

Soluzioni di Esercizi di Analisi 2B

Anno 2024

Roberto Monti

Esercizio Si consideri l'insieme

$$M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x + y + z = 0 \}.$$

- i) Provare che M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.
- ii) Parametrizzare M in modo regolare.
- iii) Disegnare M .
- iv) Calcolare i punti di M con coordinate minime e massime.

Risoluzione. M è l'intersezione di un paraboloide e di un piano. Consideriamo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - z \\ x + y + z \end{bmatrix}$$

Allora $M = \{ f = 0 \}$. La matrice Jacobiana di f

$$Jf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice ha rango 2 tranne che nei punti in cui $x = y = -\frac{1}{2}$. Tuttavia $f(x, y, z) = 0$ non ha in questo caso nessuna soluzione $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - z = 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{impossibile.}$$

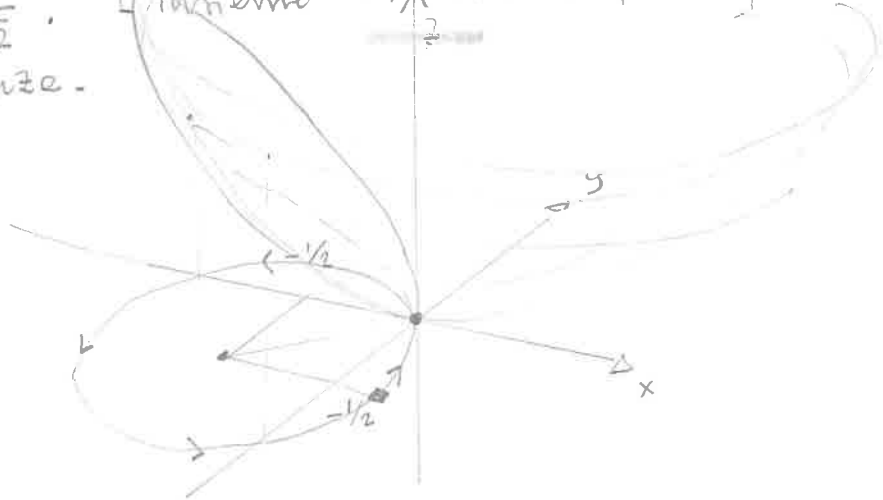
Dunque $\text{rg}(Jf(x, y, z)) = 2 \quad \forall (x, y, z) \in M$.

Questo prova il punto i).

ii) Inserendo $z = -x - y$ nell'equazione $z = x^2 + y^2$ si trova

$$0 = x^2 + y^2 + x + y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

É l'équation d'une circonférence avec centre $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'ensemble M "vive" sur cette circonférence.



Paramétrisons la circonférence

$$\gamma(t) = \left(\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t}_{x(t)}, \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t}_{y(t)}, \underbrace{0}_{z(t)} \right), \quad \begin{matrix} t \in [0, 2\pi) \\ (t \in \mathbb{R}, \\ \text{au sens 1-1}) \end{matrix}$$

et qu'on a

$$z(t) = -x(t) - y(t) = +1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t + \sin t)$$

Les courbes $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, paramétrisées en mode régulier ($\dot{\gamma} \neq 0$, non 1-1).

- (iv) Si on résout $0 = \dot{z}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin t + \cos t)$ de cui $\sin t = \cos t$ ou bien $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{5}{4}\pi$ limitativement en $[0, 2\pi)$. Quand $t = \pi/4$ on trouve $z = 0$; quand $t = \frac{5}{4}\pi$ on trouve

$$z = +1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = +1 + 1 = 2$$

Donc $z_{\min} = 0$ et $z_{\max} = 2$ sur M .

□

Esercizio (Fibrato Tangente) Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà differenziabile di classe C^k , $k \geq 2$, e di dimensione d .

Provare che

$$TM = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in M, y \in T_x M \}$$

è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n}$ di classe C^1 e di dimensione $2d$.

Risoluzione. Fissiamo un punto $\bar{x} \in M$. Esistono $r > 0$ ed $f \in C^2(B_r(\bar{x}); \mathbb{R}^{n-d})$ tali che

$$M \cap B_r(\bar{x}) = \{ x \in B_r(\bar{x}) : f(x) = 0 \}$$

ed inoltre $\text{rg } df(x) = n-d$.

Sappiamo che $y \in T_x M$ se e solo se $df(x)y = 0$
 $(\cap \mathbb{R}^n)$

Definiamo allora la funzione $F \in C^1(B_r(\bar{x}) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{2n-2d})$

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} f(x) \\ df(x)y \end{bmatrix}.$$

Allora si ha

$$TM \cap (B_r(\bar{x}) \times \mathbb{R}^n) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : F(x, y) = 0 \}.$$

Rimane da verificare l'ipotesi di rango minimo

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x) & 0 \\ * & \frac{\partial f}{\partial x}(x) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ha rango } 2(n-d) \\ \text{per } x \in B_r(\bar{x}). \end{array}$$

□

Esercizio Dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ provare che

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$.

Risoluzione. È una disuguaglianza fra due polinomi omogenei di grado 2. Baste stabilirla quando $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

Siano dunque $f, h: \mathbb{R}^n \xrightarrow{c^\infty} \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad \text{ed} \quad h(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

L'insieme $M = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 1\}$ è la sfera unitaria e per il Teorema di Weierstrass f assume massimo e minimo su M .

Sia $\bar{x} \in M$ un punto di estremo. Per il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x})$$

dove

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2 \sum_{i=1}^n x_i, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = 2 x_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dunque il sistema precedente diventa

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = \lambda \bar{x}_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Quando $\lambda = 0$ si trova $f(\bar{x}) = 0$ che è il valore minimo di f . Poniamo supporre che $\lambda \neq 0$

e dedurre che $\bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_n = \mu \in \mathbb{R}$.

Il sistema (*) diventa $n\mu = \lambda\mu$. In effetti $\mu \neq 0$, altrimenti $f(\bar{x}) = 0$ di nuovo. Deduciamo che $\lambda = n$.

Imponendo $1 = h(\bar{x}) = n\mu^2$ si scopre che

$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$. Abbiamo scoperto che ci sono due punti di minimo (coerente con la simmetria);

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

In entrambi i casi $f(\bar{x}) = \left(n \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = n$.

Dunque

$$\max_{|x|=1} f(x) = n$$

e viene raggiunto nei due punti delle sfere in cui tutte le coordinate sono uguali.

□

Esercizio Dati numeri $x_1, \dots, x_n \geq 0$ provare la disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$.

Risoluzione. Definiamo le funzioni per $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x_i \geq 0$:

$$f(x) = (x_1 \dots x_n)^{1/n}$$

$$h(x) = x_1 + \dots + x_n.$$

Sia $M = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 1, x_1, \dots, x_n \geq 0\}$.

È un insieme chiuso e limitato (compatto). Quindi f ha massimo su M . Tuttavia M non è una varietà dove $x_i = 0$ per qualche $i = 1, \dots, n$. Ma in questi punti n ha $f(x) = 0$ e non sono rilevanti.

Nei punti di minimo $\bar{x} \in M$ per f possiamo usare il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange in quanto $\nabla h = 0$. Si deve in effetti avere

$$(*) \quad \nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x})$$

per un $\lambda \in \mathbb{R}$. Conti:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \frac{1}{n} (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h(x) = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dunque il sistema (*) è equivalente a

$$\frac{1}{n} (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j = \lambda \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

che in effetti si rinviene in questo modo

$$\frac{1}{n} (x_1, \dots, x_n)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x_i} = \lambda \quad \forall i=1, \dots, n.$$

Questo implica che $x_1 = \dots = x_n$. La condizione $h(x)=1$ implica a sua volta;

$$x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}.$$

In questo punto $f(x) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$, ovvero

$$\max_{x \in M} f(x) = \frac{1}{n}.$$

Per omogeneità deduciamo che $f(x) \leq \frac{1}{n} h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
con $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Si ha $f(x) = \frac{1}{n} h(x)$ se e solo se
 $x_1 = \dots = x_n$,

□

ESERCIZIO Sia $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3 - t^5, 1 - t^2)$ con $t \in \mathbb{R}$.

