

Corso di Analisi Matematica 2B - 2022

Programma finale

1. Sottovarietà differenziabili di \mathbb{R}^n e moltiplicatori di Lagrange. Definizione di sottovarietà come luogo di zeri. Caso grafico. Definizione parametrica. Teorema di equivalenza (con dim). Spazio tangente e spazio normale. Teorema di caratterizzazione dello spazio tangente (con dim). Massimi e minimi vincolati su una sottovarietà. Teorema sui moltiplicatori di Lagrange (con dim). Esercizi ed esempi.

2. Curve e 1-forme differenziali in \mathbb{R}^n . Richiami sulle curve, curve rettificabili e lunghezza. Teorema di riparametrizzazione a lunghezza d'arco. Definizione di integrale curvilineo. 1-forme differenziali chiuse ed esatte. Definizione di integrale di una 1-forma lungo una curva. Teorema sulle caratterizzazioni equivalenti per le forme esatte (con dim). Insiemi contraibili. Teorema di Poincaré (con dim). Esempi ed esercizi.

3. Misura ed integrale di Lebesgue. Misure esterne e misure. Insiemi misurabili. Teorema di Carathéodory (senza dim). Teorema sulla misura di insiemi unione e intersezione monotona (con dim). Costruzione della misura di Lebesgue. Teorema di regolarità da sopra e da sotto (con dim). Insieme non misurabile di Vitali. Teorema sull'unicità della misura di Haar (con dim). Definizione delle misure di Hausdorff. Misura della trasformazione lineare di un insieme (con dim). Funzioni misurabili. Stabilità della misurabilità rispetto a somma, prodotto, inf, sup e limite. Funzioni semplici. Definizione di integrale di Lebesgue. Teorema sull'approssimazione di funzioni misurabili con funzioni semplici (con dim). Funzioni integrabili. La somma di funzioni integrabili è integrabile. Insiemi di misura nulla e q.o. Teorema sulla convergenza monotona (con dim). Teorema di riduzione e di Fubini-Tonelli (senza dim). Teorema del cambio di variabile per l'integrale di Lebesgue (con dim usando il Lemma di Radon-Nikodym, non dimostrato). Coordinate polari e coordinate sferiche. Legami fra integrale di Riemann ed integrale di Lebesgue (senza dim). Esempi ed esercizi.

4. Area ed integrali di superficie. Triangolazioni. Definizione di area per superfici parametriche. Area di grafici. Prodotto vettoriale e caso delle 2-superfici in \mathbb{R}^3 . Teorema sulla formula dell'area (senza dim). Formula di Coarea (con dim in caso modello che usa partizione dell'unità). Integrazione per sfere. Calcolo di integrali relativi alla Gaussiana. Volume ed area della sfera. Definizione di divergenza. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata. Teorema della divergenza (con dim). L'Osservazione 4.22 è inclusa nel programma. Rotore e teorema del rotore sono esclusi dal programma. Esempi ed esercizi.

Roberto Monti

14 Giugno 2022