Compiti d'Esame di Analisi 2B

Anno 2023

Roberto Monti

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 26/6/2023

Esercizio 1 (10 punti) Si considerino la curva $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(\sin(t), 2\cos(t) - 1\big), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

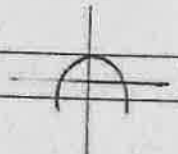
e la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy, \quad x^2+y^2 \neq 0.$$

i) Disegnare il supporto di γ.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega.$$

Risposte: i) Disegno:  ii) $I = \frac{3}{2}\pi$

Esercizio 2 (10 punti) Siano $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2+y^2+z^2 < 1\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}, \qquad (x,y,z) \in A,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) Calcolare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f \in L^1(A)$.

ii) Per α come al punto precedente, calcolare l'integrale

$$I_\alpha = \int_A f(x,y,z)dxdydz.$$

Risposte: i) $f \in L^1(A)$ per $\alpha \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ ii) $I_\alpha = 4\pi/(5-2\alpha)$

Esercizio 3 (10 punti) Si consideri l'insieme

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{1+x^2+y^2} - xy = \frac{1}{2}\right\}.$$

i) Stabilire se M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$.

ii) Posto $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\}$, $R > 0$, calcolare

$$R_0 = \max\{R > 0 : M \cap D_R = \emptyset\}.$$

Risposte: i) M sottovarietà si/no sì ii) $R_0 = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Si consideri la curva $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

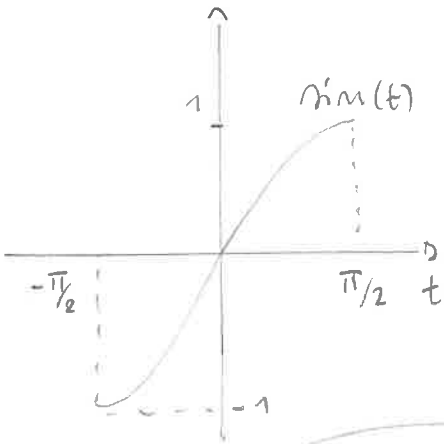
$$\gamma(t) = (\sin(t), \; 2\cos(t) - 1), \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

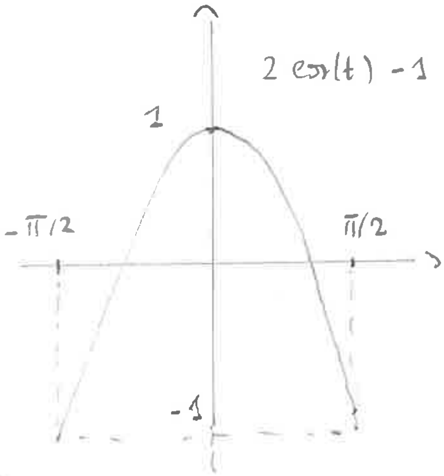
i) Disegnare il supporto di γ

ii) Calcolare l'integrale

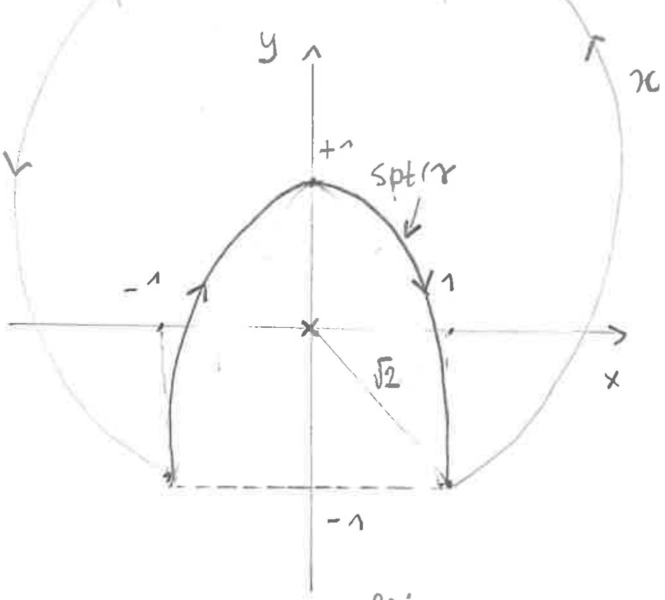
$$I = \int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy .$$

Risoluzione. Le coordinate di γ sono:





Quindi, nel piano xy:



mezza ellisse

La forma differenziale $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$

è chiusa e dunque esatta in $\mathbb{R}^2$ tolto l'asse y negativo.

Detta $\varkappa : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \varkappa(t) = \sqrt{2}\,(\cos t, \sin t)$

si ha $\int_{\gamma+\varkappa} \omega = 0$ e dunque

$$\int_\gamma \omega = -\int_\varkappa \omega = \int_{-\pi/4}^{5/4\,\pi} \left\{ \frac{-\sqrt{2}\sin t}{2}\sqrt{2}\,(-\sin t) + \frac{\sqrt{2}\cos t}{2}\sqrt{2}\cos t \right\} dt$$

$$= \int_{-\pi/4}^{5/4\,\pi} 1\,dt = \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\right)\pi = +\frac{3}{2}\pi.$$

Conto alternativo: un potenziale di ω per $x \neq 0$ è

$$f(x,y) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x \neq 0.$$

Dette $\gamma^- = \gamma|_{[-\pi/2,\,0]}$ e $\gamma^+ = \gamma|_{[0,\,\pi/2]}$ si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma^-} \omega + \int_{\gamma^+} \omega$$

$$= f(0^-,1) - f(-1,-1) + f(1,-1) - f(0^+,1)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

