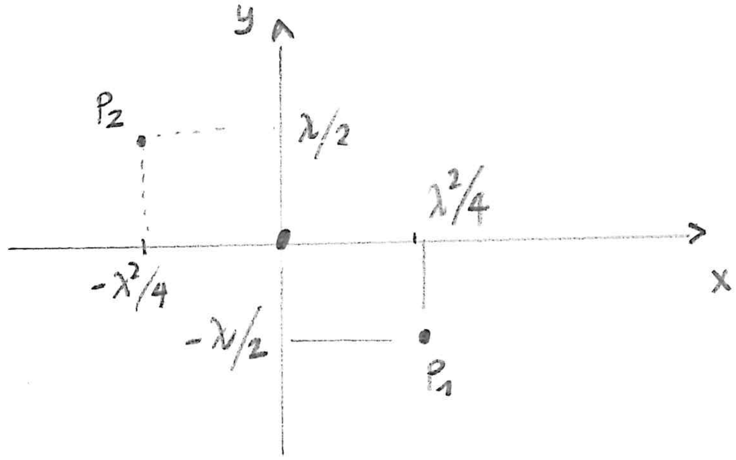
$$Hf\left(-\frac{\lambda^2}{4}, \frac{\lambda}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & \frac{3}{2}\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\det = 3\lambda^2 - \lambda^2 = 2\lambda^2 > 0$$

$$\operatorname{tr} = 2 + \frac{3}{2}\lambda^2 > 0 .$$

Quindi $Hf(-\lambda^2/4, \lambda/2) > 0$ e si ha un punto

di minimo locale stretto.
Analoga situazione nel punto $\left(\frac{\lambda^2}{4}, -\frac{\lambda}{2}\right)$.



In P_1 e P_2, f assume lo stesso valore
(invarianza per $(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$).
Proviamo che P_1 e P_2 sono punti di minimo globale.
Sappiamo che

$$xy \leq \frac{1}{q}x^q + \frac{1}{p}y^p \qquad x,y \geq 0$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e quindi

$$xy \leq \frac{1}{q}\frac{1}{\varepsilon^q}|x|^q + \frac{\varepsilon^p}{p}|y|^p \quad , \; x,y \in \mathbb{R},$$

dove $\varepsilon > 0$ è un parametro da scegliere.
Se $p = 4$ allora $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Avremo
$$f(x,y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2}y^4 \geq x^2 - \lambda \frac{4}{3}\frac{1}{\varepsilon^{4/3}}|x|^{4/3} -$$
$$- \lambda \frac{1}{4}\varepsilon^4 y^4 + \frac{y^4}{2}$$

Riordiniamo:

$$f(x,y) \geq x^2 - \frac{4\lambda}{3\varepsilon^{4/3}}|x|^{4/3} + y^4\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda\varepsilon^4}{4}\right).$$

Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda\varepsilon^4}{4} > 0.$$

Per confronto

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x,y) = \infty.$$

Deduciamo che per ogni $R > 0$, l'insieme

$$K_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad f(x,y) \leq R\}$$

è chiuso e limitato. Inoltre per $R \geq 0$

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = \min_{K_R} f \quad \text{è assunto.}$$

Dunque

f ha p.ti di min globale $\Rightarrow$ sono p.ti critici $\Rightarrow$ sono P_1 e P_2.

$\square$

ESERCIZIO Dato un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x (y^2 + \gamma x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Al variare di γ, calcolare i punti critici di f

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Stabilire se i punti critici trovati sono punti di massimo o di minimo locale / assoluto.

Risoluzione. i) Il gradiente di f è

$$f_x = e^x(y^2+\gamma x) + \gamma e^x = e^x (y^2+\gamma x+\gamma)$$

$$f_y = 2y e^x$$

Il sistema $f_x = f_y = 0$ fornisce $y = 0$ e poi

$$e^x (0+\gamma x + \gamma) = 0 \iff \gamma(x+1) = 0.$$

Se $\gamma = 0$ l'ultima equazione è sempre verificata.
Se $\gamma \neq 0$ l'ultima equazione implica $x = -1$.

Dunque per $\gamma = 0$ c'è una retta di punti critici $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in \mathbb{R}$. Per $\gamma \neq 0$ c'è il solo punto critico $(-1,0) \in \mathbb{R}^2$

ii) Le derivate seconde sono:

$$f_{xx} = e^x (y^2 + \gamma x + 2\gamma)$$

$$f_{xy} = 2y e^x$$

$$f_{yy} = 2 e^x$$

La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = e^x \begin{pmatrix} y^2 + \gamma x + 2\gamma & 2y \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$$

iii) Nel caso $\gamma = 0$ la funzione è $f(x,y) = y^2 e^x$.

I punti critici $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ sono tutti minimi assoluti.

Nel caso $\gamma \neq 0$ c'è il solo punto critico $(-1,0)$.

Abbiamo

$$Hf(-1,0) = e^{-1} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\operatorname{tr} Hf(-1,0) = e^{-1} (\gamma + 2)$$

$$\det Hf(-1,0) = e^{-2}\, 2\gamma$$

Dunque $\quad Hf(-1,0) > 0 \iff \det Hf(-1,0) > 0$ e $\operatorname{tr} Hf(-1,0) \geq 0$.

Le due condizioni forniscono:

$$\begin{cases} \gamma+2 \geq 0 \\ \gamma > 0 \end{cases} \iff \gamma > 0.$$

Dunque per $\gamma > 0$ si ha $Hf(-1,0) > 0$, e quindi $(-1,0)$ è un p.to di minimo locale stretto.

È anche assoluto in quanto

$$f(x,y) \overset{\forall (x,y)}{=} e^x(y^2+\gamma x) \geq e^x \cdot \gamma x = f(x,0)$$

e la funzione $x \mapsto f(x,0)$ ha minimo (per $\gamma>0$) assoluto in $x=-1$.

Se $\gamma < 0$ si ha $\det Hf(-1,0) = 2\gamma e^{-2} < 0$

e quindi $(-1,0)$ è un punto di sella.

$\square$

ESERCIZIO Siano $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ ed $f: K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{2-(x^2+y^2)}.$$

i) Provare che f ammette massimo e minimo su K.
ii) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K.
iii) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Soluzione i) K è chiuso e limitato e quindi è compatto (Teorema di Heine - Borel). K è il disco chiuso unitario. f è continua su K. Per il Teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo su K.

ii) Le derivate parziali di f sono

$$f_x = y + \frac{2x}{[2-(x^2+y^2)]^2},$$

$$f_y = x + \frac{2y}{[2-(x^2+y^2)]^2}.$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = 0$ è dunque

$$\begin{cases} y + \dfrac{2x}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0 \\[2ex] x + \dfrac{2y}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0 \end{cases}$$

Il punto $(x,y) = (0,0)$ risolve il sistema.

Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e sottraendo le due equazioni si trova

$$\frac{2\,(x^2-y^2)}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0$$

che implica $x = \pm y$. Inserendo $x = y$ nella prima equazione si trova

$$x\left(1+\frac{2}{[2-2x^2]^2}\right) = 0$$

che implica $x=0$ e quindi $y=0$.

Inserendo $x=-y$ nella prima equazione si trova:

$$x\left(-1+\frac{2}{[2-2x^2]^2}\right) = 0 .$$

Oltre a $x=0$ si trova l'equazione

$$\frac{1}{2\,[1-x^2]^2} = 1$$

che fornisce $[1-x^2]^2 = \frac{1}{2} \iff 1-x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad (1-x^2 \geq 0)$

$$\iff x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} .$$

Ci sono tre punti critici

$$\pm\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\,,\ -\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \quad \text{e} \quad (0,0)$$

Osserviamo che $f(0,0) = \frac{1}{2}$ mentre

$$f\left(\pm\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}, -\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\right) = -\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= -\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}.$$

Osserviamo che $-1+\sqrt{2} < \frac{1}{2}$.

iii) Studiamo f su $\partial K = \{x^2+y^2=1\}$.

Siano $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ con $\theta \in [0,2\pi)$ e studiamo

$$\phi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta\cos\theta + 1$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\theta) + 1$$

Il massimo è preso per $\sin 2\theta = 1$ ed è $\frac{3}{2}$.

Il minimo è preso per $\sin 2\theta = -1$ ed è $+\frac{1}{2}$.

Concludiamo che

$$\max_K f = \frac{3}{2} \quad e \quad \min_K f = \sqrt{2}-1.$$

$\square$

Esercizio Si consideri l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$ e la funzione $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2+y^2+\alpha xy - \log(x+y)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di f in A;

2) Calcolare tutti i valori di α tali che f ~~non~~ sia convessa su tutto A;

3) Al variare di α, stabilire se i punti critici trovati sono punti di min/max locale/assoluto.

