Analisi Matematica 2B
Quaderno degli esercizi settimanali

Roberto Monti

Matematica – Anno Accademico 2021-22

Indice

Introduzione

In questo Quaderno sono raccolte 9 schede di esercizi. L'ordine degli argomenti corrisponde all'ordine seguito nel corso di Analisi Matematica 2B per Matematica. Gli esercizi cercano di illustrare in modo pratico tutti gli aspetti (definizioni, teoremi, criteri, tecniche) studiati nel corso di teoria.

Ogni scheda di esercizi corrisponde approssimativamente al lavoro da fare a casa sugli esercizi nell'arco di una settimana.

Gli esercizi con ★ alla fine di ciascuna scheda sono più difficili. Possono essere affrontati (dopo aver lavorato sui precedenti) da chi vuole cimentarsi con sfide più impegnative.

SETTIMANA 1

Sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$

Esercizio 1.1. Si consideri l'insieme

$$M = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ x + y + z = 0\big\}$$

i) Provare che M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.
ii) Parametrizzare M in modo regolare.
iii) Disegnare M.
iv) Calcolare i punti di M con coordinata z minima e massima.

Esercizio 1.2 (Coniche di Apollonio). Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli, si consideri l'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Provare che M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 e classificarla al variare dei parametri a, b, c.

Esercizio 1.3. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme

$$M_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 - x^2 - \alpha x\}.$$

i) Stabilire per quali α l'insieme M_α è una sottovarietà differenziabile.
ii) Descrivere i punti singolari di M_α, quando ci sono.
iii) Quante componenti connesse ha M_α?

Disegnare M_α nei vari casi.

Esercizio 1.4. Dopo aver disegnato le seguenti tre superfici, calcolare il piano tangente in un generico punto di ciascuna:

$$\begin{aligned} M &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}, \\ N &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\}, \\ P &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\big\}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.5. Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{C}^2$ e consideriamo l'insieme

$$M = \big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 = w^3\big\}.$$

Determinare il più piccolo sottoinsieme chiuso $C \subset M$ tale che $M \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^4$ e determinarne la dimensione.

Esercizio 1.6 (Toro). Siano $0 < r < R$ due parametri fissati e definiamo

$$M = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0\big\}.$$

Provare che M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di classe C^∞ e di dimensione 2. Disegnare M.

Esercizio 1.7 (Nastro di Möbius). Siano $0 < r < R$ due parmetri fissati e sia $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$, con $A = (R-r, R+r) \times \mathbb{R}$, la funzione

$$\varphi(u,v) = R(\cos v\, \mathrm{e}_1 + \sin v\, \mathrm{e}_2) + (u-R)\big(\cos(v/2)(\cos v\, \mathrm{e}_1 + \sin v\, \mathrm{e}_2) + \sin(v/2)\mathrm{e}_3\big).$$

Verificare che $M = \varphi(A)$ è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. Disegnare M. Stabilire se M è orientabile, ovvero se esiste un campo normale N globalmente definito in modo continuo.

Esercizio 1.8 (Fibrato tangente). Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$ dimensione $1 \le d \le n-1$ e di classe C^k, $k \ge 2$. Provare che

$$TM = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in M, y \in T_xM\}$$

è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^{2n}$ di dimensione $2d$ e di classe C^{k-1}.

Esercizio 1.9. Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo. Provare che $N = \Phi(M)$ è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$ se lo è M. Verificare che il differenziale $d\Phi$ trasforma lo spazio tangente T_xM in T_yN, dove $y = \Phi(x)$.

Esercizio 1.10 (Proiezione stereografica). ★ Siano $\mathbb{S}^n = \{p = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$ ed $N = (0,1)$ il polo nord, con $n \ge 1$. Definiamo la proiezione stereografica $S : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ nel seguente modo: $S(p) =$ intersezione del piano $\{x_{n+1} = 0\}$ con la semiretta uscente da N e passante per p.

i) Calcolare S in forma esplicita.
ii) Provare che S è conforme, ovvero che per ogni $p \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ esiste $\lambda(p) \neq 0$ – calcolarlo in forma esplicita – tale che il differenziale $T = dS(p) : T_p\mathbb{S}^n \to T_{S(p)}\mathbb{R}^n$ preserva gli angoli

$$\langle Tv, Tw\rangle = \lambda(p)\langle v, w\rangle, \quad v, w \in T_p\mathbb{S}^n.$$

SETTIMANA 2

Estremi vincolati e disuguaglianze

ESERCIZIO 2.1. Tra tutti i triangoli con area fissata, quello equilatero ha perimetro minimo.