1) Stabilire se γ è iniettiva.

2) Nei punti regolari calcolare il vettore tangente unitario $T(t)$.

3) Calcolare i limiti $T(0^\pm) = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} T(t)$ e $T(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} T(t)$.

4) Disegnare il supporto di γ .

Risoluzione 1) Abbiamo $\gamma(t) = (t^3(1-t^2), 1-t^2)$ e quindi $\gamma(\pm 1) = (0, 0)$. γ non è iniettiva.

2) Derivata: $\dot{\gamma}(t) = (3t^2 - 5t^4, -2t)$ e quindi $\dot{\gamma}(t) = (0, 0) \Leftrightarrow t = 0$. Il punto $t = 0$ non è regolare. Per $t \neq 0$:

$$T(t) = \frac{(3t^2 - 5t^4, -2t)}{\sqrt{(3t^2 - 5t^4)^2 + 4t^2}} = \frac{t}{|t|} \frac{(3t - 5t^3, -2)}{\sqrt{t^2(3 - 5t^2)^2 + 4}}$$

3) Limiti

$$\begin{aligned} T(0^\pm) &= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t}{|t|} \frac{(3t - 5t^3, -2)}{\sqrt{t^2(3 - 5t^2)^2 + 4}} = \pm (0, -1) \\ &= (0, \mp 1) \end{aligned}$$

$$T(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{t^4} \left(\frac{3}{t^2} - 5, \frac{-2}{t^3} \right)}{\cancel{t^4} \sqrt{\left(\frac{3}{t^2} - 5 \right)^2 + \frac{4}{t^6}}} = (-1, 0)$$

4) Poniamo $y = 1 - t^2 \Leftrightarrow t^2 = 1 - y$

e quindi $1 - y \geq 0$ ovvero $y \leq 1$. Ci sono

due soluzioni $t = \pm \sqrt{1 - y}$.

Studio il caso $t = \sqrt{1 - y}$:

$$\gamma(t) = (t^3(1 - t^2), 1 - t^2) = \left((1 - y)^{\frac{3}{2}} \cdot y, y \right)$$

Studio il grafico di $f(y) = (1 - y)^{\frac{3}{2}} y$, $y \leq 1$.

Derivata:

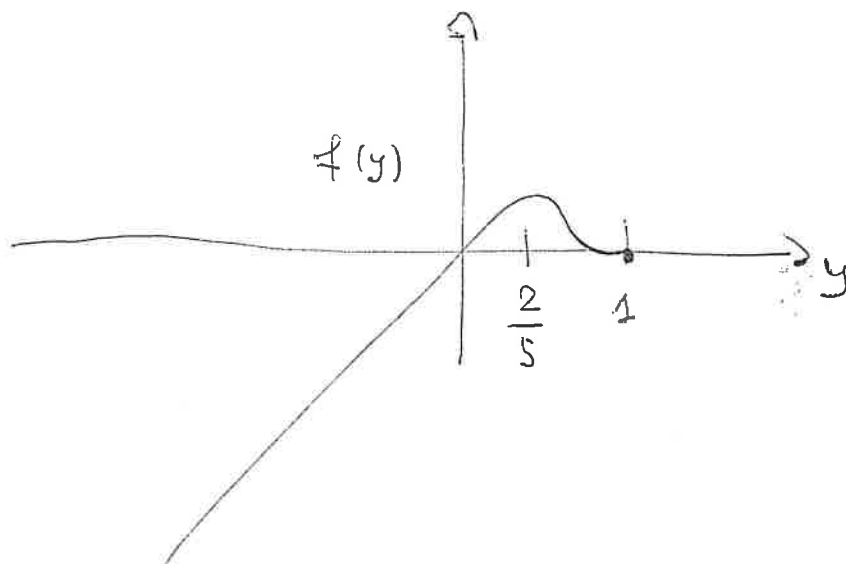
$$f'(y) = (1 - y)^{\frac{3}{2}} + y \cdot \frac{3}{2} (1 - y)^{\frac{1}{2}} (-1)$$

$$= (1 - y)^{\frac{1}{2}} \left[1 - y - \frac{3}{2} y \right]$$

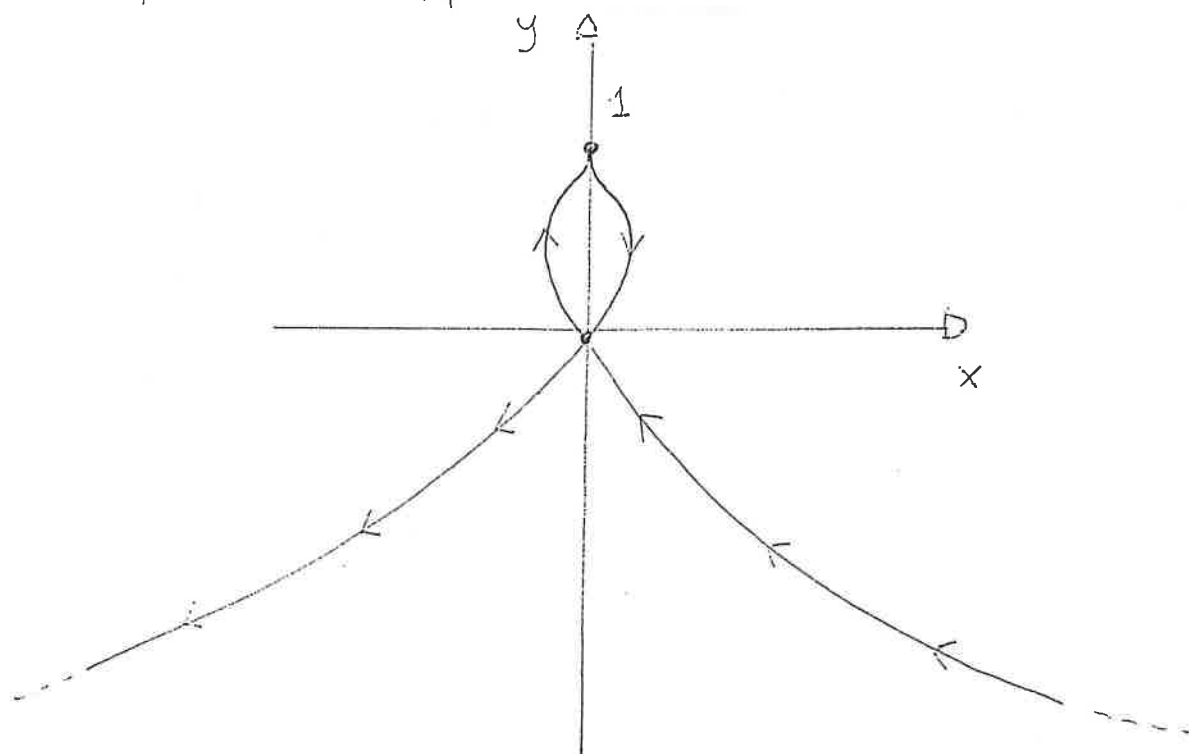
$$= (1 - y)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{5}{2} y \right)$$

Dunque in $y = 1$ e $y = \frac{2}{5}$ si ha $f' = 0$.

Grafico approssimativo



Dunque il supporto di γ è fatto così:



□

ESERCIZIO Su $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4 + y^4} dx - \frac{yx^2}{x^4 + y^4} dy.$$

- (i) Verificare che ω è chiusa in A .
 (ii) ~~Verificare~~ Provare che ω è esatta esibendo un potenziale f di ω in A . (Il potenziale deve essere definito in ogni punto di A)

Risultazione. (i) Verifichiamo che ω è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy^2}{x^4 + y^4} \right) = \frac{2xy(x^4 + y^4) - xy^2 \cdot 4y^3}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{2yx^5 - 2xy^5}{(x^4 + y^4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-yx^2}{x^4 + y^4} \right) = - \frac{2xy(x^4 + y^4) - yx^2 \cdot 4x^3}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{2yx^5 - 2xy^5}{(x^4 + y^4)^2}$$

Le due espressioni sono identiche su A .