$\square$

Esercizio Siano $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 0 < x^2+y^2+z^2 < 1\}$ ed $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) Calcolare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f \in L^1(A)$.

ii) Calcolare per tali α l'integrale

$$I_\alpha = \int_A f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz ,$$

Risoluzione. i) Abbiamo

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

$$\leq x^2+y^2+z^2 + x^2+y^2 + x^2+z^2 + y^2+z^2$$

$$= 3(x^2+y^2+z^2).$$

Quindi

$$I_\alpha \leq 3 \int_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}} \, dx\,dy\,dz$$

$$= 3 \int_0^1 \left(\int_{\{x^2+y^2+z^2=r^2\}} \frac{1}{r^{2(\alpha-1)}} \, dH^2 \right) dr$$

Coarea oppure Coordinate sferiche

$$= 3 \int_0^1 \frac{1}{r^{2(\alpha-1)}} \cdot r^2 \cdot 4\pi \, dr$$

$$= 12\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-4}} \, dr < \infty \iff 2\alpha - 4 < 1$$

$$\iff \alpha < 5/2$$

Questo prova che

$$\alpha < 5/2 \implies I_\alpha < \infty .$$

Posto $A^+ = \{ (x,y,z) \in A \,;\, x>0,\ y>0,\ z>0 \}$

avremo

$$I_\alpha \geq \int_{A^+} f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

$$\geq \int_{A^+} \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\, dx\,dy\,dz \qquad \text{per simmetria}$$

$$= \frac{1}{8} \int_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}}\, dx\,dy\,dz.$$

I conti precedenti mostrano che

$$\alpha \geq 5/2 \implies I_\alpha = +\infty .$$

ii) Osserviamo che (per $\alpha < 5/2$)

$$\int_A \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\, dx\,dy\,dz = 0$$ per cambio di variabile $x \mapsto -x$

Lo stesso con xz o yz al posto di xy.

Quindi

$$I_\alpha = \int_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}}\, dx\,dy\,dz = 4\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-4}}\, dr$$

$$= 4\pi \left[\frac{r^{-2\alpha+5}}{5-2\alpha} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{5-2\alpha}$$

Conto alternativo con le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0<r<1 \\ 0<\theta<2\pi \\ 0<\varphi<\pi \end{array}$$

$$I_\alpha = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\sin\varphi+\cos\varphi)^2}{r^{2\alpha}}\, r^2\sin\varphi \, d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 r^{4-2\alpha}\,dr\right)}_{\text{converge per } \alpha<\frac{5}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1+\overbrace{2\cos\theta\sin\theta}^{\text{dispari in }\theta/\text{periodico} \to \text{integrale}=0}\sin^2\varphi+2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + 2\underbrace{\sin\theta}_{\text{dispari in }\theta}\sin\varphi\cos\varphi\right)\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{5-2\alpha}\left\{2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi + \underbrace{2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta}_{=0}\right\}$$

$$= \frac{4\pi}{5-2\alpha},$$

$\square$

Esercizio Si consideri l'insieme $M \subset \mathbb{R}^2$

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad \frac{1}{1+x^2+y^2} - xy = \frac{1}{2} \right\}.$$

i) Stabilire se M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$.

ii) Per $R > 0$ si consideri $D_R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2 \}$.
Calcolare

$$R_0 = \max \{ R > 0 : D_R \cap M = \emptyset \}.$$

Risoluzione. Una funzione definiente per M è

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} - xy - \frac{1}{2}.$$

Chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Controlliamo l'ipotesi di rango massimo:

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} - y \\[2ex] f_y = \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)} - x. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema $\nabla f = 0$. L'equazione $x f_x - y f_y = 0$ fornisce

$$-2 \frac{x^2 - y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

e dunque $x = \pm y$. Nel caso $x = y$, $f_x = 0$ diventa

$$-x \left(\frac{2}{(1+2x^2)^2} + 1 \right) = 0 \iff x = 0$$

Tuttavia $(0,0) \notin M$. Nel caso $x = -y \neq 0$ si arriva a

$$\frac{2}{(1+2x^2)^2} - 1 = 0 \iff 2 = (1+2x^2)^2$$
$$\iff \sqrt{2} - 1 = 2x^2$$

e dunque $x_0 = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ e $y_0 = \mp \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

In entrambi i casi si trova

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{1+\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \neq 0.$$

Dunque $(x_0, y_0) \notin M$.

Conclusione: M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ (curva).

ii) La funzione $g(x,y) = x^2+y^2$ assume minimo su M. Se infatti $D_R \cap M \neq \emptyset$ per un $R > 0$, allora $\overline{D_R} \cap M \neq \emptyset$ è compatto e g ha minimo su tale insieme.

Possiamo usare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange: esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla g(x,y) = \lambda \nabla f(x,y)$$

nei punti di minimo. Ovvero

$$\begin{cases} 2x = \lambda \left(\dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} - y \right) \\ 2y = \lambda \left(\dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} - x \right) \end{cases}$$

Moltiplicando la prima riga per y, la seconda per x e sottraendo:

$$0 = \lambda\left(-y^2 + x^2\right).$$

Il caso $\lambda = 0$ implica $x = y = 0$ (punto fuori da M). Quindi deve essere $x = \pm y$. Nel caso $x = -y$ si trova

$$0 = f(x,-x) = \frac{1}{1+2x^2} + x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\iff \quad 1 = (1+2x^2)\left(-x^2 + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\iff \quad 2 = (1+2x^2)(-2x^2+1) = \cancel{-2x^2} + 1 - 4x^4 \cancel{+2x^2}$$

$$\iff \quad 1 = -4x^4 \quad \text{impossibile.}$$

Nel caso $x = y$ si trova

$$0 = f(x,x) \iff 2 = 2x^2 + 1 + 4x^4 + 2x^2$$

$$\iff \quad 4x^4 + 4x^2 - 1 = 0$$

$$\iff \quad x^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{4} \qquad \text{solo } +$$

$$\iff \quad x^2 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{4} \overset{+}{=} \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Dunque

$$R_0 = \sqrt{\sqrt{2}-1}\,.$$

Soluzione alternativa della parte ii). (Soluzione di L. C.)

