Introduzione al Calcolo delle Variazioni

Roberto Monti

Matematica – Anno Accademico 2016-17

Versione Preliminare degli Appunti del Corso – 15 Marzo 2017

E-mail address: monti@math.unipd.it

Indice

METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Sia X un insieme e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$ una funzione. Vogliamo studiare il problema di minimo

$$\min \{ F(x) \in (-\infty, \infty] \;:\; x \in X \}.$$

① Esistenza. Una strategia per dimostrare l'esistenza del minimo è il "metodo diretto del calcolo delle variazioni".

Cerchiamo una topologia τ su X con queste due proprietà:

i) $F : X \to (-\infty, \infty]$ è semicontinua inferiormente ovvero $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{ x \in X \;;\; F(x) > t \} \in \tau .$$

I sopralivelli stretti (aperti) sono insiemi aperti.

ii) (X, τ) è compatto.

Le due proprietà sono in competizione perché è più probabile che (X, τ) sia compatto quando ci sono pochi aperti ("τ è debole"). In questo caso però è più difficile che F sia s.c.i.

TEOREMA Sia (X, τ) compatto e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$ s.c.i. su X rispetto a τ. Allora F assume minimo su X.

Dim. Sia

$$m = \inf \{ F(x) \in (-\infty, \infty] : x \in X \}.$$

Stiamo supponendo $F \not\equiv \infty$ e quindi $m \in [-\infty, \infty)$.
Sia $(\lambda_h)_{h \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\lambda_{h+1} < \lambda_h \quad e \quad \lim_{h \to \infty} \lambda_h = m.$$

Gli insiemi

$$A_h = \{ x \in X ; \ F(x) > \lambda_h \}$$

sono aperti e $A_{h+1} \supset A_h$.
Per assurdo sia $F(x) \neq m \ \forall x \in X$. Allora

$$X = \bigcup_{h=1}^{\infty} A_h .$$

Per compattezza esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$X = \bigcup_{h=1}^{N} A_h = A_N .$$

Quindi $F(x) > \lambda_N > m \quad \forall x \in X$ contro la definizione di m.

$\square$

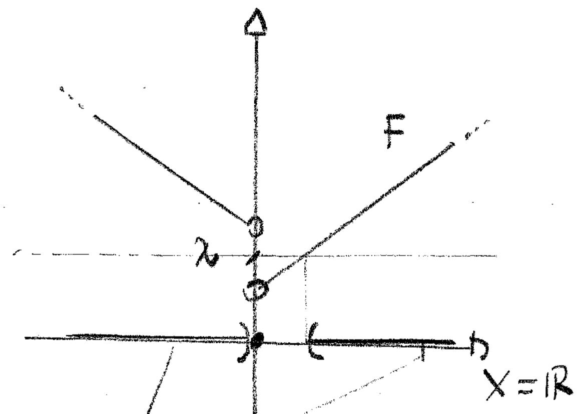
Esercizio: Siano (X,d) uno spazio metrico ed $F : X \to (-\infty, \infty]$. Mostrare che sono equivalenti:

A) F è s.c.i. su X.

B) Per ogni $x_0 \in X$ si ha:

$$F(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} F(x) := \lim_{r \to 0^+} \inf_{\substack{x \in B_r(x_0) \\ x \neq x_0}} F(x).$$

Esempio tipico:



$\{F > \lambda\} = A_\lambda$

② Condizioni necessarie. Se $x_0 \in X$ è un punto di minimo di F, allora è spesso possibile trovare delle condizioni necessarie di minimalità che si ottengono "derivando" F in qualche modo. Con notazione classica (che lasceremo indefinita) dovrà essere verificata un'equazione del tipo

$$(*) \qquad \delta F(x_0) = 0.$$

Se $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione è semplicemente $F'(x_0) = 0$.

Talvolta è possibile trovare anche condizioni necessarie del secondo ordine sotto forma di disequazioni del tipo

$$\delta^2 F(x_0) \geq 0 .$$

Quando X è uno spazio funzionale, l'equazione (*) si chiama equazione di Eulero-Lagrange

③ Condizioni sufficienti. Se $x_0 \in X$ è un punto stazionario, cioè verifica l'equazione variazionale (*), è interessante capire se è un minimo. Trovare condizioni sufficienti è tipicamente difficile.