- (ii) Cerchiamo $f \in C^1(A)$ tale che

$$(*) \quad f_x = \frac{xy^2}{x^4 + y^4}, \quad f_y = - \frac{yx^2}{x^4 + y^4}.$$

Integriamo la prima equazione in x (integr. indefiniti)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \frac{xy^2}{x^4 + y^4} dx \stackrel{x^2 = s}{\substack{2x dx = ds}} = \frac{1}{2} \int \frac{y^2}{s^2 + y^4} ds \\ &= \frac{1}{2y^2} \int \frac{1}{\left(\frac{s}{y^2}\right)^2 + 1} ds = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{s}{y^2}\right) + C(y) \end{aligned}$$

È dunque $f(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + C(y)$,

Deriviamo in y :

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{1}{2} \frac{x^2 (-2) y^{-3}}{1 + \frac{x^4}{y^4}} + C'(y) \\ &= \frac{-x^2}{y^4 + y^4} + C'(y) \end{aligned}$$

Confrontando con la seconda equazione in $\textcircled{*}$ si ha $C'(y) = 0$ e quindi $C = \text{costante}$.

Abbiamo trovato (con $C=0$) il potenziale

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right).$$

Questo ancora non basta perché f è definita solo per $y \neq 0$. Tuttavia: per $x_0 \neq 0$ si ha

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, 0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

Quindi possiamo definire

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } y = 0 \text{ e } x \neq 0 \end{cases}$$

Risulta $f \in C(A)$ e per $\textcircled{*}$ in effetti $f \in C^1(A)$.

ESERCIZIO Costruire un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ con queste tre proprietà:

- 1) A aperto;
- 2) $\mathcal{L}^2(A) < 1$;
- 3) $\mathcal{L}^2(\partial A) = +\infty$.

Risoluzione. Per numerabilità

$$Q = \mathbb{Q}^2 = \{q_n \in \mathbb{Q}^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Siano $r_n > 0$ raggi ed $A_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - q_n| < r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

L'insieme

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

è aperto in quanto unione di aperti.

Per subaddittività:

$$\mathcal{L}^2(A) = \mathcal{L}^2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^2(A_n) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo i raggi $r_n = \frac{\varepsilon}{n}$. In questo modo:

$$\mathcal{L}^2(A) \leq \pi \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 \text{ su scelta di } \varepsilon > 0.$$

Proviamo che $\partial A = \mathbb{R}^2 \setminus A$. Siccome A è aperto vale l'inclusione $\partial A \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$. Proviamo l'inclusione opposta. Dato $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $|x - q_{n_k}| < \frac{1}{k}$, in quanto $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{R}^2$.

Quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_{n_k} = x \quad \text{con } q_{n_k} \in A$$

e per la caratterizzazione sequenziale della chiusura $x \in \overline{A}$. Siccome $\text{ext}(A) = \emptyset$ deve essere $x \in \partial A$.

Si conclude che $\mathcal{L}^2(\partial A) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2 \setminus A) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2) - \mathcal{L}^2(A) = +\infty$.

ESERCIZIO Sia $\mathcal{A}$ una σ -algebra su $\mathbb{R}^n$ e sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Proverò che

$$\mathcal{B} = \{ B \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

è una σ -algebra su $\mathbb{R}$.

Riduzione. 1) $\emptyset \in \mathcal{B}$ vero in quanto $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$.

$\mathbb{R} \in \mathcal{B}$ vero in quanto $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$.

2) Sia $B \in \mathcal{B}$, ovvero $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Ma allora

$$f^{-1}(B') = f^{-1}(B)^c \in \mathcal{A}$$

e quindi $B' \in \mathcal{B}$.

3) Siano $B_k \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$. Allora

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(B_k) \in \mathcal{A}$$

e quindi $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$.

□

ESERCIZIO, Costruire una misura esterna su $\mathbb{R}$ che non sia σ -additiva su insiemi disgiunti.

Risoluzione. Partiamo dall'insieme $X = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Allorremmo

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$$

e definiamo $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty)$ così:

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1 \quad \text{e} \quad \mu(X) = \frac{3}{2}.$$

Verifichiamo:

1) $\mu(\emptyset) = 0$ Vero

2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ Vero

3) $\mu(X) = \mu(\{0\} \cup \{1\}) \leq \mu(\{0\}) + \mu(\{1\}) = 1 + 1 = 2$
Vero

È una misura esterna. Ma in 3) l'unione è disgiunta e non vale " $=$ ".

Vediamo se $A = \{0\}$ è μ -misurabile:

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \quad \forall E \subset X.$$

Con la scelta $E = X$ si trova

$$\frac{3}{2} = \mu(X) \stackrel{?}{=} \mu(\{0\}) + \mu(\{1\}) = 2$$

Falso. Dunque $\{0\}$ non è μ -misurabile e neppure $\{1\}$.
Gli unici misurabili sono $\emptyset$ e X .

Per passare da X ad $\mathbb{R}$ possiamo estendere μ a zero fuori da X . Precisamente, definiamo $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ ponendo

$$\mu(A) = \begin{cases} 3/2 & \text{se } 0, 1 \in A \\ 1 & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \notin A \\ 1 & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \in A \\ 0 & \text{negli altri casi, se } 0 \notin A \text{ e } 1 \notin A. \end{cases}$$

La subaddittività numerabile è verificata

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

I ragionamenti sono analoghi a sopra.

□

ESERCIZIO Siano $A = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ ed $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x,y) \in A.$$

1) Provare che $f \notin L^1(A)$

2) Provare che esistono i seguenti integrali ripetuti ma sono diversi;

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx.$$

Risoluzione. Consideriamo

$$\begin{aligned} A^+ &= \{ (x,y) \in A : f(x,y) > 0 \} \\ &= \{ (x,y) \in A : x > y \}. \end{aligned}$$

Per il Teorema di Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_{A^+} f(x,y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx \\ &\stackrel{y=xt}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2(1-t^2)}{x^4(1+t^2)^2} x dt \right) dx \\ &= \left(\int_0^1 \frac{1}{x} dx \right) \left(\int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt \right) = +\infty \\ &\quad \text{diverge} \quad \text{converge} \end{aligned}$$

Quindi $f^+ = \max\{0, f\} \in L^1(A)$ e dunque $f \notin L^1(A)$.

Per $x \in (0,1)$ fissato calcoliamo l'integrale

$$I(x) = \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \stackrel{y=xt}{=} \frac{1}{x} \int_0^{1/x} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt \stackrel{t=\tan(s)}{=} \dots$$

Integrali indefiniti

$$\int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{1-\tan^2 s}{1+\tan^2 s} ds = \int \cos^2 s - \sin^2 s ds =$$

$$s = \arctan(t) \quad ds = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int \cos 2s ds = \frac{1}{2} \sin(2s) = \sin(s) \cos(s) = \frac{t}{(1+t^2)}$$

Dunque

$$I(x) = \frac{1}{x} \frac{1/x}{(1+1/x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

e infine

$$\int_0^1 I(x) dx = \left[\arctan(x) \right]_{x=0}^{x=1} = \pi/4.$$

Per simmetria concludiamo che

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \dots dy \right) dx,$$

□

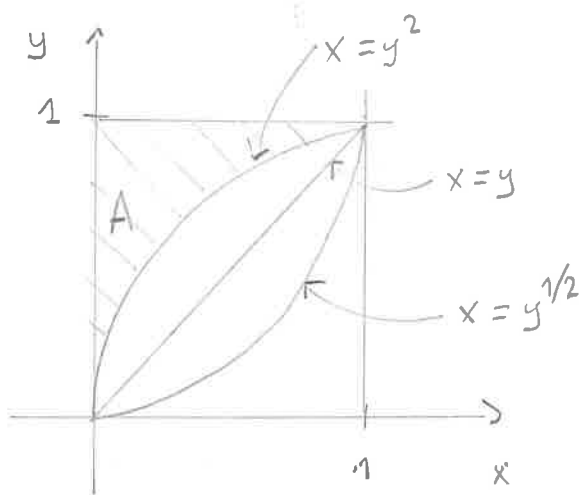
ESERCIZIO Fissato $\alpha > 0$ siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y^\alpha < 1\}$

ed $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{x+1}{y^2}.$$

Stabilire per quali $\alpha > 0$ risulta $f \in L^1(A)$ e in questo caso calcolarne l'integrale.