Dobbiamo calcolare il minimo di $f(x,y) = x^2+y^2$ per $(x,y) \in M$. Per $(x,y) \in M$ abbiamo:

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2} + xy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{con } = \text{ per } x=y}}{\leq} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1+x^2+y^2}{2}$$

Dunque $(1+x^2+y^2)^2 \geq 2 \iff x^2+y^2 \geq \sqrt{2}-1$.

Si deduce che $R_0 \geq \sqrt{\sqrt{2}-1}$. Con $x=y$ si hanno tutti "=". Un punto $(x,y) \in M$ con $x=y$ esiste:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Quindi $R_0 = \sqrt{\sqrt{2}-1}$.

$\square$

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 14/7/2023

Esercizio 1 (8 punti) Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| + |y| < 1\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|x|+|y|}}, \qquad (x,y) \in A.$$

Calcolare l'integrale

$$I = \int_A f(x,y)dxdy.$$

Risposta: $I =$

Esercizio 2 (12 punti) Sia $n \geq 2$. Per $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$, ovvero $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, si consideri l'insieme

$$\Sigma_v = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 - \log(1+|x|^2) - \langle x, v\rangle = 1\big\}.$$

i) Stabilire se Σ_v è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$.

ii) Provare che esistono

$$m_v = \min\{|x| : x \in \Sigma_v\},$$
$$M_v = \overset{\max}{\cancel{\min}}\{|x| : x \in \Sigma_v\}.$$

Stabilire se m_v ed M_v dipendono da $v \in \mathbb{S}^{n-1}$.

iii) Determinare m_v ed M_v (non si calcolano in modo esplicito).

Risposte: i) Σ_v sottovarietà si/no	ii) dipendono da $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ si/no

Esercizio 3 (10 punti) Sia $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria, e per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale

$$I_\alpha = \int_S \frac{x(x-\alpha)+y^2}{(x-\alpha)^2+y^2} d\mathscr{H}^1.$$

i) Calcolare I_α per $\alpha = 1$.

ii) Calcolare I_α per $\alpha > 1$.

iii) (Facoltativo) Verificare che $I_\alpha = 2\pi$ per $\alpha \in [0,1)$.

Risposte: i) $I_1 =$	ii) $I_\alpha =$	per $\alpha > 1$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| + |y| < 1\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|x| + |y|}}, \quad (x,y) \in A.$$

Calcolare l'integrale

$$I = \int_A f(x,y)\, dxdy.$$

Risoluzione. La f è continua e positiva su A. L'integrale è ben definito. Per simmetria e con Fubini-Tonelli si trova:

$$I = 4 \int_{\{x+y<1,\ x>0 \text{ e } y>0\}} \frac{1}{\sqrt{x+y}}\, dx\, dy$$

$$= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{\sqrt{x+y}}\, dy\, dx$$

$$= 4 \int_0^1 \left[2 (x+y)^{\frac{1}{2}} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= 8 \int_0^1 \left\{ 1 - x^{1/2} \right\} dx = 8 - 8 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= 8 - 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Soluzione alternativa con integrazione per sopralivelli:

$$I = \int_0^\infty \mathcal{L}^2(\{(x,y)\in A : f(x,y) > t\})\, dt$$

$$= \int_0^1 \mathcal{L}^2(A)\, dt + \int_1^{+\infty} \mathcal{L}^2(\{|x|+|y| < \tfrac{1}{t^2}\})\, dt$$

$$= \mathcal{L}^2(A) + \int_1^\infty \frac{1}{t^4}\, \mathcal{L}^2(A)\, dt$$

$$= 2 + 2\left[-\frac{1}{3}\, t^{-3}\right]_{t=1}^{t=\infty} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

$\square$

Esercizio Sia $n \geq 2$. Per $v \in S^{n-1}$ - ovvero $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$ - si consideri

$$\Sigma_v = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ |x|^2 - \log(1+|x|^2) - \langle x, v \rangle = 1 \}.$$

i) Stabilire se Σ_v è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$.

ii) Provare che esistono

$$m_v = \min \{ |x| \ ; \ x \in \Sigma_v \}$$
$$M_v = \max \{ |x| \ ; \ x \in \Sigma_v \}.$$

È vero che m_v ed M_v sono indipendenti da $v \in S^{n-1}$?

iii) Caratterizzare m_v ed M_v. Suggerimento: non si calcolano in modo esplicito, ridursi allo studio dell'equazione $t^2 - \log(1+t^2) - t = 1$, con $t \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. i) Una funzione definiente per Σ_v è

$$f(x) = |x|^2 - \log(1+|x|^2) - \langle x, v \rangle,$$

suo gradiente:

$$\nabla f(x) = 2x - \frac{2x}{1+|x|^2} - v$$

Il sistema di equazioni $\nabla f(x) = 0$ implica che x è parallelo a v, ovvero $x = tv$ per $t \in \mathbb{R}$.
Siccome $0 \notin \Sigma_v$ sarà $t \neq 0$ e inoltre

$$2t - \frac{2t}{1+t^2} = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$2t\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) = 1 \iff \frac{2t^3}{1+t^2} = 1.$$

La derivata di $\phi(t) = \dfrac{2t^3}{1+t^2}$ è

$$\phi'(t) = \frac{6t^2(1+t^2) - 2t^3 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2t^4 + 6t^2}{(1+t^2)^2} \geq 0.$$

Quindi $\phi(t) = 1$ ha l'unica soluzione $t = 1$.