ESERCIZIO 2.2. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di volume fissato determinare quello con area di superficie laterale minima.

ESERCIZIO 2.3. Dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, provare che

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_i \Big)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = \ldots = x_n$.

ESERCIZIO 2.4. Dati $x_1, \dots, x_n \geq 0$, provare la disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = \ldots = x_n$.

ESERCIZIO 2.5. Dati $x_1, \dots, x_n \geq 0$, provare che

$$x_1^n + \ldots + x_n^n \geq n x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

ESERCIZIO 2.6. Provare che per ogni $\alpha, \beta > 0$ esiste una costante $0 < C_{\alpha\beta} < \infty$ tale che per ogni $x, y \geq 0$ si abbia

$$x^\alpha y^\beta \leq C_{\alpha\beta}(x^{\alpha+\beta} + y^{\alpha+\beta}).$$

Calcolare la costante $C_{\alpha\beta}$ ottimale (più piccola).

ESERCIZIO 2.7. Tra tutti gli ellissoidi di $\mathbb{R}^3$ con semiassi $a, b, c > 0$ calcolare quello con volume massimo sotto la condizione $a + 2b + 3c = 7$.

ESERCIZIO 2.8. Calcolare la distanza del punto $0 \in \mathbb{R}^3$ dall'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Stablire preliminarmente se M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 2.9. Sia $p > 0$ un numero reale fissato, sia $K_p \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$K_p = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2p} + |y|^{2p} \leq 1\big\},$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = x^3 y^3$. Provare che f assume su K_p un valore minimo m_p ed un valore massimo M_p e calcolarli.

ESERCIZIO 2.10. Calcolare massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ vincolata a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Esercizio 2.11. Dopo aver provato che esistono, calcolare i valori massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = xyz$ vincolata sull'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + xz + yz = 1,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Esercizio 2.12. Dati tre interi $m, n, p \in \mathbb{N}$, calcolore il massimo ed il minimo della funzione $f(x, y, z) = x^m y^n z^p$ vincolata sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SETTIMANA 3

Curve, lunghezza ed integrali curvilinei

Esercizio 3.1 (Spirale logaritmica). Sia $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la spirale logaritmica data dall'equazione polare $\varrho = \mathrm{e}^{-\vartheta}$. Calcolare la lunghezza di γ e riparametrizzarla a lunghezza d'arco.

Esercizio 3.2 (Cardioide). Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana data dall'equazione polare $\varrho = 1 - \cos\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Disegnare il supporto di γ e calcolare la sua lunghezza. Risp. $L = 8$.

Esercizio 3.3. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva piana $\gamma(t) = (t^2, 2t^3/3 - t^2)$, con $t \in \mathbb{R}$. Stabilire se γ è semplice e se è regolare. Calcolare, quando possibile, il campo unitario tangente T. Calcolare i limiti destro e sinistro

$$\lim_{t \to 0^\pm} T(t).$$

Infine, disegnare il supporto della curva γ.

Esercizio 3.4. Si consideri la curva piana $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\frac{t^3}{3} - t, (\log t)^2\Big), \quad t > 0.$$

i) Stabilire se γ è semplice e se è regolare.
ii) Se possibile, calcolare il campo tangente unitario $T(t)$ e poi calcolare i limiti

$$\lim_{t \to 1^\pm} T(t).$$

iii) Disegnare il supporto di γ.

Esercizio 3.5. Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la curva piana $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(t^2 \cos\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big), t^2 \sin\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big)\Big), \quad \text{se } t \in (0, 1], \quad \text{e} \quad \gamma(0) = (0, 0).$$

1) Riparametrizzare γ in coordinate polari e disegnare approx. il sostegno di γ.
2) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che la curva γ sia rettificabile.