Risoluzione. 1) Le derivate parziali di f sono:

$$f_x = 2x+\alpha y - \frac{1}{x+y},$$

$$f_y = 2y+\alpha x - \frac{1}{x+y}.$$

Risolviamo il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$. Sottraendo le due equazioni troviamo

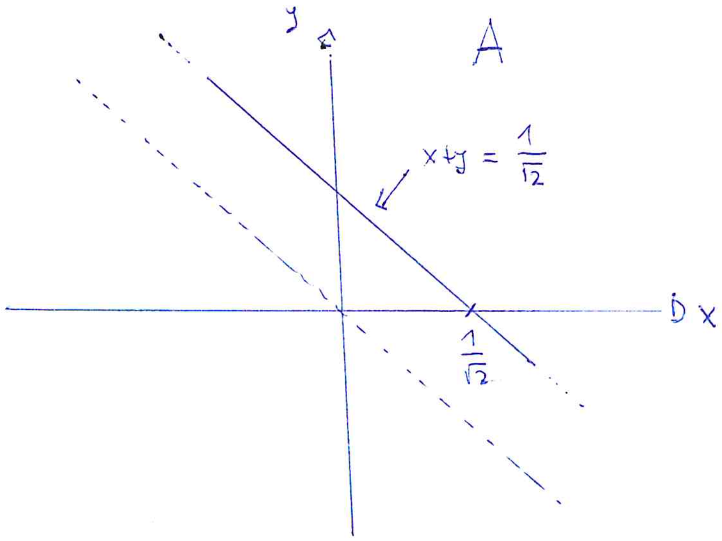
$$0 = f_x - f_y = 2(x-y)+\alpha(y-x) = (x-y)(2-\alpha)$$

Se $\alpha = 2$ questa equazione è vuota. Se $\alpha \neq 2$ si trova $x = y$.

Caso $\alpha = 2$. L'equazione $f_x = 0$ diventa

$$2(x+y) - \frac{1}{x+y} = 0 \iff (x+y)^2 = \frac{1}{2}$$

e quindi $x+y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (infatti $x+y>0$ e si sceglie + nella radice). Abbiamo una retta di punti critici:



Caso $\alpha \neq 2$. In questo caso $x=y$ e l'equazione $f_x = 0$ diventa

$$(2+\alpha)x - \frac{1}{2x} = 0 \iff x^2 = \frac{1}{2(2+\alpha)} \quad (\alpha+2 \neq 0)$$

Se $2+\alpha \leq 0$ non ci sono soluzioni. Se $2+\alpha > 0$ si trova l'unico punto critico

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}\right)$$

2) Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx} = 2 + \frac{1}{(x+y)^2}, \qquad f_{yy} = 2 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \alpha + \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Vediamo subito che la traccia della matrice Hessiana è positiva:

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = f_{xx} + f_{yy} = 4 + \frac{2}{(x+y)^2} > 0 .$$

Calcoliamo il determinante:

$$\det Hf(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$= \left(2 + \frac{1}{(x+y)^2}\right)^2 - \left(\alpha + \frac{1}{(x+y)^2}\right)^2$$

$$= \left(2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2}\right)\left(2-\alpha\right)$$

Sappiamo che f è convessa su A se e solo se $Hf \geq 0$ su A, ovvero se e solo se

$$\begin{cases} \operatorname{tr} Hf \geq 0 \text{ su } A \leftarrow \text{sempre verificata} \\ \det Hf \geq 0 \text{ su } A . \end{cases}$$

Vogliamo vedere per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si verifica

$$(2-\alpha)\left(2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2}\right) \geq 0 \quad \text{su tutto } A.$$

Osserviamo che se $2+\alpha < 0$ allora la quantità

$$2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2} \quad \text{cambia di segno su } A.$$

Quindi f non può essere convessa su A a meno che $2-\alpha = 0$ (nel qual caso $\det Hf \equiv 0$ su A).

Se invece $2+\alpha \geq 0$ allora $2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2} > 0$ su tutto A.

In questo caso:

$$\det Hf \geq 0 \text{ su } A \iff 2-\alpha \geq 0 .$$

Concludiamo che:

$$f \text{ è convessa su tutto } A \iff -2 \leq \alpha \leq 2 .$$

3) Quando $\alpha = 2$ c'è una retta di punti critici ed f è convessa in A. Quindi sono tutti punti di minimo assoluto.

Quando $\alpha > -2$ ed $\alpha \neq 2$ c'è un unico punto critico.

Se è anche $\alpha < 2$ allora f è convessa su tutto A e quindi questo punto critico è un punto (unico) di minimo assoluto stretto.

Rimane da studiare la natura del punto critico P quando $\alpha > 2$.

Nel punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}} \right)$ si ha:

$$\det Hf(P) = \underbrace{(2-\alpha)}_{\wedge \atop 0} \underbrace{\left(2+\alpha + \frac{2}{\left(2 \frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}\right)^2} \right)}_{\vee \atop 0} < 0$$

Quindi P è un punto di sella.

□

ESERCIZIO Dato il parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x (x^2 + \gamma y^2).$$

i) Al variare di γ, calcolare tutti i punti critici di f.

ii) Al variare di γ, stabilire se i punti critici sono punti di max/min locale/globale.

Risoluzione. i) Le derivate parziali di f sono:

$$f_x = e^x (x^2 + \gamma y^2) + e^x \cdot 2x = e^x (x^2 + \gamma y^2 + 2x)$$

$$f_y = e^x \, 2\gamma y.$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ diventa

$$\begin{cases} x^2 + \gamma y^2 + 2x = 0 \\ 2\gamma y = 0 \end{cases}$$

Nel caso $\gamma = 0$ si riduce a $x^2 + 2x = 0$ ovvero $x = 0$ oppure $x = -2$. Si trovano i punti critici

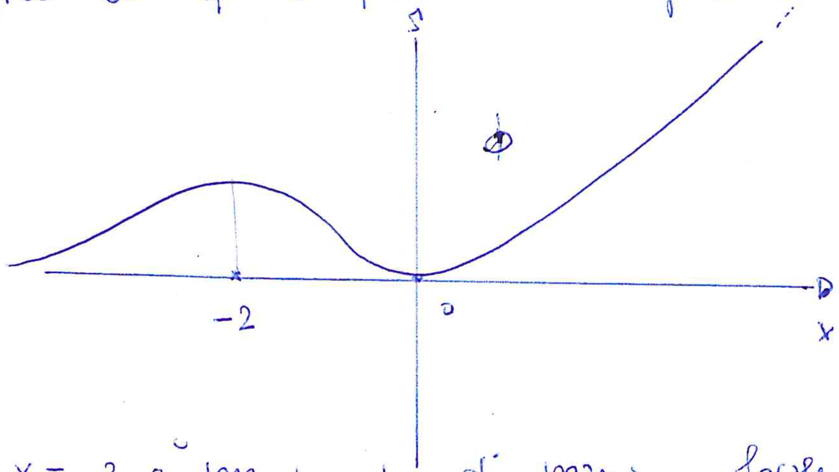
$$(0,y), (-2,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Se $\gamma \neq 0$ la seconda equazione fornisce $y = 0$ e la prima diventa di nuovo $x^2 + 2x = 0$. I punti critici sono $(0,0), (-2,0) \in \mathbb{R}^2$.

ii) Nel caso $\gamma = 0$ la funzione si riduce a

$$f(x,y) = e^x \cdot x^2 = \phi(x) .$$

Il grafico di ϕ è fatto nel seguente modo:



dove $x=-2$ è un punto di massimo locale e $x=0$ è di minimo assoluto. Dunque,

$(0,y)$ punti di min. assoluto di f
$(-2,y)$ punti di max. locale di f $\quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Studiamo il caso $\gamma \neq 0$. La matrice Hessiana di f è:

$$f_{xx} = e^x \left(x^2 + \gamma y^2 + 2x + 2x + 2\right)$$

$$f_{xy} = e^x \left(2\gamma y\right)$$

$$f_{yy} = e^x \left(2\gamma\right)$$

Analisi del punto $(0,0)$:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{tr}\, Hf(0,0) &= 2(\gamma+1) \\ \det Hf(0,0) &= 4\gamma \end{aligned}$$

Dunque:

$\gamma > 0 \Rightarrow Hf(0,0) > 0 \Rightarrow (0,0)$ p.to di minimo locale stretto.

$\gamma < 0 \Rightarrow \det Hf(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0)$ p.to di sella.

In effetti per $\gamma > 0$ si ha $f \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$ e quindi $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ è un (il) punto di minimo assoluto.

Analisi del punto $(-2,0)$:

$$Hf(-2,0) = e^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\gamma \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} Hf(-2,0) = (-2+2\gamma)e^{-2}$$

$$\det Hf(-2,0) = -4\gamma e^{-4}$$

Dunque:

$\gamma > 0 \Rightarrow \det Hf(-2,0) < 0 \Rightarrow (-2,0)$ punto di sella

$\gamma < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \det Hf(-2,0) > 0 \\ \operatorname{tr} Hf(-2,0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-2,0)$ punto di massimo locale.

Siccome $\lim_{x \to +\infty} f(x,y) = +\infty$, il punto $(-2,0)$ non può essere un punto di massimo assoluto.

□

Esercizio Su $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ si consideri $f: K \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{\alpha x},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1) Provare che f assume valore massimo e minimo su K.

2) Al variare di α calcolare tutti i punti critici di f interni a K.

3) Al variare di α calcolare il valore massimo e minimo di f su K.