Vediamo se $x = v$ appartiene ad M:

$$f(v) = |v|^2 - \log(1+|v|^2) - |v|^2 = -\log 2 \neq 1$$

Dunque $v \notin M$.

Poiché $\nabla f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Sigma_v$ segue che Σ_v è una ipersuperficie.

ii) Certamente $\Sigma_v \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme chiuso.

Siccome
$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{|x|^2} = 1$$
esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq \frac{1}{2}|x|^2 - C$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Per $x \in M$:

$$1 = f(x) \geq \frac{1}{2}|x|^2 - C \quad \Rightarrow \quad |x| \leq \sqrt{2(1+C)}.$$

Quindi Σ_v è limitato. Per Heine-Borel, $\Sigma_v \in \mathbb{R}^n$ è un insieme compatto, quindi m_v e M_v esistono per il Teorema di Weierstrass.

Sia $T \in O(n)$ una trasformazione ortogonale. Allora

$$\begin{aligned}
\Sigma_{Tv} &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 - \log(1+|x|^2) - \langle T^{-1}x, v\rangle = 1\} \\
&= \{T\xi : \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\xi|^2 - \log(1+|\xi|^2) - \langle \xi, v\rangle = 1\} \\
&= T(\Sigma_v).
\end{aligned}$$

Siccome $|Tx| = |x|$ deduciamo che m_v e M_v non dipendono da $v \in S^{n-1}$.

iii) Siccome $\nabla |x| = \frac{x}{|x|}$, i punti di minimo/massimo vincolati su M verificano

$$\frac{x}{|x|} = \lambda \nabla f(x) \quad \text{per qualche } \lambda \in \mathbb{R},$$

ovvero

$$\frac{x}{|x|} = \lambda \left\{ 2x - \frac{2x}{1+|x|^2} - v \right\}.$$

Deve essere $x = tv$ per qualche $t \in \mathbb{R}$. Inserendo in $f(x) = 1$ si trova

$$\psi(t) := t^2 - \log(1+t^2) - t = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Derivata di ψ:

$$\psi'(t) = 2t - \frac{2t}{1+t^2} - 1 = 2t\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) - 1$$

$$= \frac{2t^3}{1+t^2} - 1 \geq 0 \iff t \geq 1$$

Dunque esistono $t_- < 0$ e $t_+ > 1$ tali che

$$\psi(t) = 0 \iff t \in \{t_-, t_+\}$$

Avremo $m = m_v = \min\{|t_-|, t_+\}$ e
$M = M_v = \max\{|t_-|, t_+\}$.

$\square$

Esercizio Sia $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2+y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria. Per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale

$$I_\alpha = \int_S \frac{x(x-\alpha)+y^2}{(x-\alpha)^2+y^2} \, dH^1 .$$

i) Calcolare I_α per $\alpha = 1$;

ii) Calcolare I_α per $\alpha > 1$;

iii) Facoltativo: provare che $I_\alpha = 2\pi$ per $\alpha \in [0,1)$.

Risoluzione, i) Sia $S^+ = \{(x,y) \in S ; \ y > 0\}$. Per simmetria:

$$I_1 = 2 \int_{S^+} \frac{x(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} \, dH^1 .$$

Abbiamo $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ con $\sqrt{1+f'(x)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Per la formula della lunghezza

$$I_1 = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{x(x-1)+1-x^2}{(x-1)^2+1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \frac{-x+1}{-2x+1+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \Big[\arcsin x\Big]_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi .$$

ii) La normale esterna ad S è $N = (x,y)$.

Dunque

$$\frac{x(x-\alpha)+y^2}{(x-\alpha)^2+y^2} = \left\langle \frac{(x-\alpha, y)}{(x-\alpha)^2+y^2}, N \right\rangle$$

Per $\alpha > 1$, il campo $F(x,y) = \dfrac{(x-\alpha, y)}{(x-\alpha)^2+y^2}$

è ben definito in tutto il disco $D = \{x^2+y^2<1\}$.

Per il Teorema della divergenza

$$I_\alpha = \int_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy .$$

Conti:

$$\operatorname{div} F = \left(\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+y^2}\right)_x + \left(\frac{y}{(x-\alpha)^2+y^2}\right)_y$$

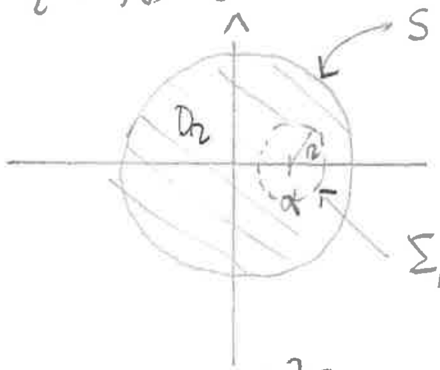
$$= \frac{(x-\alpha)^2+y^2-2(x-\alpha)^2}{[\ \dots\ ]^2} + \frac{(x-\alpha)^2+y^2-2y^2}{[\ \dots\ ]^2}$$

$$= 0$$

Quindi $I_\alpha = 0$ per $\alpha > 1$.

iii) Introduciamo un parametro $r>0$ piccolo

e sia $D_r = \{(x,y) \in D ;\ (x-\alpha)^2+y^2 > r^2\}$:



Σ_r = circonferenza centrata in $(\alpha, 0)$ di raggio $r>0$ piccolo.