④ Unicità. Sia X (un sottoinsieme convesso di) uno spazio lineare reale. Se $F: X \to (-\infty, \infty]$ è strettamente convessa:

$$F(tx + (1-t)y) < t\,F(x) + (1-t)\,F(y)$$

per $x \neq y$ in X e $t \in (0,1)$, allora il (punto di) minimo è unico (se esiste).

Inoltre con la convessità anche non stretta i punti stazionari sono minimi.

(5) Regolarità. Se non si riesce a dimostrare l'esistenza di minimi per F su X si può tentare questa strada.

Siano $\hat{X} \supset X$ ed $\hat{F} : \hat{X} \to (-\infty, \infty]$ tali che $\hat{F}|_X = F$.

Ora è più facile trovare una topologia (debole) su $\hat{X}$ che faccia funzionare il metodo diretto.

Se troviamo un minimo $\hat{x} \in \hat{X}$ per $\hat{F}$ possiamo sperare che sia in realtà $\hat{x} \in X$.

Questa strategia porta al problema della regolarità: il minimo trovato in uno spazio di funzioni poco regolari è in realtà in uno spazio di funzioni più regolari.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con proprietà da discutere.
Usiamo le variabili $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.
La funzione L è detta Lagrangiana.
Posto che sia ben definito, consideriamo il funzionale
$F : C^1(A) \to \mathbb{R}$

$$(*) \qquad F(u) = \int_A L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx .$$

Bisogna assicurarsi che $x \mapsto L(x, u(x), \nabla u(x))$ sia integrabile.
Un funzionale integrale della forma (*) si dice funzionale classico del Calcolo delle Variazioni.

Supponiamo che $u \in C^1(A)$ sia un minimo per variazioni compatte:

$$F(u) \leq F(u+\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in C^1_c(A).$$

Fissiamo una $\varphi \in C^1_c(A)$ e consideriamo
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = F(u + t\varphi), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Allora f ha un minimo in $t=0$ e se è

derivabile in $t=0$ allora deve essere $f'(0)=0$.

Con dei conti da giustificare caso per caso si trova

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\int_A L(x, u(x)+t\varphi(x), \nabla u(x)+t\nabla\varphi(x))\,dx$$

Da giustificare

$$= \int_A \frac{d}{dt}\Big(L(x, u(x)+t\varphi(x), \nabla u(x)+t\nabla\varphi(x))\Big)\,dx$$

Da giust.

$$= \int_A \Big(L_u(\ldots)\,\varphi(x) + \langle \nabla_\xi L(\ldots), \nabla\varphi(x)\rangle\Big)\,dx.$$

Devono esistere le derivate $L_u = \frac{\partial L}{\partial u}$ e $L_{\xi_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i}$, $i=1,\ldots,n$.

Mettendo $t=0$ si trova l'<u>equazione di Eulero-Lagrange in forma debole</u>:

$$(\mathrm{ELd})\quad 0 = \int_A \Big(L_u(x,u(x),\nabla u(x))\,\varphi(x) + \langle \underbrace{\nabla_\xi L(x,u(x),\nabla u(x))}_{=G(x)}, \nabla\varphi(x)\rangle\Big)\,dx,$$

che è verificata $\forall \varphi \in C^1_c(A)$.

Se $G: A \to \mathbb{R}^n$, $G(x) = \nabla_p L(x,u(x),\nabla u(x))$, è di classe $C^1(A;\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\langle G(x), \nabla\varphi(x)\rangle = \operatorname{div}(\varphi(x)\,G(x)) - \varphi(x)\operatorname{div} G(x)$$

Ora usiamo il seguente Lemma

Lemma Se $\varphi \in C_c^1(A)$ e $G \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ allora

$$\int_A \operatorname{div}(\varphi(x)\, G(x))\, dx = 0.$$

Segue dal teorema della divergenza o anche - più semplicemente - da Fubini - Tonelli e dal teorema fondamentale del calcolo integrale.

Dunque, l'equazione di Eulero - Lagrange (EL) diventa

$$0 = \int_A \varphi(x) \left\{ L_u(x, u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div}\left(\nabla_\xi L(x, u(x), \nabla u)\right)\right\} dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^1(A)$.

Ora usiamo il seguente Lemma

Lemma Sia $f \in C(A)$. Se $\int_A \varphi(x) f(x)\, dx = 0$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(A)$ allora $f = 0$.