Risoluzione 1) K è compatto (chiuso e limitato) ed f è continua. I p.ti di max\min esistono per il Teorema di Weierstrass.

2) Derivate parziali:

$$f_x = e^{\alpha x}\left(2x + \alpha(x^2+y^2)\right)$$

$$f_y = e^{\alpha x}\, 2y \,.$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ diventa:

$$\begin{cases} 2x + \alpha(x^2+y^2) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$ c'è il solo punto critico $(0,0)$.

Se $\alpha \neq 0$ risolviamo $x(2+\alpha x) = 0 \iff x = 0$ op. $x = -\frac{2}{\alpha}$.

Ci sono due punti critici: $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{\alpha}, 0\right)$.

Il primo è sempre interno. Il secondo è interno se e solo se $\frac{4}{\alpha^2} < 1 \iff \alpha^2 > 4 \iff \alpha \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

3) Osserviamo che $f \geq 0$ ed $f(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$. Quindi $(0,0)$ è il (unico) punto di minimo assoluto.

Deduciamo che per $|\alpha| \leq 2$ il punto di massimo assoluto di f su K deve stare in ∂K.

Parametrizziamo ∂K in questo modo: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.
Consideriamo

$$\phi(t) = f(\gamma(t)) = e^{\alpha \cos t} \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

Il massimo è preso per $\cos t = 1$ se $\alpha > 0$ e per $\cos t = -1$ se $\alpha < 0$. Deduciamo che

$$\max_{\partial K} f = e^{|\alpha|} .$$

Nel punto critico $\left(-\frac{2}{\alpha}, 0\right)$ la funzione f vale:

$$f\left(-\frac{2}{\alpha}, 0\right) = \frac{4}{\alpha^2} e^{-2}$$

Studiamo il caso $|\alpha| > 2$ (punto critico interno).
In questo caso:

$$\frac{4}{\alpha^2} \frac{1}{e^2} < 1 < e^{|\alpha|}$$

Dunque il massimo è assunto $(\forall \alpha)$ sulla frontiera

Risposta: ~~max~~ $\min_K f = 0$ e $\max_K f = e^{|\alpha|}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x + y - \sqrt{2}\,\log(1+x^2+y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$.

ii) Verificare che f ristretta all'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ è una funzione concava.

iii) Provare che f assume valore massimo e minimo su K.

iv) Calcolare i valori massimo e minimo di f su K.

Risoluzione. i) Le derivate parziali di f sono

$$f_x = 1 - \sqrt{2}\,\frac{2x}{1+x^2+y^2},$$

$$f_y = 1 - \sqrt{2}\,\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$.

Sottraendo le due equazioni si trova

$$\frac{2\sqrt{2}\,(x-y)}{1+x^2+y^2} = 0 \iff x = y.$$

Sostituendo $y = x$ in una delle due equazioni si ottiene

$$1 - 2\sqrt{2}\,\frac{x}{1+2x^2} = 0 \iff 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

$$\iff (\sqrt{2}x - 1)^2 = 0$$

$$\iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dunque c'è un unico punto critico: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Osserviamo che si trova sulla circonferenza $x^2+y^2=1$.

ii) Calcoliamo la matrice Hessiana di f:

$$f_{xx} = -2\sqrt{2}\,\frac{1+x^2+y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= -2\sqrt{2}\,\frac{1+y^2-x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = -2\sqrt{2}\,\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = -2\sqrt{2}\,\frac{1+x^2+y^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= -2\sqrt{2}\,\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yx} = f_{xy}$$

Dunque

$$tr\left(Hf(x,y)\right) = f_{xx} + f_{yy} = \frac{-4\sqrt{2}}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\det\left(Hf(x,y)\right) = f_{xx}\, f_{yy} - (f_{xy})^2 =$$

$$= 8\,\frac{1-(x^2-y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4} - 32\,\frac{x^2\,y^2}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{8}{(1+x^2+y^2)^4}\left[1-x^4+2x^2y^2-y^4-4x^2y^2\right]$$

$$= \frac{8}{(1+x^2+y^2)^4}\left[1-(x^4+2x^2y^2+y^4)\right]$$

$$= 8\,\frac{1-(x^2+y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4}$$

Dunque: $tr\left(Hf(x,y)\right) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\det\left(Hf(x,y)\right) \geq 0 \iff (x,y) \in K$

Dunque f è concava in K.

iii) K è chiuso e limitato e dunque è compatto (Heine - Borel). f è continua su K e dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo su K.

iv) Dal punto i) sappiamo che f non ha punti critici interni a K. Deduciamo che f deve assumere il minimo e il massimo sulla frontiera.

La restrizione di f su ∂K è:

$$\phi(\vartheta) = f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \cos\vartheta + \sin\vartheta - \sqrt{2}\log 2$$

con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. La sua derivata è

$$\phi'(\vartheta) = -\sin\vartheta + \cos\vartheta$$

si annulla se e solo se $\operatorname{tg}\vartheta = 1 \iff \vartheta = \frac{\pi}{4}$ o $\vartheta = \frac{5}{4}\vartheta$.

Ora si ha

$$\phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\log 2 = \sqrt{2}\,(1-\log 2)$$

$$\phi\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\log 2 = -\sqrt{2}\,(1+\log 2)$$

Risposte:

Valore max di f su K è: $\sqrt{2}\,(1-\log 2)$ assunto in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Valore min di f su K : $-\sqrt{2}\,(1+\log 2)$ assunto in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

□

ESERCIZIO Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} + \alpha xy$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare l'insieme $A_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ su cui f è convessa.

2) Stabilire se, per $\alpha \geq 0$ f possiede punti critici, pti di minimo (o massimo) locale o assoluto.

Risoluzione: 1) Gradiente di f

$$\nabla f(x,y) = \left(-e^{-(x+y)} + \alpha y , -e^{-(x+y)} + \alpha x \right)$$

Matrice Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-(x+y)} & e^{-(x+y)} + \alpha \\ e^{-(x+y)} + \alpha & e^{-(x+y)} \end{pmatrix}$$

Traccia:

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = 2e^{-(x+y)} > 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^2.$$

Determinante

$$\det Hf(x,y) = -\left(\alpha^2 + 2\alpha e^{-(x+y)}\right)$$

La funzione f è convessa precisamente sull'insieme dove $Hf(x,y) \geq 0$, ovvero dove $\det Hf(x,y) \geq 0$ (perché $\operatorname{tr} > 0$).

Dobbiamo studiare

$$\circledast \qquad -\left(\alpha^2 + 2\alpha\, e^{-(x+y)}\right) \geq 0 .$$

Se $\alpha = 0$ è verificata per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Per $\alpha > 0$ si ha $-\alpha^2 - 2\alpha\, e^{-(x+y)} < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Quindi $A_\alpha = \emptyset$ per $\alpha > 0$.

Per $\alpha < 0$, la $\circledast$ equivale a

$$\alpha + 2e^{-(x+y)} \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{-(x+y)} \geq -\frac{\alpha}{2} \qquad (\leftarrow \text{positivo})$$

$$\Updownarrow$$

$$-(x+y) \geq \log\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$x+y \leq \log\left(-\frac{2}{\alpha}\right)$$

Conclusione:

$$A_\alpha = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha > 0 \\ \mathbb{R}^2 & \text{se } \alpha = 0 \\ \{x+y \le \log(-\frac{2}{\alpha})\} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

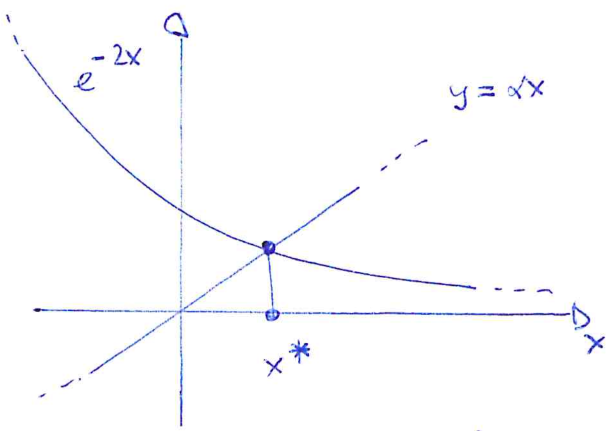
2) I punti critici di f sono dati da

$$\begin{cases} -e^{-(x+y)} + \alpha y = 0 \\ -e^{-(x+y)} + \alpha x = 0 \end{cases}$$

Quando $\alpha = 0$ non ci sono soluzioni

Quando $\alpha > 0$ si deduce che $x = y$

e quindi deve essere $\alpha x = e^{-2x}$



Per via grafica si vede che c'è un'unica soluzione. Quindi f ha un unico punto critico (per $\alpha > 0$). Non può essere un max\min locale assoluto perché $\det Hf < 0$ su $\mathbb{R}^2$ quando $\alpha > 0$. □

ESERCIZIO Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x+y} + x^4 + y^4.$$

Provare che f ha un unico punto critico e che si tratta di un punto di minimo assoluto.