Esercizio 3.6. Siano $L > 0$ ed $\alpha \geq 0$ due parametri fissati. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [L, L] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\alpha \cosh t \, \cos t, \alpha \cosh t \, \sin t, \alpha t), \quad t \in [-L, L].$$

Disegnare il supporto di γ. Risp. $2\sqrt{2}\alpha \sinh L$.

Esercizio 3.7. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare $\varrho = \vartheta$. Calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2} ds.$$

Esercizio 3.8 (Cicloide). Si consideri il tratto di cicloide $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Posto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Calcolare l'integrale di f lungo γ

$$I = \int_\gamma f\, ds.$$

Esercizio 3.9. Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$.

1) Verificare che γ è regolare, calcolare il campo tangente unitario T e disegnare il supporto.
2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{|z|}$, calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma f\, ds$.

Risp. $[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1]/12$.

Esercizio 3.10 (Spirale doppio logaritmo). ★ Consideriamo la curva $\gamma : [0, 1/2] \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ tale che $\gamma(0) = 0$ e

$$\gamma(t) = te^{i \log(-\log t)}, \qquad t \in (0, 1/2].$$

i) Provare che γ è Lipschitziana (e dunque rettificabile).
ii) Provare che per ogni $v \in \mathbb{C}$ con $|v| = 1$ esiste una successione infinitesimale di numeri positivi $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\gamma(\lambda_n t)/\lambda_n \to tv$ per $n \to \infty$, localmente uniformemente su $[0, \infty)$.
ii) Provare che per ogni successione infinitesimale di numeri positivi $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esistono una sottosuccessione ed un $v \in \mathbb{C}$ con $|v| = 1$ tali che $\gamma(\lambda_{n_k} t)/\lambda_{n_k} \to tv$ per $k \to \infty$, localmente uniformemente su $[0, \infty)$.

Esercizio 3.11 (Postulato di Archimede su convessità e lunghezza). ★ Siano $f, F \in C^2([0, 1])$ due funzioni convesse tali che $f \leq F$ in tutti i punti, $f(0) = F(0)$ ed $f(1) = F(1)$. Consideriamo le curve date in forma cartesiana $\gamma(t) = (t, f(t))$ e $\Gamma(t) = (t, F(t))$. Provare che $L(\Gamma) \leq L(\gamma)$.

SETTIMANA 4

1-forme differenziali chiuse ed esatte

Esercizio 4.1. Calcolare l'integrale della 1-forma differenziale ω lungo la curva γ assegnata:

i) $\omega = x^2dx + xydy$ in $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t)$ con $t \in [-1, 1]$.
ii) $\omega = (x - z)dx + (1 - xy)dy + ydz$ in $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ con $t \in [0, 1]$.
iii) $\omega = 2x(x+y)dx+2y(x+y)dy$ in $\mathbb{R}^2$ lungo la curva γ con equazione polare $\varrho = k\vartheta$, dove $\vartheta \in [0, \pi/2]$ e $k \geq 0$ è un parametro fissato (spirale di Archimede).

Risp. i) 0; ii) 29/20; iii) $k^3(\pi^2 + 4\pi - 16)/2$.

Esercizio 4.2. Si consideri la 1-forma differenziale nel piano

$$\omega = \Big(\log(x + y) + \frac{x}{x + y}\Big)dx + \frac{x}{x + y}dy.$$

i) Determinare il più grande insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ su cui ω è ben definita.
ii) Stabilire se ω è chiusa in A.
iii) Stabilire se ω è esatta in A ed eventualmente calcolarne un potenziale.

Risp. $f(x, y) = x \log(x + y)$.

Esercizio 4.3. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1 - \sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}\big(xdx + ydy\big).$$

Calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ di equazione polare $\varrho = \mathrm{e}^{\vartheta}$ con $\vartheta \in [0, \pi/2]$ (spirale logaritmica). Determinare preliminarmente un potenziale della forma.

Risp. iii) $\mathrm{e}^{\pi/2} + \cos(\mathrm{e}^{\pi/2}) - 1 - \cos 1$.