La normale esterna a ∂D_r nei punti di Σ_r è

$$N_{\Sigma_r} = - \frac{(x-\alpha, y)}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}} .$$

Per il Teorema della divergenza

$$0 = \int_{D_r} \underset{\substack{\text{su } D_r}}{\underset{0}{\underset{\parallel}{\operatorname{div} F(x,y)}}} \, dx dy = \underbrace{\int_S \langle F, (x,y) \rangle \, dH^1}_{= I_\alpha} -$$

$$- \int_{\Sigma_r} \langle F, \frac{(x-\alpha, y)}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}} \rangle \, dH^1 .$$

Quindi per $\alpha \in [0,1)$ si ha:

$$I_\alpha = \int_{\Sigma_r} \left\langle \frac{(x-\alpha, y)}{(x-\alpha)^2 + y^2} , \frac{(x-\alpha, y)}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}} \right\rangle dH^1$$

$$= \frac{r^2}{r^2 \cdot r} \int_{\Sigma_r} 1 \, dH^1 = \frac{1}{r} H^1(\Sigma_r) = 2\pi ,$$

(non dipende da $r > 0$ piccolo)

Dunque $I_\alpha = 2\pi$ per $\alpha \in [0,1)$.

$\square$

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 1/9/2023

Esercizio 1 (8 punti) Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione e si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (\varphi(x) + y^3)dx + (\varphi(y) - x^3)dy.$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ per qualche funzione φ, ed eventualmente calcolarla.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega,$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Risposte: i) ω esatta per $\varphi =$ nessuna	ii) $I = -3\pi/2$

Esercizio 2 (12 punti) Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1,\ z^2 + w^2 = 1/4\}$$

e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z, w) = x + y^2 + z^3 + w^4$.

i) Stabilire se M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^4$.

ii) Provare che esiste e calcolare il massimo di f ristretta ad M.

Risposte: i) M sottovarietà si/no	ii) $\max_M f = 11/8$

Esercizio 3 (10 punti) In $\mathbb{R}^4$ usiamo le coordinate $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ e sia $A = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| > 1\}$. Dopo averne discusso la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare l'integrale

$$I_\alpha = \int_A \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}{|x|^\alpha} dx.$$

Risposte: $I_\alpha = 2\pi^2/(\alpha-6)$ per $\alpha > 6$, altrimenti diverge.

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Sia $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ e si consideri la 1-forma differenziale su $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (\phi(x) + y^3)\,dx + (\phi(y) - x^3)\,dy .$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ per qualche ϕ ed eventualmente calcolarla.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega$$

dove $\gamma : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Risoluzione. i) Controlliamo se ω è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi(x) + y^3) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}(\phi(y) - x^3)$$

$$\Updownarrow$$

$$3y^2 = -3x^2 \quad \underline{\text{NON}} \text{ verificato.}$$

Dunque ω non è esatta per alcuna ϕ.

ii) Posto $P = \phi(x) + y^3$ e $Q = \phi(y) - x^3$ abbiamo $\omega = P\,dx + Q\,dy$ e per il Teorema della divergenza (Formula di Gauss-Green):

$$I = \int_\gamma \omega = \int_{\{x^2+y^2<1\}} \operatorname{div}(Q, -P)\,dxdy$$

$$= \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left(\partial_x (\phi(y) - x^3) + \partial_y(-\phi(x) - y^3) \right) d$$

e dunque

$$I = \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left(-3x^2 - 3y^2 \right) dx\,dy \quad = \text{[Coord. polari]}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-3 r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -6\pi \int_0^1 r^3\, dr = -\frac{6}{4}\pi \left[r^4 \right]_{r=0}^{r=1}$$

$$\boxed{I = -\frac{3}{2}\pi,}$$

Conto alternativo. La 1-forma $\phi(x)dx + \phi(y)dy$ è esatta. Dunque

$$I = \int_\gamma \omega = \int_\gamma y^3 dx - x^3 dy =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t)\, dt.$$

Osserviamo che $\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt$, per traslazione di $\pi/2$. Per parti

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot \sin t\, dt =$$

$$= \left[\sin^3 t\, (-\cos t) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 3 \sin^2 t \cos^2 t\, dt$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \sin^4 t)\, dt$$

e quindi $\quad 4 \int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt = 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt,$

Infine

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t \;\sin t\, dt = \left[-\cos t \sin t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t\,)\, dt = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt$$

da cui $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi$,

Tornando sopra : $\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt = \frac{3}{4}\pi$ e

infine

$$I = -\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

$\square$

Esercizio Sia $M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 ;\ x^2+y^2 = 1 \text{ e } z^2+w^2 = 1/4\}$
e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z,w) = x+y^2+z^3+w^4$.
i) Provare che M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^4$.
ii) Calcolare il massimo di f ristretta su M.