Soluzione. È $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x+y} + 4x^3 , e^{x+y} + 4y^3 \right)$$

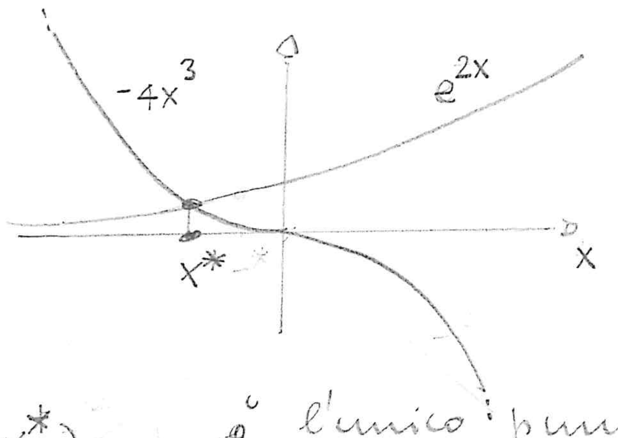
Dunque

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} e^{x+y} + 4x^3 = 0 \\ e^{x+y} + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si trova $x^3 = y^3 \iff x = y$.
Sostituendolo in una delle due si trova

$$e^{2x} + 4x^3 = 0 \iff e^{2x} = -4x^3$$

L'equazione $e^{2x} = -4x^3$ ha una soluzione unica $x^* < 0$



Quindi (x^*, x^*) è l'unico punto critico.

La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + 8x^2 & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} + 8y^2 \end{pmatrix}$$

Traccia:

$$tr(Hf(x,y)) = 8(x^2+y^2)+2e^{x+y} > 0$$

Determinante:

$$\det(Hf(x,y)) = (e^{x+y}+8x^2)(e^{x+y}+8y^2) - (e^{x+y})^2 =$$

$$= e^{x+y}\,8\,(x^2+y^2) + 64x^2y^2 \geq 0$$

Quindi $Hf(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ovvero f è convessa.

Quindi il punto critico (unico) è l'unico punto di minimo assoluto.

$\square$

Esercizio. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

1) Provare che il Problema di Cauchy ha un'unica soluzione locale, che è crescente e concava. Tratteggiarne il grafico.

2) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$ e che $a > -\frac{1}{2}$.

3) Provare che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{\log x} = 1$$

4) Verificare che $a = \log 2 - 1$.

Soluzione. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y > -x\}$. Allora $(0,1) \in \Omega$ ed $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}, \qquad (x,y) \in \Omega,$$

è di classe C^∞ e quindi localmente di Lipschitz. Per il Teorema di esistenza e unicità locale esistono $\delta > 0$ ed $y \in C^1(-\delta, \delta)$ soluzione del Problema di Cauchy. Siccome $f > 0$ in Ω, la soluzione y è strettamente crescente.

In effetti si ha $y \in C^{\infty}(-\delta,\delta)$ e inoltre

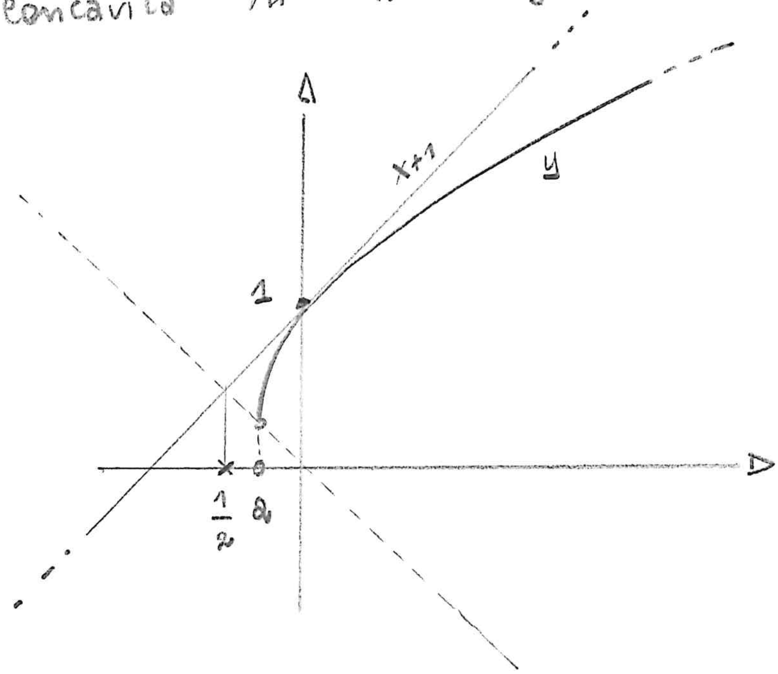
$$y'' = -\frac{1+y'}{(x+y)^2} = -\frac{1+\frac{1}{x+y}}{(x+y)^2} < 0$$

e quindi y è concava.

La retta tangente al grafico di y nel punto $x=0$ è

$$\varphi(x) = x+1,$$

e per la concavità si ha $y(x) \leq x+1$, $\forall x \in (a,b)$.



Dalla stima $y(x) \leq x+1$ e dal criterio di Prolungamento deduciamo che $b = \infty$. Dal disegno vediamo che $a > -\frac{1}{2}$.

Chiaramente $\lim_{x \to a^-} y'(x) = +\infty$.

Per $x \geq 0$ si ha $y(x) \geq 1$ e quindi

$$y'(x) = \frac{1}{x + y(x)} \leq \frac{1}{x+1}, \qquad x \geq 0.$$

Integrando

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t)\,dt$$

$$\leq 1 + \int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt = 1 + \log(1+x)$$

In modo analogo, usando $y(x) \leq x+1$:

$$y(x) \geq 1 + \int_0^x \frac{1}{2t+1}\,dt = 1 + \left[\frac{1}{2}\log(2t+1)\right]_{t=0}^{t=x}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2}\log(2x+1).$$

Deduciamo che

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty.$$

Per il Teorema di Hôpital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{\log x} = \lim_{x \to \infty} \frac{y'(x)}{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{y(x)+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{y(x)}{x}+1} = 1$$

Infatti

$$0 < \frac{y(x)}{x} \leq \frac{1+\log(x+1)}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 .$$

Ora calcoliamo la soluzione in un modo ragionevolmente esplicito. Sia $z(x) = x + y(x)$. Allora $z' = 1+y'$ e z risolve il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = 1 + \frac{1}{z} \\ z(0) = 1 . \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili: $\frac{zz'}{1+z} = 1$

Integriamo

$$x = \int_0^x \frac{zz'}{1+z}\, dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) z'\, dt =$$

$$= \Big[z - \log(1+z) \Big]_{t=0}^{t=x} = z(x) - \log(1+z(x)) - z(0) + \log(1+z(0))$$

$$= z - \log(1+z) - 1 + \log 2 ,$$

Tornando alla soluzione y: $x = x+y - \log(1+x+y) - 1 + \log 2$

Ovvero:

$$y = \log(1+x+y) + 1 - \log 2$$

da cui

$$x = 2e^{y-1} - y - 1 = \psi(y) .$$

Abbiamo calcolato esplicitamente la funzione inversa della soluzione. Osserviamo che

$$\psi'(y) = 2e^{y-1} - 1$$

e quindi $\psi'(y) = 0 \iff e^{y-1} = \frac{1}{2} \iff y = 1 + \log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Il valore corrispondente della x è

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(1 + \log\left(\frac{1}{2}\right)\right) - 1 = \log 2 - 1.$$

ESERCIZIO Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ y(1) = 1 . \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione $y \in C^1(0,\infty)$ definita su tutto $(0,\infty)$.

ii) Disegnare un grafico della soluzione (approssimativo).

SOLUZIONE La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$ è definita per $xy \neq 0$. Tenuto conto del dato iniziale consideriamo

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0 \text{ e } y>0 \}$$

e avremo $f \in C^\infty(\Omega)$. In particolare, f è localmente di Lipschitz in y in Ω. Dunque esiste $\delta>0$ tale che il problema ha una soluzione locale unica

$$y \in C^1(-\delta+1, 1+\delta).$$

Dobbiamo provare che y si estende su $(0,\infty)$.

Studiamo il segno della funzione f. Abbiamo

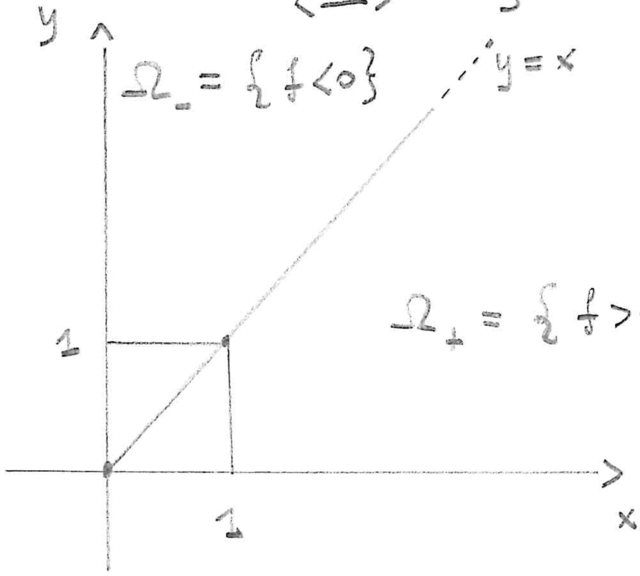
$$f(x,y) = 0 \iff \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\iff y = x$$

Inoltre, nella regione Ω si ha

$$f(x,y) > 0 \iff \frac{1}{y} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\iff \frac{1}{y} > \frac{1}{x}$$

$$\iff y < x$$



Nella regione Ω_+ la soluzione y è crescente.