Esercizio 4.4. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (\alpha y + z)dx + (\alpha x + z)dy + (\alpha x + y)dz$$

sia chiusa. Par tali valori calcolare un potenziale di ω su $\mathbb{R}^3$.

Risp. $\alpha = 1$.

Esercizio 4.5. Stabilire se i seguenti insiemi sono contraibili:
i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^3$;
ii) $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \log(1 + |x|) \geq |x|/2\big\}$ in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$;
iii) $C = \big\{(x + y, xy) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Risp. i) No; ii) Si; iii) Si.

Esercizio 4.6. Dati $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} dx + \frac{\gamma x + \delta y}{x^2 + y^2} dy.$$

1) Calcolare tutti i valori dei parametri tali che ω sia chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

2) Determinare tutti i valori dei parametri tali che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e calcolarne un potenziale.

Esercizio 4.7. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e connesso. Provare che se una 1-forma differenziale ω ammette potenziale in A allora questo è unico a meno di una costante additiva.

Esercizio 4.8. ★ Sia $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva data dal grafico della funzione $y = \cos x$ con $x \in [-\pi, \pi]$. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 4.9. ★ Stabilire se la forma differenziale

$$\omega = \frac{y^2}{x^2 + y^4} dx - \frac{2xy}{x^2 + y^4} dy$$

è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ed eventualmente calcolarne un potenziale.

SETTIMANA 5

Misura di Lebesgue e funzioni misurabili

Esercizio 5.1. Siano $Q \subset \mathbb{R}^2$ un quadrato e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una trasformazione lineare. Verificare in modo elementare che l'area di $T(Q)$ è pari a $|\det(T)|$ volte l'area di Q.

Esercizio 5.2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua con grafico $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Provare che $\mathscr{L}^2(G) = 0$.

Esercizio 5.3. Costruire un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ che abbia le seguenti tre proprietà: 1) A è aperto; 2) $\mathscr{L}^2(A) < 1$; 3) $\mathscr{L}^2(\partial A) = \infty$.

Esercizio 5.4. Provare che un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se esistono $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ (ed in effetti B intersezione numerabile di aperti) e un insieme N di misura nulla tali che $E = B \setminus N$.

Esercizio 5.5. Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz $\mathrm{Lip}(F)$. Provare che $\mathscr{H}^s(F(A)) \le \mathrm{Lip}(F)^s \mathscr{H}^s(A)$ per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $s \ge 0$.

Esercizio 5.6. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che $\varphi \circ f$ è misurabile.

Esercizio 5.7. Il limite puntuale di una successione di funzioni continue su $\mathbb{R}$ è una funzione di Borel. Suggerimento: per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\{f < t\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{f_n < t - 1/i\}.$$

Esercizio 5.8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e si consideri l'insieme

$$P = \{t \in \mathbb{R} : \mathscr{L}^1(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = t\}) > 0\}.$$

Provare che P ha cardinalità al più numerabile. Suggerimento: iniziare ad enumerare i valori con livello di misura positiva $t \in P \cap [0, 1]$.

Esercizio 5.9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in quasi ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Provare che f è misurabile.

Esercizio 5.10 (Insieme di Cantor). ★ Sia $K \subset [0, 1]$ l'insieme

$$K = \Big\{x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},\ a_n \in \{0, 2\}\Big\}.$$

Provare che K è compatto (con interno vuoto), $\mathrm{Card}(K) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ e che $\mathscr{L}^1(K) = 0$.

SETTIMANA 6

Integrale di Lebesgue 1

Esercizio 6.1. Calcolare il volume del cono circolare retto in $\mathbb{R}^3$ con base di raggio $r > 0$ ed altezza $h > 0$.

Esercizio 6.2 (Cono su un insieme). Sia $B \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ un insieme $\mathscr{L}^2$-misurabile e sia $A \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme formato dall'unione dei segmenti che congiungono il vertice $(0, 0, h) \in \mathbb{R}^3$, $h > 0$, con i punti di B. Provare che $\mathscr{L}^3(A) = \frac{h}{3}\mathscr{L}^2(B)$.