Risoluzione. i) Sia $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad (h \in C^\infty(\mathbb{R}^4;\mathbb{R}^2))$

$$h(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ z^2+w^2-1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x,y,z,w) \\ h_2(x,y,z,w) \end{pmatrix}$$

Allora

$$M = \{(x,y,z,w) : h(x,y,z,w) = 0\}.$$

Controlliamo l'ipotesi di rango massimo. La matrice Jacobiana di h è

$$Jh(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

Su M si ha $(x,y) \neq (0,0)$ e $(z,w) \neq (0,0)$. Quindi le due righe di Jh sono linearmente indipendenti su M. Dunque $\operatorname{rg}(Jh) = 2$ su M.
Concludiamo che M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.

ii) L'insieme M è chiuso e limitato ($|x|, |y|, |z|, |w| \leq 1$ su M). Quindi M è compatto ed f assume massimo su M (Weierstrass). Cerchiamo il punto di massimo con i moltiplicatori di Lagrange: esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che il punto di massimo $(x,y,z,w) \in M$ verifica

$$\nabla f(x,y,z,w) = \lambda \nabla h_1(x,y,z,w) + \mu \nabla h_2(x,y,z,w).$$

Il sistema è:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x & \Rightarrow \quad \lambda \neq 0 \ \text{ e } \ x \neq 0 \\ 2y = 2\lambda y & \Rightarrow \quad y = 0 \ \text{ oppure } \ \lambda = 1 \\ 3z^2 = 2\mu z & \Rightarrow \quad z = 0 \ \text{ oppure } \ 3z = 2\mu \\ 4w^3 = 2\mu w & \Rightarrow \quad w = 0 \ \text{ oppure } \ 4w^2 = 2\mu \end{cases}$$

Tenuto conto che $x^2+y^2=1$, le prime due equazioni hanno le soluzioni

$$(x,y) = (\pm 1, 0), \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

La somma $x+y^2$ vale in questi punti:

$$\pm 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}+\frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad \leftarrow \text{valore massimo.}$$

Tenuto conto che $z^2+w^2 = 1/4$, la terza e quarta equazione hanno soluzioni

$$(z,w) = \left(\pm\frac{1}{2}, 0\right), (0, \pm 1/2)$$

a cui sono da aggiungere le soluzioni con $z \neq 0$ e $w \neq 0$.
In questo caso $3z = 2\mu = 4w^2$ ovvero $w^2 = \frac{3}{4}z$,
Sostituendo in $z^2+w^2 = 1/4$ si trova:

$$z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4z^2+3z-1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{-3\pm 5}{8}$$

e quindi $z = -1, 1/4$. Il caso $z=-1$ porta a $w^2 = -\frac{3}{4}$ che non ha soluzione. Per $z = 1/4$ si trova $w = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

Nei punti $(\pm 1/2, 0)$, $(0, \pm 1/2)$, $\left(1/4, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ la somma z^3+w^4 assume i valori

$$\pm\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{64}+\frac{9}{256}$$

Il valore $+\frac{1}{8}$ è quello massimo. Dunque $\boxed{\max_M f = \frac{5}{4}+\frac{1}{8} =}$

□

Esercizio In $\mathbb{R}^4$ usiamo le coordinate $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
Dopo aver discusso la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare l'integrale

$$I_\alpha = \int_{\{x\in\mathbb{R}^4 : |x|>1\}} \frac{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2}{|x|^\alpha}\, dx$$

Risoluzione. L'integranda è continua e non negativa. L'integrale è ben definito. Abbiamo

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{C}\, |x|^2$$

Dunque

$$I_\alpha \leq C \int_{\{|x|>1\}} \frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\, dx \overset{\text{Coarea}}{=} C \int_1^{+\infty} \int_{\{|x|=r\}} \frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\, dH^3(x)\, dr =$$

$$= C \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{\alpha-2}}\, H^3(\{|x|=r\})\, dr$$

$$= C \cdot H^3(\{|x|=1\}) \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha-2}}\, r^3\, dr$$

$$= C \cdot H^3(\{|x|=1\}) \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha-5}}\, dr < \infty \iff \alpha > 6$$

Su $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ si ha $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \geq |x|^2$ e con un argomento \ stima analogo al precedente si prova che: $\alpha \leq 6 \Rightarrow I_\alpha = +\infty$.

Supponiamo $\alpha > 6$. Per $i \neq j$ si ha

$$\int_{\{|x|>1\}} \frac{x_i x_j}{|x|^\alpha}\, dx = 0 .$$

Lo si vede per simmetria col cambio di variabile $x_i \to -x_i$ e le altre coordinate rimangono fisse.

Quindi

$$I_\alpha = \int_{\{|x|>1\}} \frac{|x|^2}{|x|^\alpha}\, dx = [\text{ come sopra }]$$

$$= H^3(\{|x|=1\}) \int_1^\infty \frac{1}{r^{\alpha-5}}\, dr$$

$$= \underbrace{H^3(\{|x|=1\})}_{\substack{\parallel \\ S^3}} \frac{1}{\alpha-6},$$

Sappiamo che $H^3(S^3) = 4\, \mathcal{L}^4(\{|x|<1\}) = 4\,\omega_4$

con

$$\omega_4 = \left.\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\right|_{n=4} = \frac{\pi^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{2!}.$$

Quindi

$$\boxed{I_\alpha = \frac{2\pi^2}{\alpha-6}},$$

Un conto alternativo si può fare usando ripetutamente le coordinate polari. Poniamo

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \rho\cos\phi \\ x_4 = \rho\sin\phi \end{cases}. \qquad \begin{matrix} r,\rho>0 \\ \theta,\phi\in[0,2\pi) \end{matrix}$$

Si trova

$$I_\alpha = \int_{\{|x|>1\}} |x|^{2-\alpha}\, dx = (2\pi)^2 \int_{\{r^2+\rho^2>1,\ r>0 \text{ e } \rho>0\}} (r^2+\rho^2)^{\frac{2-\alpha}{2}}\, r\rho\, dr\, d\rho$$