Se fosse $f \in L^1_{loc}(A)$ si avrebbe $f = 0$ q.o. su A.

Dunque, se $x \mapsto \{\dots\}$ è continua si trova l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\text{(EL)} \qquad \operatorname{div}\left(\nabla_\xi L\,(x,u(x),\nabla u(x))\right) = L_u\,(x,u(x),\nabla u(x)) \,. \qquad x \in A$$

Qui abbiamo bisogno di $u \in C^2(A)$.

L'equazione (EL) è un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine in forma di divergenza.

<u>Esempi</u>

① Funzioni armoniche. Quando $L(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ si ha $L_u = 0$ e $\nabla_\xi L = \xi$.

Dunque l'equazione di Eulero-Lagrange per

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_A |\nabla u|^2 dx \quad \text{è} \quad \Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = 0 \text{ in } A$$

② p-Laplaciano. Dato $p > 1$:

$$F(u) = \frac{1}{p}\int_A |\nabla u|^p dx \quad \xrightarrow{EL} \quad \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$$

③ Superfici minime. Per il funzionale dell'Area

$$F(u) = \int_A \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx \xrightarrow{EL} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$$

Questa è l'equazione delle superfici minime

In ①-②-③ F è convesso.
L'equazione in ① è lineare.
Le equazioni in ②-③ sono non lineari.

EQUAZIONE DI DU BOIS-REYMOND

In dimensione $n=1$, l'equazione di Eulero-Lagrange si può integrare esplicitamente una volta, a patto che la Lagrangiana sia "autonoma" ovvero non dipenda dal punto $x \in A$ con $A \subset \mathbb{R}$ intervallo.

Sia $L : \underset{u}{\mathbb{R}} \times \underset{\xi}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ almeno di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia $u \in C^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}$ intervallo, una soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\left(L_\xi(u,u')\right)' - L_u(u,u') = 0 \quad \text{su } A,$$

consideriamo la funzione ausiliaria $H = H(x)$

$$H(x) = u'(x)\, L_\xi(u(x), u'(x)) - L(u(x), u'(x)).$$

La sua derivata è

$$\begin{aligned} H' &= \cancel{u'' L_\xi(u,u')} + u'\left(L_\xi(u,u')\right)' \\ &\quad - L_u(u,u')\, u' - \cancel{L_\xi(u,u')\, u''} \\ &= u'\left\{\left(L_\xi(u,u')\right)' - L_u(u,u')\right\} = 0. \end{aligned}$$

Quindi esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$H = u' L_\xi(u,u') - L(u,u') = c \quad \text{su } A.$$

Questa è l'equazione di Du Bois-Reymond.

$\square$

METODO DI CONVESSITÀ (Metodi indiretti)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera "regolare" (per il Teorema della divergenza), ad esempio localmente grafico di una funzione Lipschitz.

Sia $L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

1) $L \in C^2(\bar{A} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$;

2) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (u, \xi) \longmapsto L(x, u, \xi)$ è convessa per ogni $x \in A$.

Consideriamo il funzionale $F : C^1(\bar{A}) \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Sia $\varphi : \partial A \to \mathbb{R}$ una funzione continua assegnata

Sia $u \in C^1(\bar{A})$ una funzione tale che:

i) $u = \varphi$ su ∂A;

ii) u verifica in senso debole l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$0 = \int_A \left\{ \psi(x)\, L_u(x, u, \nabla u) + \langle \nabla_\xi L(x, u, \nabla u), \nabla \psi \rangle \right\} dx$$

per ogni $\psi \in C^1(\bar{A})$ tale che $\psi = 0$ su ∂A.

TEOREMA Nelle ipotesi precedenti la funzione $u \in C^1(\bar{A})$ è un minimo del problema

$$\min \{ F(v) \; ; \; v \in C^1(\bar{A}), \quad v = \varphi \text{ su } \partial A \}.$$

Dim. Consideriamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = F(u + t(v-u)) .$$

Allora $f(1) = F(v)$ ed $f(0) = F(u)$.
Vogliamo provare che $f(1) \geq f(0)$.
Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ esiste $t^* \in [0,1]$ tale che

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(t^*).$$

Calcoliamo

$$f'(t) = \int_A \frac{d}{dt} L(x, u + t(v-u), \nabla u + t\nabla(v-u)) \, dx$$

$$= \int_A \left(L_u(\dots)(v-u) + \langle \nabla_\xi L(\dots), \nabla(v-u) \rangle \right) dx$$

$$= 0,$$

in quanto $\psi = v - u \in C^1(\bar{A})$ è $\equiv 0$ su ∂A.