Esercizio 6.3. Calcolare il volume del settore sferico

$$A_{r,s} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < r^2,\ x > s\},$$

dove $r > 0$ ed $s \in (-r, r)$.

Esercizio 6.4. Dato l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ 0 < y < \sqrt{1 - x^2}\}$, calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{1}{1+y} dxdy.$$

Esercizio 6.5. Dato l'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1,\ x > 0, y > 0, z > 0\}$ calcolare l'integrale

$$\int_A x(y + z)\, dxdydz.$$

Esercizio 6.6. Provare che converge e calcolare il seguente integrale

$$\int_{(0,\infty)\times(0,1)} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

Dedurre che

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sin t)}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2} \log(1 + \sqrt{2}).$$

Esercizio 6.7. Siano $A = (0, 1) \times (0, 1)$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad x, y \in (0, 1).$$

Verificare che i seguenti integrali ripetuti esistono e risulta

$$\int_{(0,1)} \Big(\int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \Big) dy = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_{(0,1)} \Big(\int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \Big) dx.$$

Effettivamente, f è continua e dunque misurabile, tuttavia cambia segno e non è integrabile (verificare in modo diretto).

Esercizio 6.8. ★ Siano $A = (0, \infty) \times (0, \infty)$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, t) = \mathrm{e}^{-tx^2} \sin t$. Verificare che $f \notin L^1(A)$ e tuttavia

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, t)\, dx\, dt = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, t)\, dt\, dx,$$

dove gli integrali sono intesi come integrali di Riemann generalizzati.

SETTIMANA 7

Integrale di Lebesgue 2

Esercizio 7.1. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ la regione delimitata dalla cardioide di equazione polare $\varrho = 1 + \cos\vartheta$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Calcolare l'area di A

Esercizio 7.2. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = (x-y)\log(1+x+y)$. Stabilire se $f \in L^1(A)$ ed in caso affermativo calcolare l'integrale

$$\int_A f(x, y)\, dxdy.$$

Esercizio 7.3. Dopo aver disegnato l'insieme

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \min\{\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}\right\},$$

calcolare – se possibile – l'integrale

$$\int_A (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dxdydz,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro da discutere.

Esercizio 7.4. Al variare di $\alpha > 0$ si considerino l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y^\alpha < 1\}$$

e la funzione $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{x + 1}{y^2}, \quad (x, y) \in A.$$

Dire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione f è integrabile su A e – se possibile – calcolarne l'integrale.

Esercizio 7.5. Calcolare l'integrale

$$\int_A (x^2 - y^2) dxdy,$$

dove $A \subset \mathbb{R}^2$ è l'ellisse di semiassi $a, b > 0$.

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}.$$

Esercizio 7.6. Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{x^2}{y} \mathrm{e}^{xy} dxdy,$$

dove $A \subset \mathbb{R}^2$ è l'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2x} < y < \frac{1}{x},\ 2x^2 < y < 3y^2\right\}.$$

Esercizio 7.7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\int_0^a \int_0^b f(x,y)dxdy = ab.$$

Provare che $f = 1$. Riflettere sul caso in cui l'ipotesi "f continua in $\mathbb{R}^2$" sia sostituita con "$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$".

Esercizio 7.8. ★ Dato il parametro reale $\alpha \in [1, \infty)$ si consideri l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1,\ x^\alpha + y^\alpha \leq 1, x > 0, y > 0\}$. Dimostrare che

$$\int_A \frac{1}{(\log x)^2 + (\log y)^2} \frac{1}{xy} dxdy = \frac{\pi}{2} \log \alpha.$$

SETTIMANA 8

Area ed integrali di superficie

Esercizio 8.1. Calcolare l'area del segmento di paraboloide $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 < 1\}$.

Esercizio 8.2. Dati $A = (0,1) \times (0,2\pi)$ e $\varphi \in C^\infty(A;\mathbb{R}^3)$

$$\varphi(u,v) = \big(u\cos v, v, \cos v\big), \quad (u,v) \in A,$$

calcolare l'area della superficie $M = \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3$.