Nella regione Ω_- la soluzione y è decrescente.

Dunque $y(x) \geq 1$ per ogni x nell'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Sia $K \subset (0,\infty)$ un compatto. Se $x \in K$ e $y \geq 1$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$$

$$\leq 1 + \max_{x \in K} \frac{1}{x} < \infty$$

Per il Criterio di esistenza globale la soluzione massimale è definita su tutto $(0, \infty)$.

Proviamo che $y(x) < x$ per ogni $x > 1$. Per assurdo sia $\bar{x} > 1$ un punto (il minimo punto) tale che $y(\bar{x}) = \bar{x}$. Allora $y(x) < x$ per ogni $1 < x < \bar{x}$.

Siccome

$$y(\bar{x}) = \bar{x} \quad \Rightarrow \quad y'(\bar{x}) = 0$$

posto $\phi(x) = y(x) - x$ avremo $\phi'(\bar{x}) = -1$ e $\phi(\bar{x}) = 0$ e quindi $\phi(x) > 0$ per $\bar{x} - \varepsilon < x < \bar{x}$ per qualche $\varepsilon > 0$, ovvero $y(x) > x$ per $\bar{x} - \varepsilon < x < \bar{x}$, Assurdo.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{-y'}{y^2} + \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

Dunque:

$$y'' > 0 \iff \frac{1}{x^2} > \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{y^2} \iff y^2 > x^2 \, \frac{x-y}{xy}$$

$$\iff y^3 > x^2 - xy \iff x^2 - xy - y^3 < 0$$

ovvero

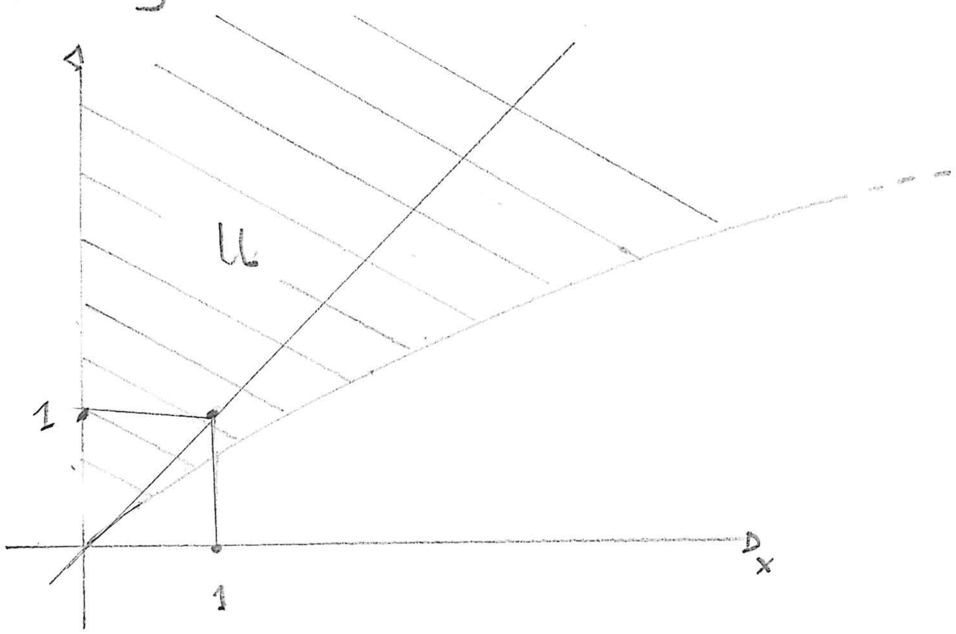
$$\frac{y - \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2} < x < \frac{y + \sqrt{y^2 + 4y^3}}{2}$$

superflua

Nella regione

$$\mathcal{U} = \{ (x,y) \in \Omega : \quad x < \frac{1}{2} \left(y + \sqrt{y^2 + 4y^3} \right) \}$$

La soluzione y è convessa:



Vediamo se y esce dalla regione $\mathcal{U}$. Esiste, finito o $+\infty$,

$$L = \lim_{x \to \infty} y(x)$$

e di conseguenza

$$\lim_{x \to \infty} y'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{L}$$

Deduciamo che deve essere $L = \infty$. Confrontiamo $y(x)^{3/2}$ con x per $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)^{3/2}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{2} y(x)^{1/2} y'(x)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2} y(x)^{1/2} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{3}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)^{1/2}}{x}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{y'(x)}{y(x)^{1/2}} = 0 .$$

Qui, $y = y(x)$.

Quindi $$\frac{y + \sqrt{y^2+4y^3}}{2} < x \quad \text{per} \quad x > M ,$$

per $M > 1$ opportunamente grande.

Proviamo che $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \infty$. Infatti

$$y(x) = y(1) + \int_1^x y'(t)\,dt$$
$$= 1 + \int_1^x \left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{t} \right) dt$$
$$= 1 - \int_x^1 \left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{t} \right) dt$$
$$= 1 - \int_x^1 \frac{1}{y(t)}\,dt + \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt .$$

Se fosse $\lim_{x\to 0^+} y(x) = L < \infty$ si avrebbe un assurdo.

Infatti $\frac{1}{t}$ non è integrabile vicino $t = 0$.

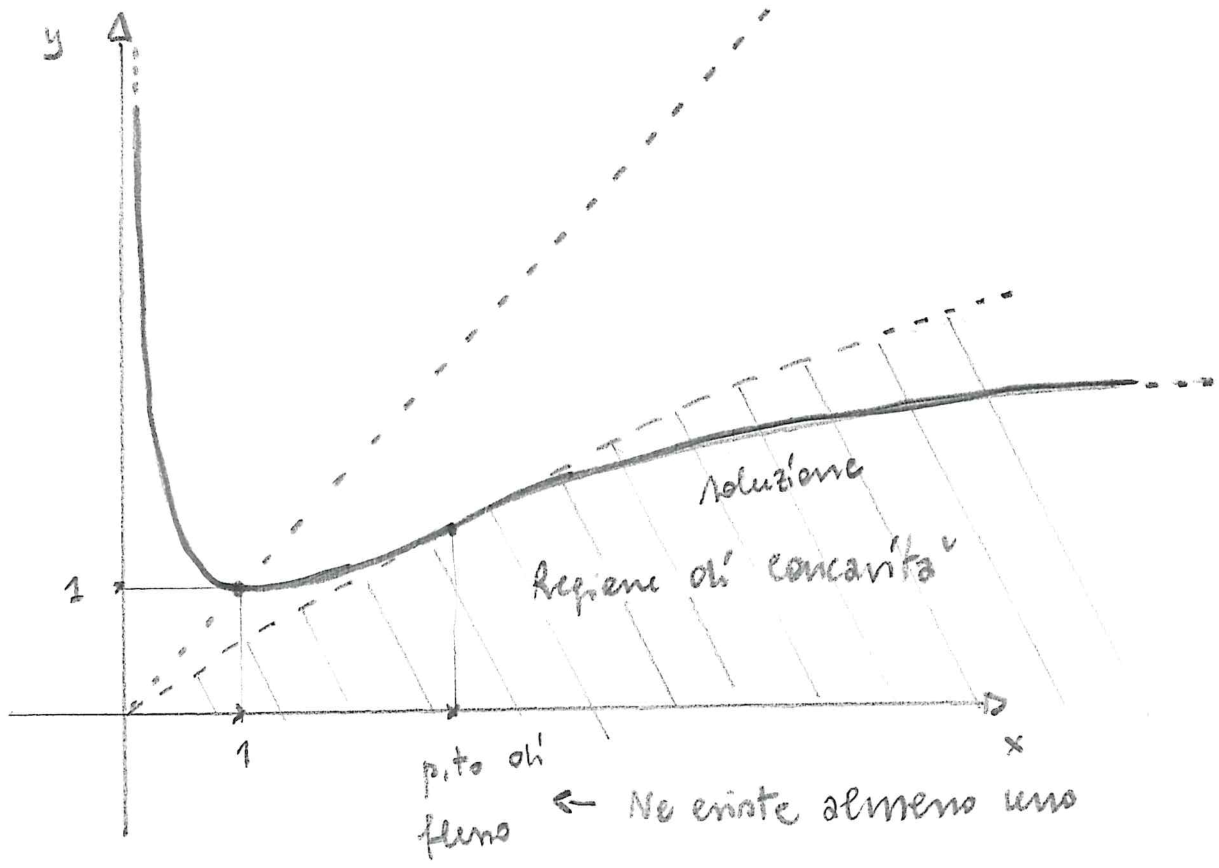


Grafico Approssimativo della soluzione.

ESERCIZIO Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y^3 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

i) Provare che esiste un'unica soluzione locale;
ii) Provare che la soluzione è definita per $x \in \mathbb{R}$;
iii) Provare che la soluzione è pari;
iv) Provare che la soluzione è periodica.