Quindi usando ii) si trova $f'(0) = 0$.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(t) = \int_A \left\langle H_{(u,\xi)} L\,(\ldots)\,(u-v, \nabla u - \nabla v), (u-v, \nabla u - \nabla v) \right\rangle dx$$

dove $H_{(u,\xi)} L$ è la matrice Hessiana di L. La derivata dentro l'integrale è lecita. Per la convessità si ha:

$$\left\langle H_{(u,\xi)} L\,(x, u+t(v-u), \nabla u + t\nabla(v-u))\,(u-v, \nabla u - \nabla v), (u-v, \nabla u - \nabla v) \right\rangle \geq 0$$

in ogni punto $x \in A$ e per ogni $t \in [0,1]$. La tesi segue.

$\square$

<u>ESEMPIO</u> (Legge dell'ottica geometrica)
Sia $f \in L^\infty(0,1)$ una funzione tale che $0 < m \leq f(x) (\leq M)$ per ogni $x \in (0,1)$.
Per $u \in Lip([0,1])$ si consideri

$$F(u) = \int_{[0,1]} f(x) \underbrace{\sqrt{1 + u'(x)^2}}_{\text{elemento di lunghezza}}\, dx$$

$f(x)$: densità ottica che dipende dallo spazio (mezzo)

La funzione $\xi \mapsto \sqrt{1+\xi^2}$ è strettamente convessa. La sua derivata è $\xi / \sqrt{1+\xi^2}$.

L'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole è

$$\int_{[0,1]} f(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \varphi'(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1).$$

Questo implica che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che (ESERCIZIO!)

$$f(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} = c \quad \text{per q.o. } x \in (0,1).$$

Siccome $f(x) > 0$ deduciamo che $u'(x)$ ha segno costante (q.o.). Inoltre

$$f(x)^2 u'(x)^2 = c^2 (1+u'(x)^2) \quad \Longleftrightarrow$$

$$u'(x)^2 (f(x)^2 - c^2) = c^2$$

Dunque $f(x)^2 > c^2$. (ovvero $|c| < 1$).

In definitiva:

$$u'(x) = \pm \sqrt{\frac{c^2}{f(x)^2 - c^2}} \quad \text{per q.o. } x$$

Fissiamo un punto iniziale $(0,u_0)\in\mathbb{R}^2$ e un punto finale $(1,u_1)\in\mathbb{R}^2$. Per fissare le idee supponiamo $u_1\geq u_0$ e quindi scegliamo il segno + in u'. Integrando

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \sqrt{\frac{c^2}{f(t)^2-c^2}}\,dt .$$

La condizione finale è

$$(*)\qquad u(1) = u_1 = u_0 + \int_0^1 \sqrt{\frac{c^2}{f(t)^2-c^2}}\,dt .$$

Sia

$$m := \sup\{\lambda\in\mathbb{R} \,;\, f(x)\geq\lambda \text{ per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } x\in[0,1]\}$$

l'estremo inferiore essenziale di f. Per ipotesi abbiamo $m>0$. Deve essere

$$c^2 < m^2.$$

La funzione $g:[0,m^2)\longrightarrow[0,\infty)$

$$g(s) := \int_0^1 \sqrt{\frac{s}{f(t)^2-s}}\,dt$$

è continua e strettamente crescente.

Sia $\Delta = \lim_{s \to m^2} g(s)$. Dunque, se

$$u_1 - u_0 < \Delta$$

esiste una unica $c \in [0, m)$ tale che la condizione di punto finale (*) sia verificata.

<u>TEOREMA</u> Siano $0 \leq u_1 - u_0 < \Delta$ e

$$X = \{ u \in \mathrm{Lip}([0,1]) \;;\; u(0) = u_0 \text{ e } u(1) = u_1 \}.$$

Allora il funzionale $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} f(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

ha minimo unico su X.

DIM. Abbiamo trovato un unico elemento di X che verifica l'equazione di Eulero-Lagrange e le condizioni al bordo. Per convessità questo elemento è un punto di minimo.

