Esercizio Calcolare l'area della superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva di equazione

$$\begin{cases} x = \sin v - \cos v \\ z = \sin v + \cos v \end{cases} \qquad v \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

Risoluzione. Qui abbiamo $f(v) = \sin v - \cos v$ e $g(v) = \sin v + \cos v$. Quindi

$$f'(v)^2 + g'(v)^2 = (\cos v + \sin v)^2 + (\cos v - \sin v)^2 = 2$$

ed usando la formula generale

$$A(M) = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} f(v) \sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}\, dv$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sin v - \cos v)\, dv$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \Big[-\cos v - \sin v \Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 4\pi.$$

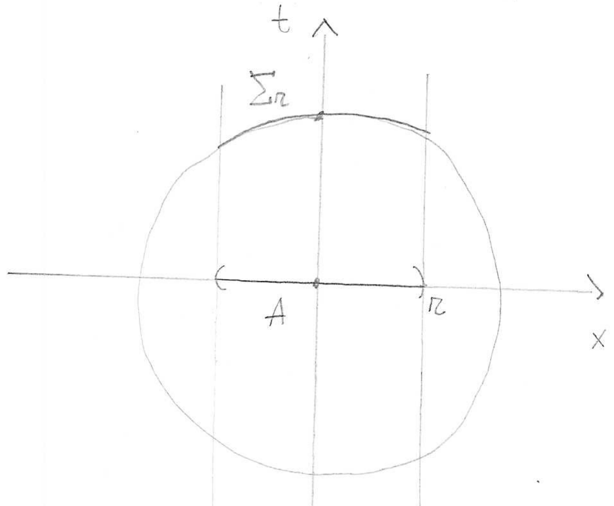
$\square$

Esercizio In $\mathbb{R}^4$ con le coordinate $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ si consideri la 3-superficie

$$\Sigma_r = \{(x,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, |x|^2 + t^2 = 1 \ \text{e} \ |x| < r\}$$

dove $r \in (0,1]$. Calcolare l'area $A(\Sigma_r)$.

Risoluzione. Σ_r è una calotta sferica come in figura;



Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \,;\, |x| < r\}$ ed $f \in C^\infty(A)$

$$f(x) = \sqrt{1 - |x|^2}.$$

Allora si ha $\Sigma_r = gr(f)$ e dunque per la formula Cartesiana dell'area:

$$A(\Sigma_r) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, dx.$$

Conti:

$$f_{x_i} = \frac{1}{2} \frac{-2x_i}{\sqrt{1-|x|^2}} = -\frac{x_i}{\sqrt{1-|x|^2}}, \quad i = 1,2,3$$

e dunque $|\nabla f|^2 = \dfrac{|x|^2}{1-|x|^2}$, da cui

$$\sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}.$$

Usando le formule di coarea (Coordinate sferiche):

$$\int_A \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\,dx = \int_0^r \int_{|x|=\rho} \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\,d\mathcal{H}^2(x)\,d\rho =$$

$$= \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\rho^2 \underbrace{\mathcal{H}^2(S^2)}_{\overset{\shortparallel}{4\pi}}\,d\rho$$

Sostituzione $\rho = \sin\theta$

$d\rho = \cos\theta\, d\theta$

$$= 4\pi \int_0^{\arcsin(r)} \frac{1}{\cancel{\cos\theta}} \sin^2\theta \,\cancel{\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^{\arcsin(r)} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= 2\pi \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\arcsin(r)} = 2\pi\left[\theta - \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\arcsin(r)}$$

$$= 2\pi\left(\arcsin(r) - \frac{r\sqrt{1-r^2}}{2}\right),$$

Conclusione:

$$A(\Sigma_r) = 2\pi\left(\arcsin(r) - \frac{r\sqrt{1-r^2}}{2}\right).$$

$\square$

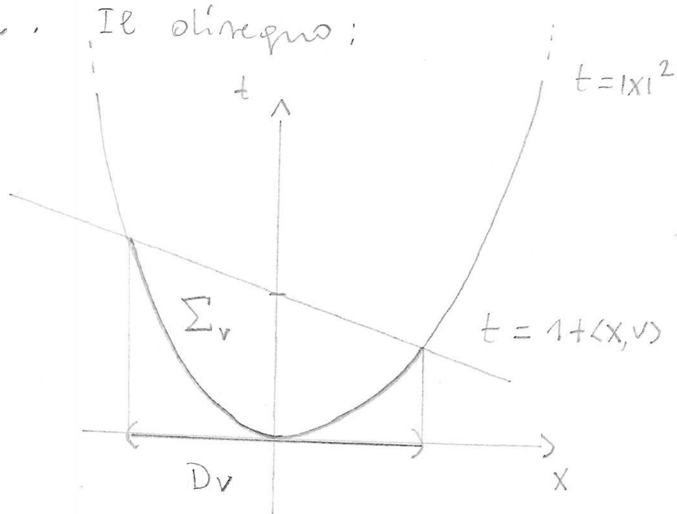
Esercizio In $\mathbb{R}^3$ fissiamo le coordinate $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Per $v \in \mathbb{R}^2$ consideriamo la superficie

$$\Sigma_v = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^3 ; \; t = |x|^2, \; t < 1 + \langle x, v \rangle \}.$$