SOLUZIONE i) Poniamo $z = y'$, di modo che $z' = y'' = -2y^3$.
Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -2y^3 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}.$$

Siccome $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(y,z) = (z, -2y^3)$ è di classe C^∞ allora è localmente di Lipschitz in (y,z).
Dunque esiste un'unica soluzione locale.

ii) Moltiplichiamo $y'' + 2y^3 = 0$ per y';

$$y''y' + 2y^3y' = 0$$

ovvero
$$\left(\frac{1}{2}(y')^2\right)' + 2\left(\frac{1}{4}y^4\right)' = 0 .$$

Deduciamo che $(y')^2 + y^4 = \text{costante} = (y'(0))^2 + (y(0))^4 = 1$

Di conseguenza
$$|y(x)| \leq 1$$
$$|z(x)| = |y'(x)| \leq 1 .$$
$\forall x \in$ dominio della soluzione

Per il criterio di prolungamento la soluzione (y,z) è definita su tutto $\mathbb{R}$.

iii) Sia $\eta(x) = y(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ovviamente
$$\eta(0) = y(0) = 1 \quad e \quad \eta'(0) = -y'(0) = 0$$
e inoltre $\eta''(x) = y''(-x)$. Dunque $\eta'' + 2\eta^3 = 0$ su $\mathbb{R}$. Per unicità della soluzione $\eta = y$, e quindi y è pari.

iv) Nella regione del piano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$ la soluzione y è strettamente concava.
Quindi esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{x} > 0$, tale che
$$y(x) > 0 \text{ per } -\bar{x} < x < \bar{x} \quad e$$
$$y(\pm\bar{x}) = 0 .$$
Inoltre $y'(\bar{x}) = -1$. Questo segue da $y'^2 + y^4 = 1$.

La funzione

$$w(x) = -y(x-2\bar{x}) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

verifica:

$$w(\bar{x}) = -y(-\bar{x}) = 0$$

$$w'(\bar{x}) = -y'(-\bar{x}) = -1 .$$

Per unicità: $y = w$ e quindi

$$y(x) = -y(x-2\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

da cui

$$y(x) = -y(x-2\bar{x}) = +y(x-4\bar{x})$$

per $x \in \mathbb{R}$, e quindi y è $4\bar{x}$ periodica. $\square$

Esercizio. Sia $\varrho \in C([0,\infty))$ una funzione tale che

$$\int_0^\infty |\varrho(x)|\, dx < \infty,$$

e sia $y \in C^2([0,\infty))$ la soluzione di

$$\begin{cases} y'' + y = \varrho(x) y, & x \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Provare che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|y(x)| \leq M$ $\forall x \geq 0$.

Soluzione. Moltiplichiamo l'equazione differenziale per y':

$$y''y' + yy' = \varrho(x)\, yy', \quad x \geq 0,$$

ovvero

$$\left[(y')^2\right]' + \left[y^2\right]' = \varrho(x)\, 2yy'.$$

Integrando su $[0,x]$

$$(*) \qquad y'(x)^2 + y(x)^2 = 1 + \int_0^x \varrho(t)\, 2yy'\, dt$$
$$\leq 1 + \int_0^x |\varrho(t)| \left(y(t)^2 + y'(t)^2\right) dt$$

e quindi la funzione $\varphi(x) = y'(x)^2 + y(x)^2$, $x \geq 0$, verifica

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 + \int_0^x |\varrho(t)|\, \varphi(t)\, dt := \Phi(x).$$

La funzione $\bar{\Phi}$ è in C^1 e inoltre

$$\bar{\Phi}'(x) = |g(x)|\,\varphi(x) \leq |g(x)|\,\bar{\Phi}(x), \quad x \geq 0.$$

Dividendo per $\bar{\Phi}(x) \geq 1$ e integrando su $[0,x]$ si trova

$$\log\left(\frac{\bar{\Phi}(x)}{\bar{\Phi}(0)}\right) \leq \int_0^x |g(t)|\,dt, \quad x \geq 0,$$

e siccome $\bar{\Phi}(0) = 1$ si ottiene

$$\bar{\Phi}(x) \leq e^{\int_0^x |g(t)|\,dt} \leq e^{\int_0^\infty |g(t)|\,dt} := M.$$

Poichè $\varphi(x) \leq \bar{\Phi}(x)$ si trova

$$y'(x)^2 + y(x)^2 = \varphi(x) \leq M < \infty$$

per ogni $x \geq 0$ $\square$

ESERCIZIO. Verificare che la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -(x+1)y^2 + x \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione La funzione $f(x,y) = -(x+1)y^2 + x$ è in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi c'è esistenza e unicità locale. Il criterio di esistenza globale, tuttavia, non si applica in quanto f cresce in modo quadratico in y.

Studiamo $f(x,y) > 0$ ovvero

$$-(x+1)y^2 + x > 0 \iff (x+1)y^2 < x$$

Se $x+1>0$ si ottiene

$$y^2 < \frac{x}{x+1}.$$

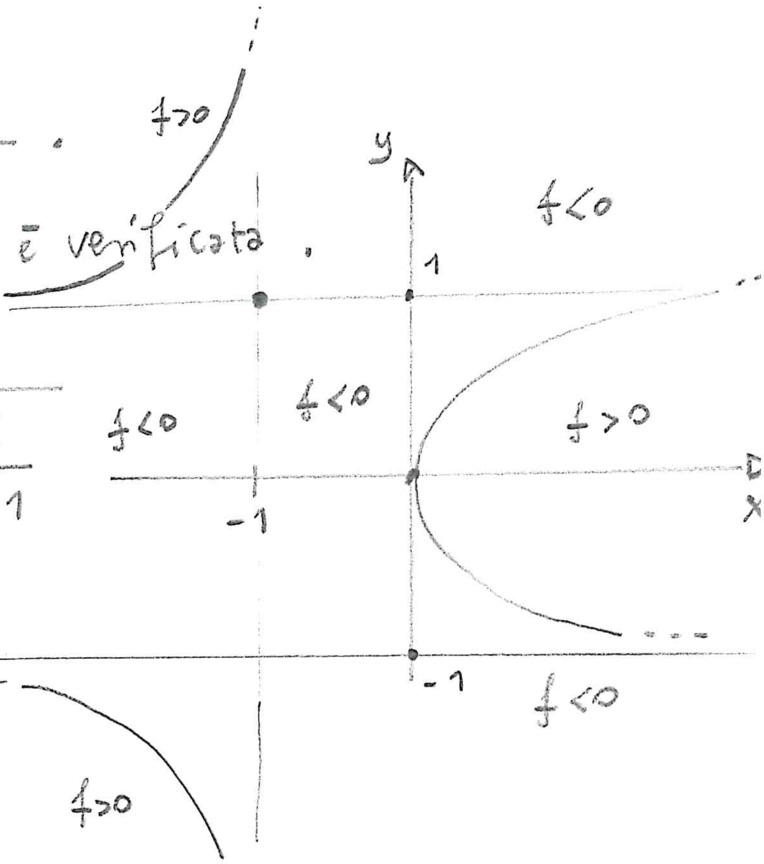
Se $-1 < x \leq 0$ la diseq. non è verificata.

Se $x > 0$ si trova

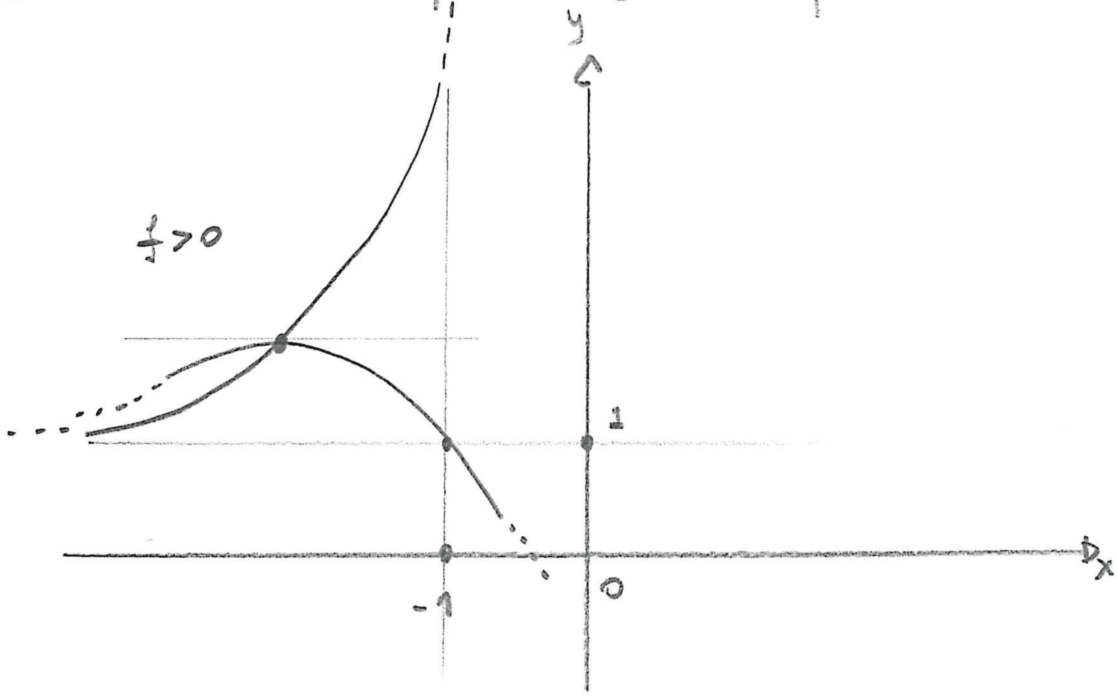
$$|y| < \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Se $x+1<0$ si trova

