

Analisi Matematica 2 Parte B – 2025

Programma provvisorio

1. Sottovarietà differenziabili di \mathbb{R}^n e moltiplicatori di Lagrange. Definizione di sottovarietà come luogo di zeri. Caso grafico. Definizione parametrica. Teorema di equivalenza. Spazio tangente e spazio normale. Teorema di caratterizzazione dello spazio tangente. Massimi e minimi vincolati su una sottovarietà. Teorema sui moltiplicatori di Lagrange. Esercizi ed esempi.

2. Curve e 1-forme differenziali in \mathbb{R}^n . Richiami sulle curve, curve rettificabili e lunghezza. Formula della lunghezza. Definizione di integrale curvilineo. 1-forme differenziali chiuse ed esatte. Definizione di integrale di una 1-forma lungo una curva. Teorema sulle caratterizzazioni equivalenti per le forme esatte. Insiemi contraibili. Teorema di Poincaré. Esempi ed esercizi.

3. Misura ed integrale di Lebesgue. Misure esterne e misure. Insiemi misurabili. Teorema di Carathéodory. Teorema sulla misura di insiemi unione e intersezione monotona. Costruzione della misura di Lebesgue. Teorema di regolarità da sopra e da sotto. Insieme non misurabile di Vitali. Teorema sull'unicità della misura di Haar. Definizione delle misure di Hausdorff. Misura della trasformazione lineare di un insieme. Funzioni misurabili. Stabilità della misurabilità rispetto a somma, prodotto, inf, sup e limite. Funzioni semplici. Definizione di integrale di Lebesgue. Teorema sull'approssimazione di funzioni misurabili con funzioni semplici. Funzioni integrabili. La somma di funzioni integrabili è integrabile. Insiemi di misura nulla e q.o. Teorema sulla convergenza monotona. Teorema di riduzione e di Fubini-Tonelli. Teorema del cambio di variabile per l'integrale di Lebesgue. Coordinate polari e coordinate sferiche. Legami fra integrale di Riemann ed integrale di Lebesgue. Esempi ed esercizi.

4. Area ed integrali di superficie. Definizione di area per superfici parametriche. Area di grafici. Prodotto vettoriale e caso delle 2-superfici in \mathbb{R}^3 . Teorema sulla formula dell'area. Formula di Coarea. Integrazione per sfere. Calcolo di integrali relativi alla Gaussiana. Volume ed area della sfera. Definizione di divergenza. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata. Teorema della divergenza. Rotore e teorema del rotore. Esempi ed esercizi.

Roberto Monti
15 febbraio 2025