$\square$

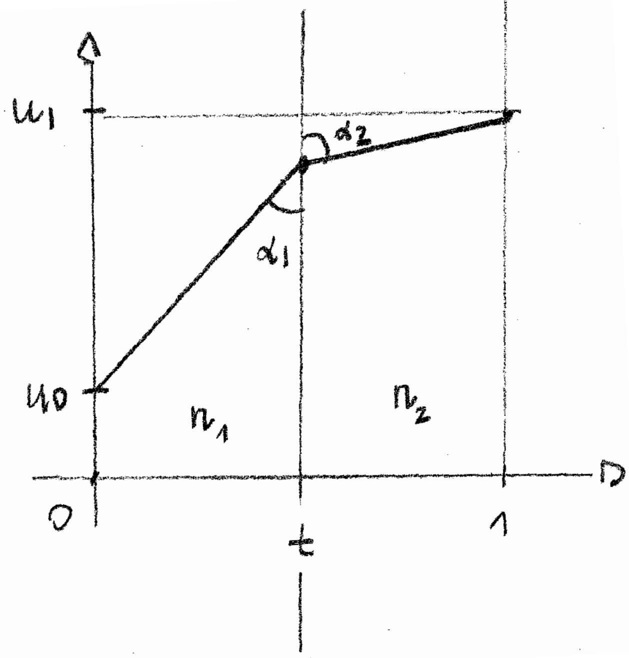
Principio di Fermat

- Fissiamo $t \in (0,1)$ e supponiamo che

$$f(x) = \begin{cases} n_1 & x \in (0,t), \\ n_2 & x \in (t,1). \end{cases}$$

con $n_1 > 0$ ed $n_2 > 0$, costanti.

Il minimo è della forma



Gli angoli α_1 e α_2 sono determinati.

Dedurre la legge di rifrazione:

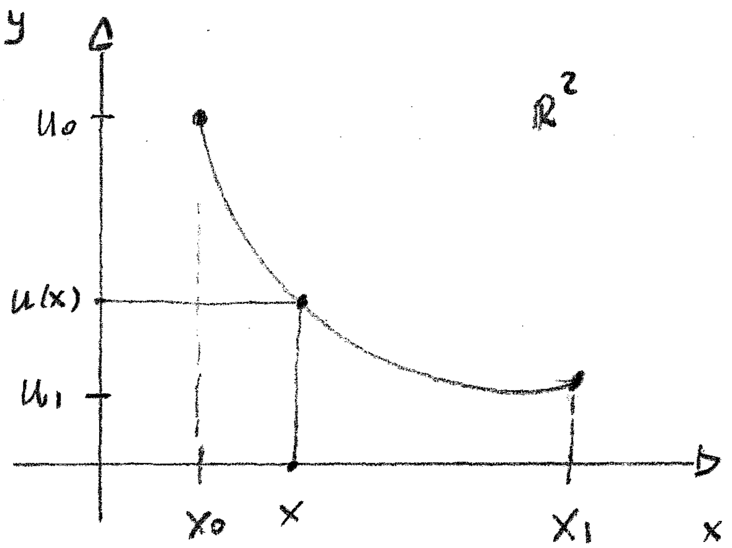
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}.$$

PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRÓNA

Siano $x_0 < x_1$ e $u_0 > u_1$.

Trovare la traiettoria che una particella percorre in tempo minimo cadendo sotto la forza di gravità, partendo dal punto $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ arrivando al punto $(x_1, u_1) \in \mathbb{R}^2$, "senza frizione".

Galileo 1638 : Arco di circonferenza.



m = massa g = costante gravitazionale

v = velocità (v=0 nel punto (x_0, u_0))

$u(x)$ = altezza all'ascissa $x \in [x_0, x_1]$

Conservazione energia:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g u(x) = m g u_0$$

e quindi $v = \sqrt{2g(u_0 - u)}$. La velocità è

$$v = \frac{ds}{dt} \quad , \qquad s = \text{lunghezza curvilinea}$$

e quindi $dt = ds/v$. Il tempo totale è

$$F(u) := T = \left(\int \frac{ds}{v} = \right) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{2g(u_0 - u(x))}}\, dx$$