$$y^2 > \frac{x}{x+1}$$

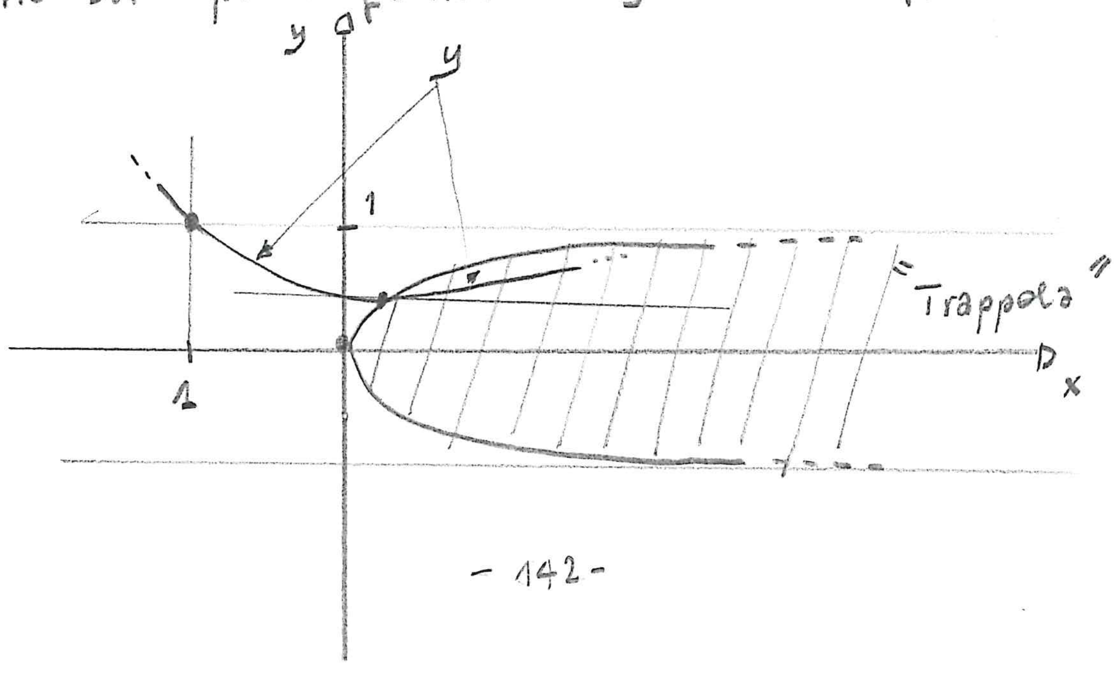


La soluzione y decresce intorno $x=-1$.
Inoltre entra nella regione $\{f>0\}$ per $x<-1$:



Dalla regione $\{f>0\} \cap \{x<-1 \text{ e } y>0\}$ la soluzione y non può uscire ed è ivi crescente. Quindi rimane limitata e per il primo criterio di prolungamento y è definita su $(-\infty,-1]$.

Se y raggiunge la regione $\{f>0\} \cap \{x \geq 0\}$ rimane "intrappolata" in questa regione. Per il criterio di prolungamento y sarà definita su $[-1,\infty)$:



Stimiamo y dal basso, se $-1 \leq x \leq 0$:

$$y'(x) = -(x+1)y^2 + x \geq -(0+1)y^2 - 1$$

ovvero $y'(x) \geq -(1+y^2)$. Integrando su $[-1, x]$:

$$\int_{-1}^{x} \frac{y'}{1+y^2}\,dt \geq -\int_{-1}^{x} dt = -(x+1)$$

e quindi

$$\operatorname{arctg}(y(x)) - \operatorname{arctg}(y(-1)) \geq -(x+1)$$

ovvero

$$\operatorname{arctg}(y(x)) \geq \frac{\pi}{4} - (x+1)$$

e per $x = 0$: $\operatorname{arctg}(y(0)) \geq \frac{\pi}{4} - 1$.

La stima

$$y(0) \geq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)$$

non basta per concludere, perché $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) < 0$.

Tuttavia abbiamo scoperto che su $[-1, 0]$ si ha $|y(x)| \leq 1$. Quindi:

$$y'(x) = -(x+1)y^2 + x \geq -(x+1) + x = -1$$

e integrando

$$y(0) - y(-1) = \int_{-1}^{0} y'(x)\,dx \geq \int_{-1}^{0} -1\,dx = -1$$

da cui si deduce che $y(0) \geq 0$ e si conclude. $\square$

ESERCIZIO Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che:

1) Gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le \lambda\}$ sono compatti $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2) $\nabla f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Si consideri il Problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)), & t \ge 0, \\ \gamma(0) = x_0 \end{cases}$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

i) Il Problema ha una soluzione unica $\gamma_{x_0} \in C^2([0,\infty))$;

ii) $\lim_{t \to \infty} \gamma_{x_0}(t) = 0$.

SOLUZIONE i) La funzione $F(x) = -\nabla f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, è di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ e quindi F è localmente di Lipschitz.

Il Problema $(*)$ ha dunque soluzione locale unica $\gamma \in C^1([0,\delta))$ per qualche $\delta > 0$.

Consideriamo la funzione $\theta(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0,\delta)$.
La sua derivata è

$$\dot{\theta}(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

$$= -|\nabla f(\gamma(t))|^2 \le 0$$

Di conseguenza θ è decrescente:

$$f(\gamma(t)) = \theta(t) \leq \theta(0) = f(\gamma(0)) = f(x_0) := \lambda .$$

Ovvero $\gamma(t) \in \{ f \leq \lambda \}$, compatto, $\forall t \in (0, \delta)$.
Per il Criterio di Prolungamento γ è definita per ogni $t \geq 0$.

ii) Osserviamo che f ammette minimo assoluto in quanto è continua con sottolivelli compatti.
Siccome $x = 0$ è l'unico punto critico, segue che $x = 0$ è l'unico punto di minimo (assoluto).
Sia $m = f(0) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Per monotonia esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{t \to \infty} \theta(t) = \lim_{t \to \infty} f(\gamma(t)) = L .$$

Deve essere $L \geq m$. Proviamo che $L = m$.
Sia per assurdo $L > m$. L'insieme

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ L \leq f(x) \leq \lambda \}$$

è compatto e $\nabla f(x) \neq 0$ per ogni $x \in K$.
Per continuità $|\nabla f|$ assume minimo su K.

Sia $\mu = \min_{x \in K} |\nabla f(x)| > 0$. Di conseguenza

$$\dot\theta(t) \leq -\mu < 0 \qquad \forall t \geq 0$$

e questo implica che $\lim_{t \to \infty} \theta(t) = -\infty$, Assurdo.

Questo prova che $L = m$.

Proviamo ora che $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$, ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T > 0 \ \forall t > T \text{ si ha } |\gamma(t)| < \varepsilon .$$

Per assurdo esistano $\varepsilon > 0$ e una successione $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tale che

$$t_j \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty \quad \text{e} \quad |\gamma(t_j)| \geq \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

L'insieme

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n ; |x| \geq \varepsilon \text{ e } f(x) \leq \lambda \}$$

è compatto e inoltre esiste

$$\nu = \min_{x \in H} f(x) > m = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Siccome $\theta(t_j) = f(\gamma(t_j)) \geq \nu > m \quad \forall j \in \mathbb{N}$ si contraddice il fatto che $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = m$.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log y - x \\ y(1) = e \end{cases},$$

i) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

ii) Studiare la monotonia della soluzione.

iii) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale.
Provare che $a = -\infty$ e che $b < \infty$

iv) Studiare la convessità della soluzione.

i) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$. La funzione $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \log y - x$$

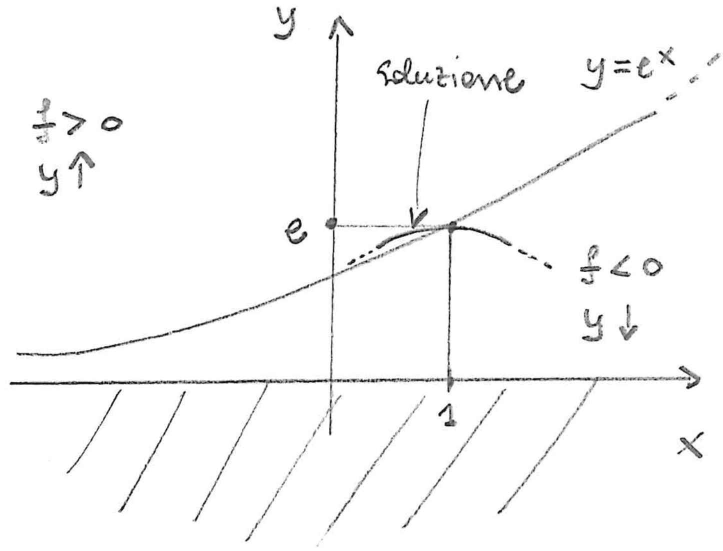
è di classe $C^\infty(A)$, dunque è localmente di Lipschitz in A. Per il Teorema di esistenza e unicità locale esiste, unica, la soluzione del problema. Deve essere $y(x) > 0$ $\forall x \in$ Dominio.

ii) Studiamo la disequazione

$$f(x,y) > 0 \iff \log y > x \iff y > e^x$$

Dunque y cresce dove $y > e^x$, y decresce dove $y < e^x$.