Risoluzione. L'insieme A è fatto così



Ci aspettiamo che f sia integrabile quando α è "grande".

Osserviamo che f è misurabile e positiva.

Potremo usare il Teorema di Tonelli:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^\alpha} \frac{x+1}{y^2} dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{y^2} \left(\int_0^{y^\alpha} (x+1) dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{x=0}^{x=y^\alpha} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{2} y^{2\alpha} + y^\alpha \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^{2\alpha-2} + y^{\alpha-2} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{y^{2-2\alpha}} + \frac{1}{y^{2-\alpha}} \right) dy \end{aligned}$$

L'integrale converge se e solo se $2-2\alpha < 1$ e $2-\alpha < 1$
(entrambe) ovvero se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$ e $\alpha > 1$.

Dunque l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.

In questo caso si trova

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{y^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha-1} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \right). \end{aligned}$$

ESERCIZIO Per $\varepsilon > 0$ si consideri il dominio

$$A_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{1}{2} x^2 < y < 2x^2, \varepsilon < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{A_\varepsilon} \frac{|x|}{y(1+y^2)} dx dy.$$

Risoluzione. Sia $\varepsilon_k \downarrow 0$ ed

$$f_k(x, y) = \frac{|x|}{y(1+y^2)} \chi_{A_{\varepsilon_k}}(x, y) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

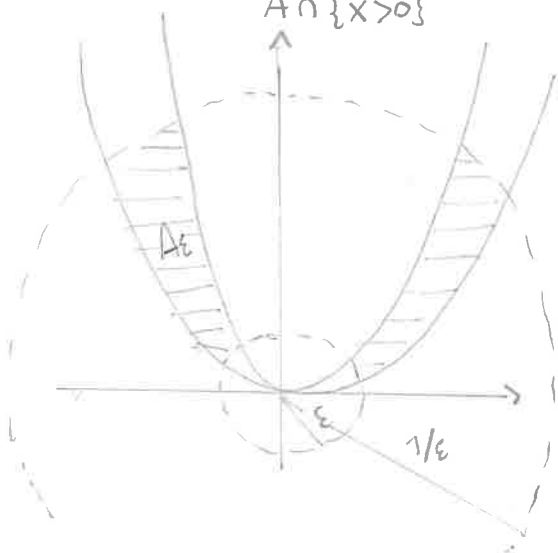
le funzioni sono misurabili ed $f_k \leq f_{k+1}$.

Per convergenza monotona:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_{\varepsilon_k}} \frac{|x|}{y(1+y^2)} dx dy = \int_A \frac{|x|}{y(1+y^2)} dx dy = I$$

dove $A = \left\{ \frac{1}{2} x^2 < y < 2x^2 \right\}$. Per simmetria

$$I = 2 \int_{A \cap \{x > 0\}} \frac{x}{y(1+y^2)} dx dy \left(= 2 \int_0^\infty \int_{x^2/2}^{2x^2} \frac{x}{y(1+y^2)} dy dx \right)$$



$$= 2 \int_0^\infty \int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{2y}} \frac{x}{y(1+y^2)} dx dy$$

$$= 2 \int_0^\infty \frac{1}{y(1+y^2)} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x^2=y/2}^{x^2=2y} dy =$$

Dunque

$$I = \int_0^{\infty} \frac{2y - y/2}{y(1+y^2)} dy = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{3}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

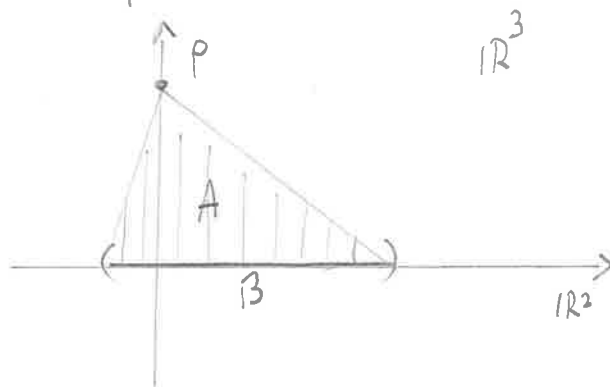
□

ESERCIZIO Sia $B \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ un insieme k^2 -misurabile (o anche aperto in $\mathbb{R}^2$) tale che $\ell^2(B) = 1$. Fissato il vertice $p = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ si consideri il "cono"

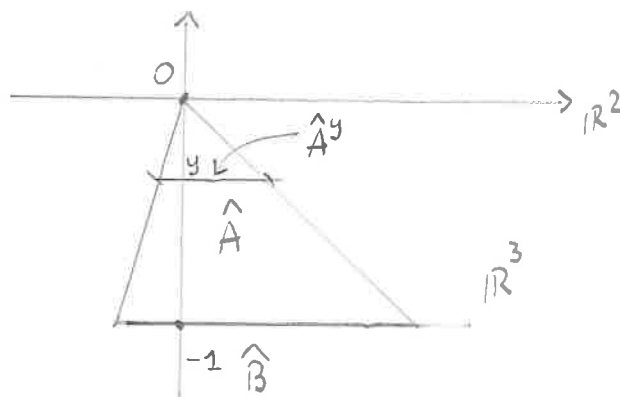
$$A = \{tx + (1-t)p \in \mathbb{R}^3; x \in B \text{ e } t \in (0, 1)\}.$$

Calcolare $\ell^3(A)$.

Risoluzione. Il disegno è questo:



Trasliamo A del vettore $-p$: $\hat{A} = \tau_{-p}(A)$



con le coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Per il Teorema di Rioluzione:

$$\ell^3(A) = \ell^3(\hat{A}) = \int_{-1}^0 \ell^2(\hat{A}^y) dy \quad \text{dove} \quad \hat{A}^y = \{x \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in \hat{A}\}.$$

Osserviamo che $\hat{A} = \{ tx - tp \in \mathbb{R}^3 : x \in B, t \in (0,1) \}$
 $= \{ \underbrace{t(x-p)}_{\substack{'' \\ (tx', -t) \in \mathbb{R}^3}} \in \mathbb{R}^3 : x \in B, t \in (0,1) \}$

Dunque per $y \in (-1, 0)$

$$\hat{A}^y = \{ -yX \in \mathbb{R}^2 : X \in B \}$$

omotetie di fattore $-y$ di B

Quindi

$$\mathcal{L}^2(\hat{A}^y) = y^2 \mathcal{L}^2(B),$$

Concludiamo che

$$\mathcal{L}^3(A) = \mathcal{L}^2(B) \int_{-1}^0 y^2 dy = \frac{1}{3} \mathcal{L}^2(B).$$

□

Esercizio Dato $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$, calcolare
il limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{e^R} \int_{B_R} e^{|x|+|y|} dx dy.$$