Ora facciamo di nuovo un cambiamento di variabile con coordinate polari:

$$\begin{cases} r = s\cos\psi \\ \rho = s\sin\psi \end{cases}$$

$s > 1$
e $\psi \in (0, \pi/2)$
(Primo quadrante), perché $r, \rho > 0$

Si trova

$$I_\alpha = (2\pi)^2 \int_0^{\pi/2} \int_1^{+\infty} s^{2-\alpha} \cdot s^2 \cos\psi \sin\psi \; s\,ds\,d\psi$$

$$= 4\pi^2 \left(\int_0^{\pi/2} \cos\psi \sin\psi \, d\psi \right) \left(\int_1^{\infty} s^{5-\alpha} \, ds \right)$$

$$= 4\pi^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha - 6} = \frac{2\pi^2}{\alpha - 6}.$$

$\square$

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 14/9/2023

Esercizio 1 (10 punti) In $\mathbb{R}^2$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = y^2(x-y)dx + x^2(x+y)dy.$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ ed eventualmente calcolarne un potenziale.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega,$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$. Sugg.: Teorema della divergenza.

Risposte: i) ω esatta si/no no	ii) $I = + \frac{3}{2}\pi$

Esercizio 2 (10 punti) Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2y^2 - z^4 = 0\}.$$

i) Determinare il piú piccolo insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^3$ tale che $M \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$.

ii) Per $R > 0$ si consideri la porzione di insieme

$$M_R = \{(x, y, z) \in M : |x| < R,\ |y| < R\}.$$

Calcolare l'area $\mathscr{H}^2(M_R)$.

Risposte: i) $C = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$	ii) $\mathscr{H}^2(M_R) = 32/3 \cdot \sqrt{2}\, R^2$

Esercizio 3 (10 punti) Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria e per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale

$$I_\alpha = \int_S \frac{x(x-\alpha) + y^2}{(x-\alpha)^2 + y^2} d\mathscr{H}^1.$$

i) Calcolare I_α per $\alpha = 1$.

ii) Calcolare I_α per $\alpha > 1$.

iii) (Facoltativo) Verificare che $I_\alpha = 2\pi$ per $\alpha \in [0, 1)$.

Risposte: i) $I_1 = \pi$	ii) $I_\alpha = 0$	per $\alpha > 1$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio In $\mathbb{R}^2$ si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = y^2(x-y)\,dx + x^2(x+y)\,dy .$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ ed eventualmente calcolarne un potenziale.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega$$

dove $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0,2\pi]$. Sugg.: Formula di Gauss-Green - Teorema della divergenza.

Risoluzione i) Controlliamo se ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2(x-y)\right) = 2y(x-y) - y^2 = 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2(x+y)\right) = 2x(x+y) + x^2 = 2xy + 3x^2 .$$

Siccome $3x^2 \neq -3y^2$ su $\mathbb{R}^2$, la forma non è chiusa e dunque neppure esatta.

ii) Abbiamo $\omega = P\,dx + Q\,dy$ con $P = y^2(x-y)$ e $Q = x^2(x+y)$. Per la formula di Gauss-Green

$$\int_\gamma \omega = \int_{\{x^2+y^2<1\}} \operatorname{div}(Q, -P)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(+x^3 + x^2 y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 x - y^3\right)\right] dx\,dy$$

$$= \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left[+3x^2 + \cancel{2xy} - \cancel{2xy} + 3y^2 \right] dx\,dy$$

$$= +3 \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left[x^2+y^2 \right] dx\,dy = \text{[Coordinate polari]}$$

$$= +3 \cdot 2\pi \int_0^1 r^2 \cdot r\,dr = +6\pi \cdot \frac{1}{4} = +\frac{3}{2}\pi ,$$

$\square$

<u>Esercizio</u> Si consideri l'insieme $M \subset \mathbb{R}^3$

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \quad 4x^2y^2 - z^4 = 0 \} .$$

i) Determinare il più piccolo insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^3$ tale che $M \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di classe C^∞.

ii) Per $R>0$ si consideri la porzione di insieme

$$M_R = \{ (x,y,z) \in M : \quad |x| < R \text{ e } |y| < R \} ,$$

Calcolare l'area $\mathcal{H}^2(M_R)$.

Risoluzione i) Una funzione definiente per M è $f(x,y,z) = 4x^2y^2 - z^4$. Il suo gradiente è

$$\nabla f(x,y,z) = \left(8xy^2, \; 8x^2y, \; -4z^3 \right) .$$

L'equazione (sistema) $\nabla f = 0$ fornisce $z=0$ e $x \cdot y = 0$.
Dunque

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; x \cdot y = 0 \quad \text{e} \quad z = 0 \}$$

ed $M \setminus C$ è una sottovarietà di classe C^∞.
C è l'unione dell'asse x e dell'asse y.
L'equazione $f(x,y,z) = 0$ si esplicita in z:

$$z = \pm \sqrt{2\,|x \cdot y|}$$

In effetti su C si "toccano" da sopra e da sotto due distinti grafici. M non è regolare qui.

ii) Posto $Q_R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < R$ e $|y| < R \}$, e $g : Q_R \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = +\sqrt{2|xy|}$, per la formula dell'area dei grafici e per simmetria si ha

$$H^2(M_R) = 2 \int_{Q_R} \sqrt{1 + |\nabla g(x,y)|^2}\, dx\,dy .$$

Ancora per simmetria

$$\int_{Q_R} \sqrt{1+|\nabla g(x,y)|^2}\, dx\,dy = 4 \int_{\left\{ \substack{0<x<R \\ 0<y<R} \right\}} \sqrt{1+|\nabla g(x,y)|^2}\, dx\,dy .$$