Esercizio 8.3. Siano $f, g \in C^1([0,1])$ due funzioni con $f \geq 0$, $A = [0,2\pi] \times [0,1]$ e $\varphi \in C^1(A;\mathbb{R}^3)$ la funzione

$$\varphi(u,v) = (f(v)\cos u, f(u)\sin v, g(v)), \quad (u,v) \in A.$$

Provare che l'area della superficie di rotazione $M = \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3$ è

$$A(M) = 2\pi \int_0^1 f(v)\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}dv.$$

Usare questa formula per calcolare l'area del toro introdotto nell'Esercizio 1.6.

Esercizio 8.4. Calcolare l'area della porzione di iperboloide di rotazione $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ -1 < z < 1\}$.

Esercizio 8.5. Calcolare l'area di un ellissoide con due semi-assi della stessa lunghezza.

Esercizio 8.6 (Area della sfera). Sia $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$. Calcolare l'area della sfera nei seguenti due modi diversi:

1) Usando le coordinate sferiche $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\varphi)$ con $\vartheta \in [0,2\pi]$ e $\varphi \in [0,\pi]$ e la definizione parametrica di area.

2) Usando l'integrale cartesiano dell'area per una mezza calotta sferica.

Esercizio 8.7. ★ Sia $\mathbb{S}^2_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ la sfera di raggio $r > 0$ e per $\varrho \geq 0$ si consideri l'integrale di superficie

$$I(r,\varrho) = \int_{\mathbb{S}^2_r} \frac{\varrho - z}{\big(x^2 + y^2 + (\varrho - z)^2\big)^{3/2}} d\mathscr{H}^2.$$

Provare che

$$I(r,\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{per } \varrho < r \\ 4\pi r^2/\varrho^2 & \text{per } \varrho > r \\ 2\pi & \text{per } \varrho = r. \end{cases}$$

SETTIMANA 9

Teorema della divergenza

Esercizio 9.1 (Teorema di Gauss-Green). Dedurre dal teorema generale la seguente variante del teorema della divergenza nel piano. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto limitato con frontiera di classe C^1 parametrizzata in senso antiorario da una curva γ e sia $\omega \in \Omega^1(\bar{A})$ la 1-forma differenziale

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad P, Q \in C^1(\overline{A}).$$

Provare che

$$\int_A \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \int_\gamma \omega.$$

Esercizio 9.2. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto delimitato da una curva chiusa di equazione polare $\varrho = \varrho(\vartheta)$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Verificare che

$$\mathscr{L}^2(A) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho(\vartheta)^2 d\vartheta.$$

Esercizio 9.3. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme aperto delimitato dalla curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(4\cos t - \cos(4t), 4\sin t - \sin(4t)\big)$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare $\mathscr{L}^2(A)$.

Esercizio 9.4. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, $F(x, y, z) = (0, 0, z)$, attraverso la superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z > x^2 + y^2\}$.

Esercizio 9.5. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^4, y, z)$ attraverso la superficie in $\mathbb{R}^3$ data dalla parametrizzazione $\varphi(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$ con $u^2 + v^2 < 1$.

Esercizio 9.6. Sia γ una parametrizzazione antioraria della frontiera del quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{x}{1 + y} dx - (\sin y + x^2 y)dy.$$

Esercizio 9.7. Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1/2 < |x| < 2\}$ ed $F \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale, e consideriamo la sfera $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Provare che il flusso del rotore di F attraverso $\mathbb{S}^2$ è zero, $\mathscr{F}(\mathrm{rot}(F); \mathbb{S}^2) = 0$.

Esercizio 9.8. ★ Sia $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ il flusso del campo vettoriale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$

$$F(x, y, z) = (x - y, x + y - z, z + y).$$

È vero che per ogni 2-superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ di area finita e per ogni $t > 0$ si ha $\mathscr{H}^2(\Phi_t(M)) > \mathscr{H}^2(M)$?

Esercizio 9.9 (Postulato di Archimede su convessità ed area). ★ Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato (con "frontiera regolare") e siano $f, F \in C^2(\bar{A})$ due funzioni convesse tali che $f \leq F$ in A ed $f = F$ su ∂A. Provare che

$$\mathscr{H}^2(\mathrm{gr}(F)) \leq \mathscr{H}^2(\mathrm{gr}(f)).$$