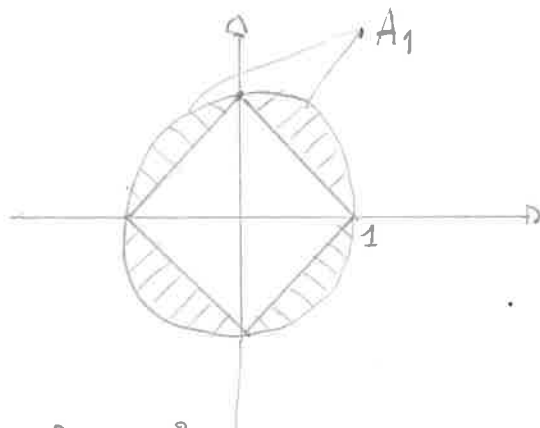
Risoluzione, con il cambio di variabile $x = R\xi$ ed $y = R\eta$
si trova

$$\int_{B_R} e^{|x|+|y|} dx dy = \int_{B_1} e^{R(|\xi|+|\eta|)} R^2 d\xi d\eta$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^R} \int_{B_R} e^{|x|+|y|} dx dy &= R^2 \int_{B_1} \frac{e^{R(|\xi|+|\eta|)}}{e^R} d\xi d\eta \geq \\ &\geq R^2 \int_{A_1} \frac{e^{R(|\xi|+|\eta|)}}{e^R} d\xi d\eta = \textcircled{*} \end{aligned}$$

dove $A_1 = \{(\xi, \eta) \in B_1 : |\xi|+|\eta| > 1\}$



Dunque $\textcircled{*} \geq R^2 \cdot \underbrace{\int_{A_1} 1 d\xi d\eta}_{>0} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty.$

□

Esercizio. Dati $a, b > 0$ sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$
Calcolare l'integrale

$$I = \int_A (x^2 - y^2) dx dy.$$

Risoluzione. Per trasformare l'ellisse in un cerchio conviene fare la sostituzione $x = a\xi$ e $y = b\eta$, ovvero poniamo $(x, y) = F(\xi, \eta)$ con $F(\xi, \eta) = (a\xi, b\eta)$.

Osserviamo che

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow (\xi, \eta) \in B = \{\xi^2 + \eta^2 < 1\}$$

Inoltre $|\det JF(\xi, \eta)| = ab$ è costante. Dunque

$$\begin{aligned} I &= \int_B (a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2) ab d\xi d\eta \\ &= ab \left\{ a^2 \int_B \xi^2 d\xi d\eta - b^2 \int_B \eta^2 d\xi d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Per simmetria (invarianza rispetto alla rotazione di $\pi/2$) si vede che

$$\int_B \xi^2 d\xi d\eta = \int_B \eta^2 d\xi d\eta$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_B \xi^2 d\xi d\eta &= \frac{1}{2} \int_B (\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta = \begin{matrix} \text{Coordinate} \\ \text{Polarì} \end{matrix} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta \end{aligned}$$

$$\int_B \xi^2 d\xi d\eta = \pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4} .$$

concludiamo che

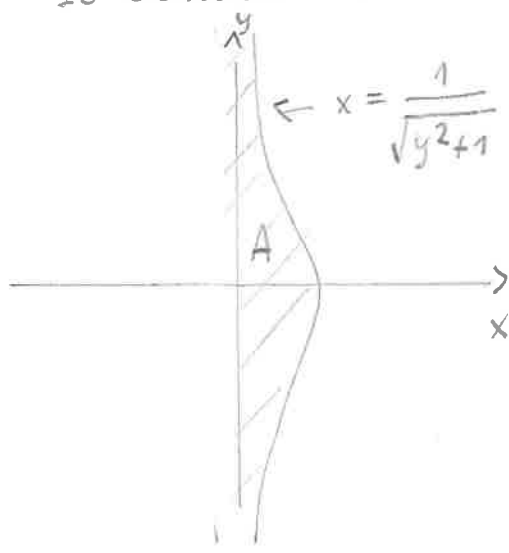
$$I = \frac{\pi}{4} ab (a^2 - b^2) .$$

□

Esercizio Dato $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(1+y^2) < 1, x > 0\}$
calcolare l'integrale

$$\int_A x^3(1+y^2) \cdot e^{x^2(1+y^2)} dx dy.$$

Risultazione. Il dominio di integrazione è



L'equazione che definisce A è: $x^2(1+y^2) < 1 \Leftrightarrow x^2 + x^2 y^2 < 1$.

Proviamo a trasformare A in una mezza palla:

$$\begin{cases} x = \xi \\ xy = \eta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \xi \\ y = \frac{\eta}{\xi} \end{cases} \text{ per } \xi \neq 0$$

Definiamo $F(\xi, \eta) = (\xi, \eta/\xi)$, $\xi > 0$.

È 1-1 per $\xi > 0$. Matrice Jacobiana:

$$JF(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\eta}{\xi^2} & \frac{1}{\xi} \end{pmatrix},$$

$$|\det JF(\xi, \eta)| = \frac{1}{|\xi|} = \frac{1}{\xi}.$$

È un diffeomorfismo per $\xi > 0$.

Dunque, con $B = \{ \xi^2 + \eta^2 < 1, \xi > 0 \}$

$$\int_A x^3(1+y^2) e^{x^2(1+y^2)} dx dy = \int_B \xi^3(1+\frac{\eta^2}{\xi^2}) e^{\xi^2(1+\frac{\eta^2}{\xi^2})} \frac{1}{\xi} d\xi d\eta =$$

$$= \int_B (\xi^2 + \eta^2) e^{\xi^2 + \eta^2} d\xi d\eta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r^2 e^{r^2} r dr d\alpha = \pi \int_0^1 r^3 e^{r^2} dr$$

$$= \pi \int_0^1 r^2 \frac{1}{2} (e^{r^2})' dr = \frac{\pi}{2} \left\{ r^2 e^{r^2} \Big|_{r=0}^{r=1} - \int_0^1 2r e^{r^2} dr \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ e - [e^{r^2}]_{r=0}^{r=1} \right\} = \frac{\pi}{2} ,$$

□

Esercizio Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ converge il seguente integrale e quindi calcolarlo

$$I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + (|x| + |y|)^2)^\alpha} dx dy.$$

Risoluzione. La funzione integranda è continua (misurabile) e positiva, l'integrale è ben definito. Tuttavia la sua simmetria non si adatta bene alle coordinate polari.

Sia

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 + (|x| + |y|)^2)^\alpha}.$$

Noi sappiamo che (Formula di integrazione per soprallivelli)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \underbrace{\mathbb{L}^2(\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > t \})}_{\equiv \bar{E}_t} dt$$

$$= \int_0^1 \mathbb{L}^2(\bar{E}_t) dt,$$

perché $\bar{E}_t = \emptyset$ per $t \geq 1$.

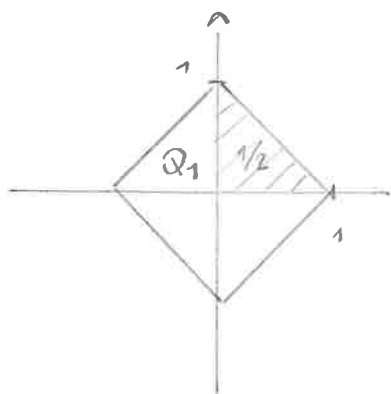
Osserviamo che

$$(x, y) \in \bar{E}_t \Leftrightarrow \frac{1}{(1 + (|x| + |y|)^2)^\alpha} > t$$

$$\Leftrightarrow 1 + (|x| + |y|)^2 < \frac{1}{t^{1/\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow |x| + |y| < \sqrt{\frac{1}{t^{1/\alpha}} - 1}.$$

L'insieme $Q_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \}$ è fatto così:



Quindi $\ell^2(Q_1) = 2$. Posto $Q_s = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < s \}$ deduciamo che $\ell^2(Q_s) = 2s^2$.

Nel nostro caso: $E_t = Q_{\sqrt{\frac{1}{t^{1/d}} - 1}}$ e dunque:

$$\begin{aligned} I_d = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) &= \int_0^1 \ell^2(Q_{\sqrt{\frac{1}{t^{1/d}} - 1}}) dt \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{t^{1/d}} - 1 \right) dt. \end{aligned}$$

Questo integrale converge se e solo se $d > 1$.