Provare che

$$\min \{ A(\Sigma_v) \mid v \in \mathbb{R}^2 \} = A(\Sigma_0) = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1)$$

Risoluzione. Il disegno:



Calcoliamo l'insieme $D_v \subset \mathbb{R}^2$ in figura.

$$|x|^2 = t < 1 + \langle x, v \rangle \quad \Rightarrow \quad |x|^2 - \langle x, v \rangle + \frac{|v|^2}{4} < 1 + \frac{|v|^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad | x - v/2 |^2 < 1 + \frac{|v|^2}{4}$$

É un cerchio centrato in $v/2$:

$$D_v = \{ x \in \mathbb{R}^2 ; \; |x - v/2| < \sqrt{1 + \frac{|v|^2}{4}} \}.$$

Detta $f \in C^\infty(D_v)$, $f(x) = |x|^2$, si ha $\Sigma_v = \mathrm{gr}(f)$

e dunque

$$\nabla f(x) = 2x$$

$$A(\Sigma_v) = \int_{D_r} \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, dx = \int_{D_r} \sqrt{1 + 4|x|^2}\, dx$$

Con la traslazione $x - v/2 = \xi$ si ottiene

$$A(\Sigma_v) = \int_{\{|\xi| < \sqrt{1+|v|^2/4}\}} \sqrt{1 + 4|\xi + \tfrac{v}{2}|^2}\, d\xi \geq \int_{\{|\xi|<1\}} \sqrt{1+4|\xi+\tfrac{v}{2}|^2}\, d\xi .$$

La funzione $v \longmapsto \sqrt{1 + 4|\xi + v/2|^2}$ è convessa $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$. Quindi $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(v) = \int_{\{|\xi|<1\}} \sqrt{1 + 4|\xi + \tfrac{v}{2}|^2}\, d\xi$$

è convessa. Inoltre

$$F(-v) = \int_{\{|\xi|<1\}} \sqrt{1+4|\xi - \tfrac{v}{2}|^2}\, d\xi = \int_{\{|\xi|<1\}} \sqrt{1+4|-\xi+\tfrac{v}{2}|^2}\, d\xi \overset{-\xi = \eta}{=}$$

$$= \int_{\{|\eta|<1\}} \sqrt{1+4|\eta + \tfrac{v}{2}|^2}\, d\eta = F(v).$$

Dunque per ogni $v \in \mathbb{R}^2$:

$$F(0) = F\left(\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}(-v)\right) \leq \tfrac{1}{2}F(v) + \tfrac{1}{2}F(-v) = F(v),$$

Questo prova che $A(\Sigma_0) \leq A(\Sigma_v)$. Infine:

$$A(\Sigma_0) = \int_{\{|x|<1\}} \sqrt{1+4|x|^2}\, dx = \int_0^1 2\pi \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr = 2\pi \left[\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{8} \cdot \frac{2}{3} \right]_{r=0}^{r=1}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right). \qquad \square$$

Esercizio 9.1 Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato con frontiera parametrizzata in senso anti-orario da una curva γ. Sia poi $\omega \in \Omega^1(\bar{A})$ la 1-forma differenziale

$$\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \quad , \qquad P, Q \in C^1(\bar{A}).$$

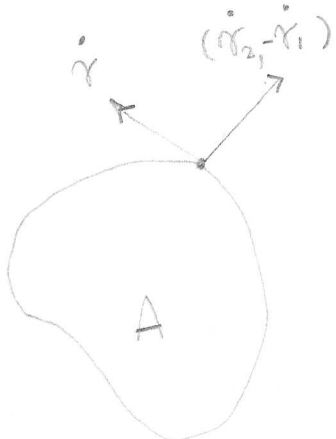
Provare che

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_\gamma \omega .$$

Dim. Sia $\gamma : [0,L] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ con $\gamma(0) = \gamma(L)$ una parametrizzazione di ∂A antioraria con $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ e $L = \mathcal{H}^1(\partial A) = L(\gamma)$. Per definizione

$$\int_\gamma \omega = \int_0^L P(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_1(t) + Q(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_2(t)\,dt$$

$$= \int_0^L \langle (Q,-P), (\dot{\gamma}_2, -\dot{\gamma}_1) \rangle \, dt$$



$$= \int_{\partial A} \langle (Q,-P), \underbrace{(\dot{\gamma}_2, -\dot{\gamma}_1)}_{\substack{\| \\ N \text{ normale esterna}}} \rangle \, d\mathcal{H}^1$$

$$= \int_A \operatorname{div}(Q,-P)\,dx\,dy .$$

$\square$

Esercizio. Dato il parametro reale $\alpha > 0$ si consideri l'insieme

$$A_\alpha = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (|z|+1)(x^2+y^2)^\alpha \leq 1 \}.$$

Al variare di $\alpha > 0$:

i) calcolare il volume $\mathcal{L}^3(A_\alpha)$;

ii) stabilire se $\mathcal{H}^2(\partial A_\alpha) < \infty$ oppure no.