Per $x>0$ ed $y>0$ si ha

$$\nabla g(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2xy}} \cdot \cancel{2}\, (y, x)$$

e dunque

$$1 + |\nabla g(x,y)|^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{(x+y)^2}{2xy} .$$

In definitiva troviamo

$$H^2(M_R) = 8 \int_{\left\{ \substack{0<x<R, \\ 0<y<R} \right\}} \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\, dx\,dy$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_0^R \int_0^R \left[\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right] dx\,dy$$

$$= \frac{16}{\sqrt{2}} \int_0^R \int_0^R \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\, dx\,dy$$

$$H^2(M_R) = \frac{16}{\sqrt{2}} \left(\int_0^R \sqrt{x}\, dx \right) \left(\int_0^R \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy \right)$$

$$= \frac{16}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}} \cdot 2 R^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{64}{3 \cdot \sqrt{2}} R^2$$

$$= \frac{32}{3} \sqrt{2}\, R^2,$$

$\square$

Per l'Esercizio 3 vedi Esame di Luglio 2023

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 5/2/2024

Esercizio 1 (10 punti) In $\mathbb{R}^2$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = y^2(x-y)dx + x^2(x+y)dy.$$

i) Stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2$ ed eventualmente calcolarne un potenziale.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega,$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Risposte: i) ω esatta si/no	ii) $I =$

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri l'insieme $M \subset \mathbb{R}^3$

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 2\}.$$

i) Stabilire se M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ oppure no.

ii) Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x + y + z$, assume massimo su M oppure no ed eventualmente calcolarlo.

Risposte: i) M sottovarietà si/no	; ii) $\max_M f =$

Esercizio 3 (10 punti) Si consideri l'insieme $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro. Studiare la convergenza e se possibile calcolare il seguente integrale

$$I_\alpha = \int_S \varphi(x,y,z) d\mathscr{H}^2.$$

Risposta: $I_\alpha =$

---

2 ore e 30 minuti a disposizione

<u>Esercizio</u> Si consideri l'insieme $S \subset \mathbb{R}^3$

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z = 0 \}.$$

Sia poi $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Studiare la convergenza e se possibile calcolare il seguente integrale

$$I_\alpha = \int_S \varphi(x,y,z) \, d\mathcal{H}^2.$$

Risoluzione. La superficie S è il grafico della funzione

$$g(x,y) = -xy \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per la formula dell'area

$$I_\alpha = \int_S \varphi \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + |\nabla g(x,y)|^2} \, dx\,dy$$

dove $\nabla g = (-y, -x)$ e $\sqrt{1+|\nabla g|^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

Dunque

$$I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} \, dx\,dy \overset{\text{coord. polari}}{=} 2\pi \int_0^\infty (1+r^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} \, r\,dr$$

e quindi

$$I_\alpha = \pi \left[\frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}-\alpha}}{\frac{3}{2}-\alpha} \right]_{r=0}^{r=\infty} \qquad \left(\text{se } \alpha \neq \tfrac{3}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < \frac{3}{2} \\ \dfrac{\pi}{\alpha - 3/2} & \text{se } \alpha > \frac{3}{2} \end{cases},$$

Quando $\alpha = 3/2$:

$$I_\alpha = 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{1+r^2}\, dr = \pi \left[\log(1+r^2) \right]_{r=0}^{r=\infty}$$

$$= +\infty .$$

$\square$

__Esercizio__ Sia $M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+2xyz = 2 \}$.

i) Stabilire se $M \subset \mathbb{R}^3$ è una sottovarietà differenziabile

ii) Stabilire se la funzione $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$, ha massimo su M ed eventualmente calcolarlo.

i) Consideriamo la funzione definiente $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xyz-2 ,$$

Le sue derivate parziali sono:

$$g_x = 2x+2yz ,$$

$$g_y = 2y+2xz ,$$

$$g_z = 2z+2xy .$$

Il sistema $\nabla g(x,y,z) = 0$ fornisce:

$$\begin{cases} x+yz = 0 \\ y+xz = 0 \\ z+xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{"} \\ y-yz^2 = 0 \\ z-zy^2 = 0 \end{cases}$$

La terza equazione $z(1-y^2)=0$ fornisce $z=0$ oppure $y=\pm 1$

Ma $z=0 \Rightarrow x=y=0$ (1^ e 2^ eq.). Si trova il punto $O=(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ e tuttavia $O \notin M$.

Se $y=\pm 1$ la seconda equazione dà $z=-1$ e $z=1$ (entrambe), se $y=\pm 1$ la prima equazione dà $x=\mp z$.

Dunque si trovano i punti $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$ per $y=+1$, mentre per $y=-1$ si trovano $(1\ -1,1)$, $(-1,-1,$-

In tutti questi punti: $g = 3-2-2 = -1 \neq 0$ e dunque non sono in M, Conclusione: M è sottovarietà

ii) Con $z=-1$ l'equazione $x^2+y^2+z^2+2xyz=2$ diventa $x^2+y^2-2xy=1$ ovvero $(x-y)^2=1$.

Dunque $(x, x-1, -1) \in M \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

In questi punti:

$$f(x, x-1, -1) = x + x - 1 - 1 = 2x-2$$

Deduciamo che $\sup_M f = +\infty$.

$\square$