In questo caso si trova:

$$\begin{aligned} I_d &= 2 \left[\frac{t^{-\frac{1}{d}+1}}{-\frac{1}{d}+1} - t \right]_{t=0}^{t=1} = 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{d}} - 1 \right) \\ &= 2 \left(\frac{d}{d-1} - 1 \right) = 2 \frac{1}{d-1}. \end{aligned}$$

Esercizio Calcolare l'area delle superficie

$$M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, x^2 + y^2 < 1, z = xy \}.$$

Risoluzione. Posto $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 < 1 \}$ ed $f \in C^0(A)$

$f(x, y) = xy$ si ha che $M = \text{graf}(f)$. Si tratta di un pezzo di iperboloido. Usiamo le formule per l'area di grafico.

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_A \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx dy & \nabla f &= (y, x) \\ &= \int_A \sqrt{1 + (x^2 + y^2)} \, dx dy = [\text{coordinate polari}] \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + r^2} \, r \, d\theta \, dr \\ &= \pi \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} \, r \, dr = \pi \left[(1 + r^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \\ &= \frac{\pi}{3} (2^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

□

Esempio Dati $f, g \in C^1([0, 1])$ ed $A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$

si consideri $M = \{ (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) : (u, v) \in A \}$

è una superficie di rotazione attorno all'asse z .

Sviluppando $\varphi_u \wedge \varphi_v$ e poi usando le coordinate polari si trova

$$A(M) = 2\pi \int_0^1 f(v) \sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2} \, dv.$$

Esercizio Calcolare l'area delle superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ ottenute ruotando attorno all'asse z le curve di equazione

$$\begin{cases} x = \sin v - \cos v \\ z = \sin v + \cos v \end{cases} \quad v \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right).$$

Risoluzione. Qui abbiamo $f(v) = \sin v - \cos v$ e $g(v) = \sin v + \cos v$. Quindi

$$\begin{aligned} f'(v)^2 + g'(v)^2 &= (\cos v + \sin v)^2 + (\cos v - \sin v)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

ed usando la formula generale

$$A(M) = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(v) \sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2} dv$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sin v - \cos v) dv$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left[-\cos v - \sin v \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 4\pi.$$

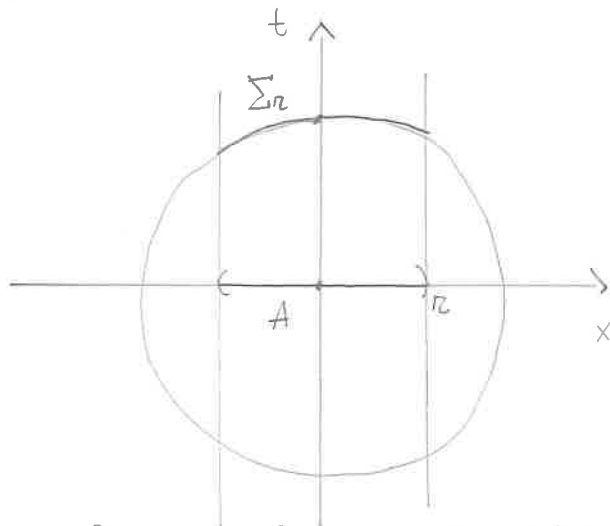
□

Esercizio In $\mathbb{R}^4$ con le coordinate $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ si consideri la 3-superficie

$$\Sigma_r = \{(x, t) \in \mathbb{R}^4 : |x|^2 + t^2 = 1 \text{ e } |x| < r\}$$

dove $r \in (0, 1)$. Calcolare l'area $A(\Sigma_r)$.

Risoluzione. Σ_r è una calotta sferica come in figura:



Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < r\}$ ed $f \in C^\infty(A)$

$$f(x) = \sqrt{1 - |x|^2}.$$

Allora si ha $\Sigma_r = \text{gr}(f)$ e dunque per la formula Cartesiana dell'area:

$$A(\Sigma_r) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} \, dx.$$

Conti:

$$f_{x_i} = \frac{1}{2} \frac{-2x_i}{\sqrt{1 - |x|^2}} = -\frac{x_i}{\sqrt{1 - |x|^2}}, \quad i = 1, 2, 3$$

e dunque $|\nabla f|^2 = \frac{|x|^2}{1 - |x|^2}$, da cui

$$\sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}}.$$

Usando le formule di Poisson (Coordinate sferiche):

$$\int_A \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} dx = \int_0^r \int_{|x|=p} \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} dH^2(x) dp =$$

$$= \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} p^2 \underbrace{H^2(S^2)}_{4\pi} dp \quad \text{Sostituzione } p = \sin \theta$$

$$dp = \cos \theta d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^{\arcsin(r)} \frac{1}{\cancel{\cos \theta}} \sin^2 \theta \cancel{\cos \theta} d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^{\arcsin(r)} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$= 2\pi \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\arcsin(r)} = 2\pi \left[\theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \right]_0^{\arcsin(r)}$$

$$= 2\pi \left(\arcsin(r) - \frac{r\sqrt{1-r^2}}{2} \right),$$

Conclusione:

$$A(\Sigma_r) = 2\pi \left(\arcsin(r) - \frac{r\sqrt{1-r^2}}{2} \right).$$

□

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ fissiamo le coordinate $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

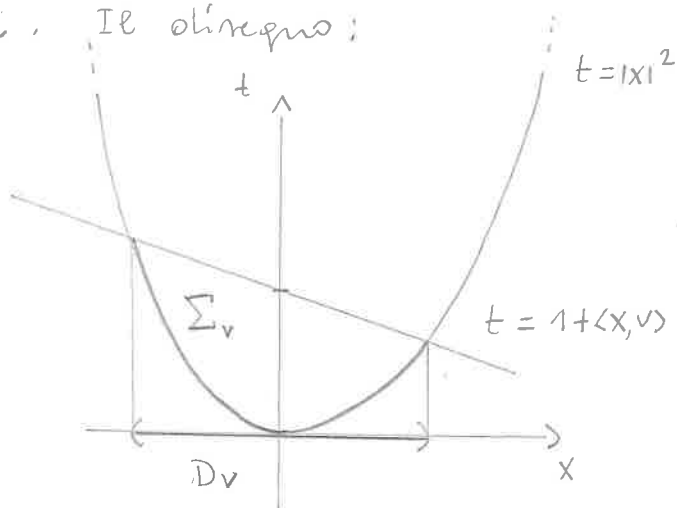
Per $v \in \mathbb{R}^2$ consideriamo la superficie

$$\Sigma_v = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3; \quad t = |x|^2, \quad t < 1 + \langle x, v \rangle\}.$$

Provare che

$$\min \{ A(\Sigma_v) \mid v \in \mathbb{R}^2 \} = A(\Sigma_0) = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1)$$

Risoluzione. Il disegno:



Calcoliamo l'insieme $D_v \subset \mathbb{R}^2$ in figura.

$$|x|^2 = t < 1 + \langle x, v \rangle \quad \Rightarrow \quad |x|^2 - \langle x, v \rangle + \frac{|v|^2}{4} < 1 + \frac{|v|^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow |x - v/2|^2 < 1 + \frac{|v|^2}{4}$$

È un cerchio centrato in $v/2$:

$$D_v = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \quad |x - v/2| < \sqrt{1 + \frac{|v|^2}{4}} \right\}.$$

Detta $f \in C^\infty(D_v)$, $f(x) = |x|^2$, si ha $\Sigma_v = \text{gr}(f)$

e dunque

$$\nabla f(x) = 2x$$

$$A(\Sigma_v) = \int_{D_v} \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx = \int_{D_v} \sqrt{1 + 4|x|^2} dx$$

Con la traslazione $x - v/2 = \xi$ si ottiene

$$A(\Sigma_v) = \int_{\{|\xi| < \sqrt{1+|v|^2/4}\}} \sqrt{1 + 4|\xi + \frac{v}{2}|^2} d\xi \geq \int_{\{|\xi| < 1\}} \sqrt{1 + 4|\xi + \frac{v}{2}|^2} d\xi.$$

La funzione $v \mapsto \sqrt{1 + 4|\xi + \frac{v}{2}|^2}$ è convessa $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$.