Risoluzione. i) I punti di A_α verificano

$$x^2+y^2 \leq \frac{1}{(1+|z|)^{1/\alpha}}.$$

Dunque le sezioni $A_z = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A_\alpha \}$ sono cerchi di raggio $(1+|z|)^{-1/2\alpha}$. Per Fubini - Tonelli (riduzione)

$$\mathcal{L}^3(A_\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}^2(A_z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{(1+|z|)^{\frac{1}{\alpha}}}\, dz$$

$$= 2\pi \int_0^\infty (1+z)^{-\frac{1}{\alpha}}\, dz \overset{(\alpha \neq 1)}{=} 2\pi \left[(1+z)^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}} \right]_{z=0}^{z=\infty}$$

Se $1-\frac{1}{\alpha} \geq 0 \iff \alpha \geq 1$ si trova $\mathcal{L}^3(A_\alpha) = +\infty$,

Se $0 < \alpha < 1$ si trova

$$\mathcal{L}^3(A_\alpha) = 2\pi \frac{1}{\frac{1}{\alpha}-1} = 2\pi \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

ii) La frontiera di A_α è composta dai due grafici

$$z = \pm \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} - 1 \right)$$

con dominio $0 < x^2+y^2 \leq 1$.

Esercizio Si consideri l'insieme $M \subset \mathbb{R}^4$

$$M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2+w^2 = 4, \quad xy - zw = 1\},$$

i) Provare che M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^4$ e determinarne la dimensione.

ii) Dopo aver provato che esistono calcolare il minimo e il massimo della funzione $f(x,y,z,w) = x$ ristretta ad M.

Risoluzione. i) Siano $h_1, h_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$h_1(x,y,z,w) = x^2+y^2+z^2+w^2,$$

$$h_2(x,y,z,w) = xy - zw.$$

Gradienti

$$\nabla h_1 = (2x, 2y, 2z, 2w)$$
$$\nabla h_2 = (y, x, -w, -z).$$

Dobbiamo provare che la matrice $H = \begin{pmatrix} \nabla h_1 \\ \nabla h_2 \end{pmatrix}$ ha rango massimo $(=2)$ in tutti i punti di M.

Supponiamo che esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha \nabla h_1 + \beta \nabla h_2 = 0$

ovvero

$$\begin{cases} 2\alpha x = \beta y \\ 2\alpha y = \beta x \\ 2\alpha z = -\beta w \\ 2\alpha w = -\beta z \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow 2\alpha(x^2-y^2) = 0 \\ \\ \Rightarrow 2\alpha(z^2-w^2) = 0 \end{matrix}$$

Se $\alpha \neq 0$ deduciamo $x^2 = y^2$ e $z^2 = w^2$ da cui $x = \pm y$ e $z = \mp w$.

Nel caso $x = y$ e $z = -w$ si trova

$$\begin{cases} h_1 = 2x^2 + 2z^2 = 4 \\ h_2 = x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

Il caso $x = -y$ e $z = w$ è simile.

Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ si trova $x = y = z = w = 0$, impossibile.

Questo prova che M è una sottovarietà di dimensione 2.

ii) M è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^4$ e dunque compatto. Per il Teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo su M. Possiamo usare il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f = \frac{1}{2}\alpha \nabla h_1 + \beta \nabla h_2 ,$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = \alpha x + \beta y \\ 0 = \alpha y + \beta x \\ 0 = \alpha z - \beta w \\ 0 = \alpha w - \beta z . \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$ allora $\beta \neq 0$ (1^a equazione) e quindi $x = w = z = 0$. Impossibile (viola $h_2 = 1$). Quindi $\alpha \neq 0$.

Si trova

$$\begin{cases} y = -\frac{\beta}{\alpha} x & \Rightarrow \quad 1 = \alpha x + \beta y = x\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \circledast \\ \left.\begin{aligned} z &= \frac{\beta}{\alpha} w \\ w &= \frac{\beta}{\alpha} z \end{aligned}\right\} & \Rightarrow \quad z = \frac{\beta^2}{\alpha^2} z . \end{cases}$$

Quindi $z = 0$ oppure $\alpha^2 = \beta^2$. Il caso $\alpha^2 = \beta^2$ contraddice $\circledast$.

Quindi, $z = 0 \Rightarrow w = 0$. Le equazioni $h_1 = 4$ e $h_2 = 1$ diventano

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^2 + 1 = 0 .$$

Risolvendo $x^2 = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Deduciamo che $\max_M f = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ e $\min_M f = -\sqrt{2+\sqrt{3}}$. $\square$