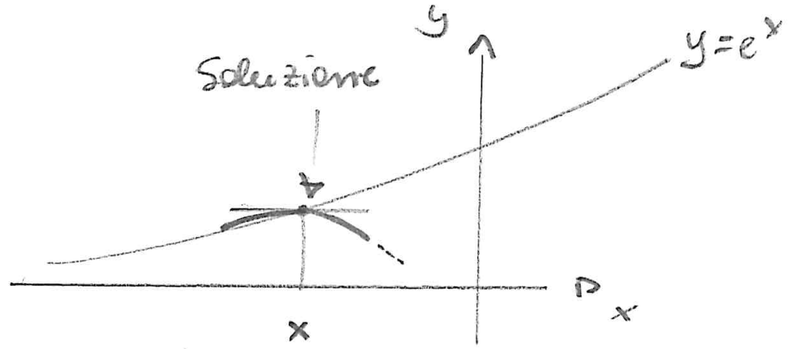
Il dato iniziale è sulla curva $y = e^x$, dove $f = 0$ (ovvero $y' = 0$).



Dunque la soluzione decresce per $x>1$ mentre cresce per $x<1$.

iii) Affermo che $y(x) > e^x \quad \forall x < 1$.

Se per assurdo esistesse $\bar{x} < 1$ tale che $y(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$ allora si avrebbe $y'(\bar{x}) = 0$ e la situazione sarebbe:



Avremmo $y(x) < e^x \quad \forall x > \bar{x}$. Questo non è possibile.

Conclusione

$$e^x < y(x) < e \qquad \forall x \in (a, 1).$$

Dal criterio di prolungamento deduciamo che $a = -\infty$

Per $x \geq 1$ abbiamo $y(x) \leq e$ e quindi

$$y'(x) = \log y(x) - x \leq 1 - x$$

Integrando su $[1, x]$:

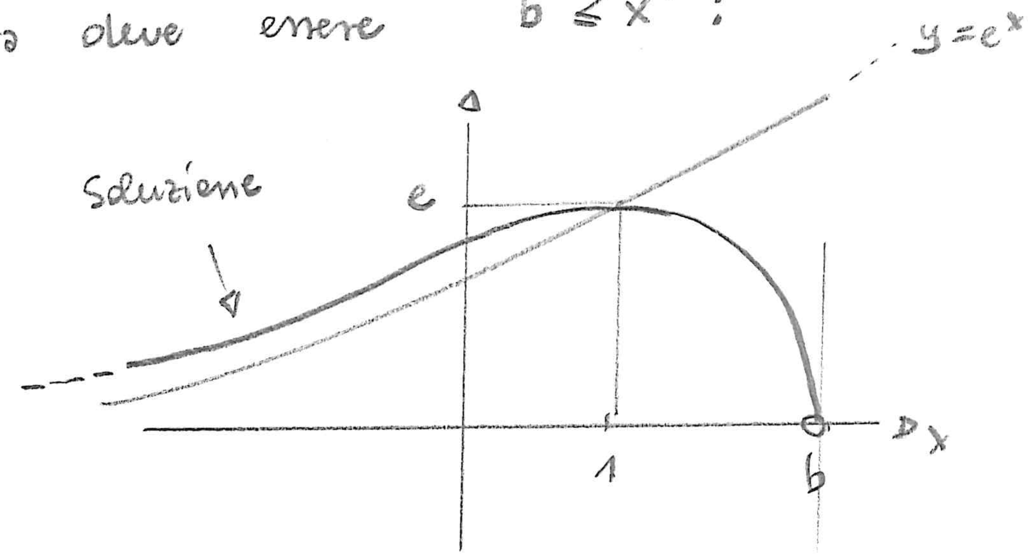
$$\underbrace{y(x) - y(1)}_{y(1)=e} = \int_1^x y'(t)\,dt \leq \int_1^x (1-t)\,dt = x - 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

ovvero

$$y(x) \leq e - \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} = \varphi(x),$$

Sia $x^* > 1$ il punto tale che $\varphi(x^*) = 0$.

Allora deve essere $b \leq x^*$:



Deve essere $\lim_{x \to b^-} y(x) = 0$, altrimenti y si prolunga oltre b. Dunque: $\lim_{x \to b^-} y'(x) = -\infty$.

iv) Convessità: omesso.

Esercizio Calcolare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione del Problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y' = y^2 - 2y + \alpha \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

sia definita su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. L'equazione differenziale è a variabili separabili e si integra esplicitamente.

Alternativamente, ragioniamo nel seguente modo.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il polinomio $f(y) = y^2 - 2y + \alpha$.
Se il discriminante $\Delta = 4 - 4\alpha$ verifica $\Delta \geq 0$, ovvero $\alpha \leq 1$, allora f ha le radici reali

$$y_\pm = 1 \pm \sqrt{1-\alpha}.$$

Se $\alpha = 1$ la radice è doppia. Dunque le funzioni costanti

$$y_+(x) = 1 + \sqrt{1-\alpha}$$

$$y_-(x) = 1 - \sqrt{1-\alpha}$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y^2 - 2y + \alpha$. In particolare, per $\alpha = 1$ la funzione $y(x) = 1$ è la soluzione (unica) di $(*)$, ed è globale.

Quando $\alpha < 1$, la soluzione y di (*) deve verificare

$$1-\sqrt{1-\alpha} = y_- < y(x) < y_+ = 1+\sqrt{1-\alpha} \qquad \forall x .$$

Questo segue da un argomento standard di unicità.

Rimanendo limitata, la soluzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

Consideriamo infine il caso $\alpha > 1$. Separiamo le variabili e integriamo:

$$\int_0^x \frac{y'(t)\,dt}{y(t)^2 - 2y(t) + \alpha} = x$$

ovvero

$$x = \int_1^{y(x)} \frac{dz}{z^2 - 2z + \alpha} = \int_1^{y(x)} \frac{dz}{(z-1)^2 + \alpha - 1}$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \int_1^{y(x)} \frac{dz}{\left(\frac{z-1}{\sqrt{\alpha-1}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \left[\sqrt{\alpha-1} \ \operatorname{arctg}\left(\frac{z-1}{\sqrt{\alpha-1}}\right) \right]_{z=1}^{z=y(x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y(x)-1}{\sqrt{\alpha-1}}\right).$$

La soluzione è

$$y(x) = 1 + \sqrt{\alpha-1}\ \operatorname{tg}\left(\sqrt{\alpha-1}\ x\right)$$

e non è globale su $\mathbb{R}$. $\square$

Esercizio Sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua. Provare che l'equazione funzionale

$$(1+x^2)\,\varphi(x) + x \sin(\varphi(x)) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ha un'unica soluzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Assumendo che $g \in C^1(\mathbb{R})$, provare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Soluzione. Fissiamo $M>0$ e sia $X = C([-M,M])$ munito della sup norma $\|\cdot\|_\infty$. Sia $T: X \to X$ l'applicazione

$$T\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}\Big(g(x) - x\sin(\varphi(x))\Big), \quad x \in [-M,M].$$

Proviamo che T è una contrazione. Per $\varphi, \psi \in X$ si ha

$$|T\varphi(x) - T\psi(x)| = \frac{|x|}{1+x^2}\,|\sin(\varphi(x)) - \sin(\psi(x))|$$

$$\leq \frac{1}{2}\,|\varphi(x) - \psi(x)|,$$

dal momento che $\frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $|\sin(t) - \sin(s)| \leq |t-s|$

Dunque $\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq \frac{1}{2}\,\|\varphi - \psi\|_\infty$.

Siccome X è uno spazio metrico completo, T ha un unico punto fisso su X;

$$T\varphi(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in [-M,M].$$

Siccome $M>0$ è generico l'equazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (1+x^2)y + x\sin(y) - g(x).$$

Se $g \in C^1(\mathbb{R})$ allora $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Inoltre

$$f_x = 2xy + \sin(y) - g'(x),$$

$$f_y = 1+x^2 + x\cos(y).$$

Siccome

$$f_y = (1+x^2)\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\cos y\right)$$

$$\geq (1+x^2)\,\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

deduciamo che $f_y(x,y) \neq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dunque, per il Teorema della funzione implicita l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce una funzione $x \mapsto \varphi(x)$ di classe C^1 tale che $f(x,\varphi(x)) = 0$ identicamente.

$\square$