Quindi $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(v) = \int_{\{|\xi| < 1\}} \sqrt{1 + 4|\xi + \frac{v}{2}|^2} d\xi$$

è convessa. Inoltre

$$F(-v) = \int_{\{|\xi| < 1\}} \sqrt{1 + 4|\xi - \frac{v}{2}|^2} d\xi = \int_{\{|\xi| < 1\}} \sqrt{1 + 4|-\xi + \frac{v}{2}|^2} d\xi \stackrel{-\xi = \eta}{=} \int_{\{|\xi| < 1\}} \sqrt{1 + 4|-\xi + \frac{v}{2}|^2} d\xi =$$

$$= \int_{\{|\eta| < 1\}} \sqrt{1 + 4|\eta + \frac{v}{2}|^2} d\eta = F(v).$$

Dunque per ogni $v \in \mathbb{R}^2$:

$$F(0) = F\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(-v)\right) \leq \frac{1}{2}F(v) + \frac{1}{2}F(-v) = F(v),$$

Questo prova che $A(\Sigma_0) \leq A(\Sigma_v)$. Infine:

$$A(\Sigma_0) = \int_{\{|x| < 1\}} \sqrt{1 + 4|x|^2} dx = \int_0^1 2\pi \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \left[\frac{(1 + 4r^2)^{3/2}}{8} \cdot \frac{2}{3} \right]_{r=0}^{r=1}$$

$$= \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1).$$

□

Esercizio 9.1 Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato con frontiera parametrizzata in senso anti-orario da una curva γ .
Sia poi $\omega \in \Omega^1(\bar{A})$ le 1-forme differenziali

$$\omega = P(x,y) dx + Q(x,y) dy, \quad P, Q \in C^1(\bar{A}).$$

Provare che

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} \omega.$$

Dim. Sia $\gamma: [0, L] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$ con $\gamma(0) = \gamma(L)$
una parametrizzazione di ∂A antioraria con $|\dot{\gamma}(t)| = 1$
e $L = H^1(\partial A) = L(\gamma)$. Per definizione

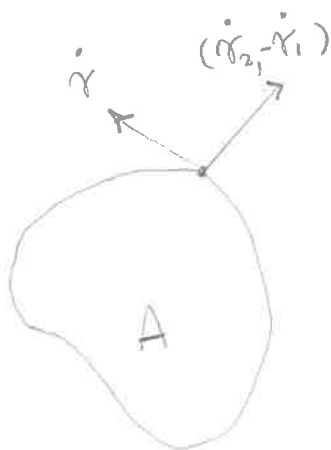
$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^L P(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) + Q(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt$$

$$= \int_0^L \langle (Q, -P), (\dot{\gamma}_2, -\dot{\gamma}_1) \rangle dt$$

$$= \int_{\partial A} \langle (Q, -P), \underbrace{(\dot{\gamma}_2, -\dot{\gamma}_1)}_{\substack{\parallel \\ N \text{ normale esterna}}} \rangle dH^1$$

$$= \int_A \operatorname{div} (Q, -P) dx dy.$$

□



Esercizio 9,6 Sia una parametrizzazione antioraria
della frontiera del quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Calcolare

$$I = \int_{\gamma} \frac{x}{1+y} dx - (\sin y + x^2 y) dy.$$

Risoluzione. Con $P = \frac{x}{1+y}$ e $Q = -(\sin y + x^2 y)$

si trova

$$I = \int_Q \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \int_Q -2xy + \frac{x}{(1+y)^2} dx dy$$

$$\stackrel{FT}{=} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x}{(1+y)^2} - 2xy \right) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[x \frac{-1}{1+y} - xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{x}{2} - x + x + 0 \right) dx = -\frac{1^2}{4},$$

□

Esercizio. Dato il parametro reale $\alpha > 0$ si consideri l'insieme

$$A_\alpha = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (|z|+1)(x^2+y^2)^\alpha \leq 1 \}.$$

Al variare di $\alpha > 0$:

i) calcolare il volume $\mathcal{L}^3(A_\alpha)$;

ii) stabilire se $H^2(\partial A_\alpha) < \infty$ oppure no.

Risoluzione. i) I punti di A_α verificano

$$x^2+y^2 \leq \frac{1}{(1+|z|)^\alpha}.$$

Dunque le sezioni $A_z = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A_\alpha \}$ sono cerchi di raggio $(1+|z|)^{-1/2\alpha}$. Per Fubini-Tonelli (riduzione)

$$\mathcal{L}^3(A_\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}^2(A_z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{(1+|z|)^\alpha} dz$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} (1+z)^{-\frac{1}{\alpha}} dz = 2\pi \left[(1+z)^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}} \right]_{z=0}^{z=\infty}$$

Se $1 - \frac{1}{\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$ si trova $\mathcal{L}^3(A_\alpha) = +\infty$,

Se $0 < \alpha < 1$ si trova

$$\mathcal{L}^3(A_\alpha) = 2\pi \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1} = 2\pi \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

ii) La frontiera di A_α è composta dai due pezzi

$$z = \pm \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} - 1 \right)$$

con dominio $0 < x^2+y^2 \leq 1$.

Sia dunque $f: \{0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow [0, \infty)$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} - 1.$$

Dalle formule contenute nell'ore sappiamo che

$$H^2(\partial A_\alpha) = 2 \int_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} \, dx \, dy.$$

Conti:

$$f_x = -\alpha (x^2 + y^2)^{-\alpha-1} \cdot 2x$$

$$f_y = -\alpha (x^2 + y^2)^{-\alpha-1} \cdot 2y$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\nabla f(x, y)|^2 &= 4\alpha^2 (x^2 + y^2)^{-2\alpha-2} (x^2 + y^2) \\ &= 4\alpha^2 (x^2 + y^2)^{-2\alpha-1} \end{aligned}$$

Usando le coordinate polari:

$$H^2(\partial A_\alpha) = 2 \int_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} \sqrt{1 + 4\alpha^2 (x^2 + y^2)^{-2\alpha-1}} \, dx \, dy =$$

$$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\alpha^2 r^{-4\alpha-2}} \, r \, dr$$

Per il criterio del confronto asintotico questo integrale converge se e solo se

$$\int_0^1 r^{-2\alpha-1+1} \, dr < \infty \quad (\Leftrightarrow) \quad 2\alpha < 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \alpha < \frac{1}{2}.$$

□

Domande facoltative. Calcolare - se esiste - il minimo della funzione $g(x, y, z) = xyz$ ristretta su A_d .

Risoluzione. Se esiste, il minimo è assunto nella regione dove $xyz > 0$. Inoltre il minimo deve trovarsi su ∂A_d perché $t \mapsto g(tx, ty, tz) = t^3 xyz$ cresce se $xyz > 0$. Con $x, y, z > 0$ abbiamo con $x=y$

$$g\left(x, y, \underbrace{\frac{1}{(x^2+y^2)^d} - 1}\right) = xy \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^d} - 1 \right) \stackrel{\downarrow}{\leq} \frac{1}{2} (x^2+y^2) \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^d} - 1 \right)$$

V
0

Enonimiamo $\varphi(r) = \frac{1}{2} r^2 (r^{-2d} - 1)$ per $0 < r \leq 1$.

$$= \frac{1}{2} (r^{2-2d} - r^2)$$

Derivate

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \frac{1}{2} ((2-2d) r^{1-2d} - 2r) \\ &= (1-d) r^{1-2d} - r \\ &= r ((1-d) r^{-2d} - 1) \end{aligned}$$

Segno: $\varphi'(r) \geq 0 \Leftrightarrow (1-d) r^{-2d} - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (1-d) r^{-2d} \geq 1$$

Se $d \geq 1$ mai verificata. Non c'è minimo.

Se $0 < d < 1$ si trova $r^{2d} \leq 1-d \Leftrightarrow r \leq \sqrt[2d]{1-d}$

Il minimo è: $\frac{1}{2} r^2 \left(\frac{1}{r^{2d}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \sqrt[2d]{1-d} \left(\frac{1}{1-d} - 1 \right) =$

$$= \frac{1}{2} (1-d)^{\frac{1}{d}} \frac{1-d+d}{1-d} = \frac{1}{2} (1-d)^{\frac{1}{d}-1}$$

Esercizio Si consideri l'insieme $M \subset \mathbb{R}^4$

$$M = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 ; x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4, xy - zw = 1 \}.$$

i) Proverò che M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^4$ e determinarne la dimensione.

ii) Dopo aver provato che esistono calcolare il minimo e il massimo della funzione $f(x, y, z, w) = x$ ristretta ad M .

Risoluzione, i) Siano $h_1, h_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h_1(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$

$$h_2(x, y, z, w) = xy - zw.$$

Gradienti

$$\nabla h_1 = (2x, 2y, 2z, 2w)$$

$$\nabla h_2 = (y, x, -w, -z).$$

Dobbiamo provare che la matrice $H = \begin{pmatrix} \nabla h_1 \\ \nabla h_2 \end{pmatrix}$ ha rango massimo ($= 2$) in tutti i punti di M .

Supponiamo che esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha \nabla h_1 + \beta \nabla h_2 = 0$

ovvero

$$\begin{cases} 2\alpha x = \beta y \\ 2\alpha y = \beta x \\ 2\alpha z = -\beta w \\ 2\alpha w = -\beta z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha(x^2 - y^2) = 0 \\ 2\alpha(z^2 - w^2) = 0 \end{cases}$$

Se $\alpha \neq 0$ deduciamo $x^2 = y^2$ e $z^2 = w^2$ da cui $x = \pm y$ e $z = \mp w$.

Nel caso $x = y$ e $z = -w$ si trova

$$\begin{cases} h_1 = 2x^2 + 2z^2 = 4 \\ h_2 = x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

Il caso $x = -y$ e $z = w$ è simile.

Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ si trova $x = y = z = w = 0$, impossibile.

Questo prova che M è una sottovarietà di dimensione 2.

ii) M è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^4$ e dunque compatto. Per il Teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo su M . Poniamo usare il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f = \frac{1}{2} \alpha \nabla h_1 + \beta \nabla h_2,$$

ovvero

$$\begin{cases} 1 = \alpha x + \beta y \\ 0 = \alpha y + \beta x \\ 0 = \alpha z - \beta w \\ 0 = \alpha w - \beta z \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$ allora $\beta \neq 0$ (1ª equazione) e quindi $x=w=z=0$. Impossibile (violata $h_2 = 1$). Quindi $\alpha \neq 0$.

Si trova

$$\begin{cases} y = -\frac{\beta}{\alpha} x \\ z = \frac{\beta}{\alpha} w \\ w = \frac{\beta}{\alpha} z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha x + \beta y = x \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) \quad * \\ z = \frac{\beta^2}{\alpha^2} z \end{cases}$$

Quindi $z=0$ oppure $\alpha^2 = \beta^2$. Il caso $\alpha^2 = \beta^2$ contraddice $*$.

Quindi, $z=0 \Rightarrow w=0$. Le equazioni $h_1 = 4$ e $h_2 = 1$

diventano

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^2 + 1 = 0,$$

Risolvenolo $x^2 = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Deduciamo che $\max_M f = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ e $\min_M f = -\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

□

Esercizio 3.71 Dopo aver disegnato l'insieme

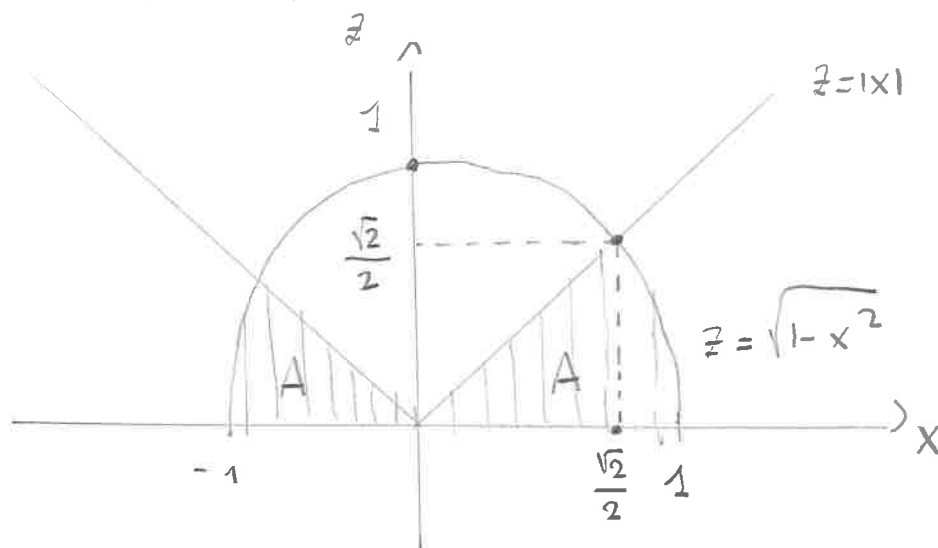
$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq \min \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\} \right\}$$

calcolare - se possibile - l'integrale

$$I_\alpha = \int_A (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dx dy dz$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Risoluzione. Disegniamo la regione di A con $y = 0$



$$\begin{aligned} \text{Abbiamo: } \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 + y^2 = 1 - (x^2 + y^2) \\ &(\Leftrightarrow) \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Dunque

$$\min \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\} = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

Il tutto considerato nel caso $x^2 + y^2 < 1$.

Per il Teorema di Tonelli :

$$\begin{aligned}
 I_d &= \int_{\{x^2+y^2 < 1\}} \left(\int_0^{\min\{\dots\}} (x^2+y^2+z^2)^d dz \right) dx dy \\
 &= \int_{\{x^2+y^2 < \frac{1}{2}\}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2+z^2)^d dz dx dy + \\
 &\quad + \int_{\{\frac{1}{2} < x^2+y^2 < 1\}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^d dz dx dy .
 \end{aligned}$$

Non sappiamo calcolare l'integrale interno ...

Proviamo scambiando l'ordine di integrazione.

Per $z \in (0, \sqrt{2})$ fissato, su A deve essere

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2+y^2} > z \quad \text{e} \quad \sqrt{1-x^2-y^2} > z \\
 \Downarrow \\
 1-z^2 > x^2+y^2 \quad (\Rightarrow) \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{1-z^2}
 \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
 I_d &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{z \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{1-z^2}} (x^2+y^2+z^2)^d dx dy dz = \text{Coord. Polari} \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_z^{\sqrt{1-z^2}} (r^2+z^2)^d 2\pi r dr dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[(z^2 + z^2)^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{2(\alpha+1)} \right]_{z=z}^{z=\sqrt{1-z^2}} dz \\
&\quad \uparrow \\
&\quad \alpha \neq -1 \\
&= \frac{\pi}{\alpha+1} \int_0^{\sqrt{2}/2} \left((1 - \cancel{z^2} + \cancel{z^2})^{\alpha+1} - (z^2 + z^2)^{\alpha+1} \right) dz \\
&= \frac{\pi}{\alpha+1} \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(1 - 2^{\alpha+1} z^{2(\alpha+1)} \right) dz \\
&\quad 2\alpha+3 \neq 0 \\
&= \frac{\pi}{\alpha+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{\alpha+1} \left[\frac{z^{2\alpha+3}}{2\alpha+3} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{2}/2} \right)
\end{aligned}$$

Per $\alpha \leq -3/2$ si trova $I_\alpha = +\infty$. Per $\alpha > -3/2$ l'integrale converge.

Esempio $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned}
I_{-1} &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_z^{\sqrt{1-z^2}} \frac{2\pi z}{z^2 + z^2} dz dz \\
&= \cancel{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}/2} \cancel{\frac{1}{2}} \left[\log(z^2 + z^2) \right]_{z=z}^{z=\sqrt{1-z^2}} dz \\
&= \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\underbrace{\log 1}_0 - \underbrace{\log 2z^2}_0 \right) dz \\
&= \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(-\log 2 - 2 \log z \right) dz \\
&= \text{per parti} = \text{etc.} \quad \text{Si calcola}
\end{aligned}$$

□