Possiamo supporre $2g = 1$. La funzione

$$(u, \xi) \longmapsto \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{u_0 - u}}$$

non sembra convessa. Tuttavia ponendo

$$v = \sqrt{u_0 - u} \geq 0$$

con $v^2 = u_0 - u$ e $u' = -2vv'$ si trova

$$G(v) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1}{v(x)^2} + 4v'(x)^2}\, dx \,.$$

La funzione

$$(v,\xi) \longmapsto \sqrt{\frac{1}{v^2} + 4\xi^2} = \sup_{\substack{\alpha^2+\beta^2=1 \\ \alpha>0}} \left(\frac{\alpha}{v} + \overset{2}{\cancel{4}}\beta\xi \right)$$

definita per $v>0$ e $\xi \in \mathbb{R}$ è convessa, in quanto sup di funzioni convesse.

Dunque, i punti stazionari (soluzioni di Eulero-Lagrange) del funzionale

$$F(u) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u_0 - u(x)}}\, dx$$

con $u(0) = u_0$ e $u(1) = u_1$ sono minimi del problema

$$\min_{\substack{u(0)=u_0,\ u(1)=u_1,\ u'<0}} \left\{ F(u) \ ; \ u \in C([x_0,x_1]) \cap C^2(x_0,x_1) \right\}.$$

La Lagrangiana $L(u,\xi) = \sqrt{1+\xi^2} \big/ \sqrt{u_0 - u}$ ha le derivate

$$L_\xi = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}\,\sqrt{u_0-u}}, \quad L_u = +\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{(u_0-u)^{3/2}}.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è:

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u}}\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+u'^2}}{(u_0-u)^{3/2}}\,.$$

In realtà l'equazione si può integrare con il metodo di Du Bois-Reymond; esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{u'^2}{\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u}} - \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u_0-u}} = C$$

che diventa

$$-1 = C\,\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u}\,.$$

Quindi $C<0$ e quadrando:

$$(1+u'^2)(u_0-u) = \frac{1}{C^2}\,,$$

ovvero

$$u'\sqrt{\frac{C^2(u_0-u)}{1-C^2(u_0-u)}} = -1$$

Integrando si trova

$$\int_{x_0}^{x} u'(t)\sqrt{\frac{c^2(u_0-u(t))}{1-c^2(u_0-u(t))}}\,dt = -(x-x_0)$$

ovvero

$$\int_{u(x)}^{u_0}\sqrt{\frac{c^2(u_0-\tau)}{1-c^2(u_0-\tau)}}\,d\tau = x-x_0$$

con $x = x_1$ si trova la condizione

$$(*)\qquad \int_{u_1}^{u_0}\sqrt{\frac{c^2(u_0-\tau)}{1-c^2(u_0-\tau)}}\,d\tau = x_1-x_0 .$$

La costante c deve verificare $1-c^2(u_0-\tau)>0$ per ogni $\tau\in(u_1,u_0)$ e quindi

$$0\leq c^2 < \frac{1}{u_0-u_1} .$$

L'equazione $(*)$ ha soluzione unica c^2 se

$$(**)\qquad x_1-x_0 < \int_{u_1}^{u_0}\sqrt{\frac{u_0-\tau}{\tau-u_1}}\,d\tau ,$$

Riassumiamo la discussione precedente nel seguente teorema.

<u>TEOREMA</u> Siano $x_0 \leq x_1$ e $u_0 \geq u_1$ numeri reali che verificano (**). Sia poi

$$X = \left\{ u \in C([x_0,x_1]) \cap C^2(x_0,x_1) \;;\; \begin{matrix} u(x_0) = u_0 \\ u(x_1) = u_1 \\ u' < 0 \end{matrix} \right\}$$

e sia $F : X \to [0,\infty]$

$$F(u) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u_0 - u(x)}}\, dx .$$

Allora F ha minimo unico su X.

La dimostrazione è nelle pagine precedenti. In effetti il grafico del minimo u descrive un arco di cicloide.

BOUNDED SLOPE CONDITION

- $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato,
- $\mathcal{U} : \partial A \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione assegnata (Lipschitz continua),
- $\mathcal{A} = \{ u \in \mathrm{Lip}(\bar{A}) \; : \; u_{|\partial A} = \mathcal{U} \}$
  classe di funzioni ammesse,
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione convessa.

Consideriamo il funzionale $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A f(\nabla u(x))\, dx .$$

Dipende dal solo gradiente.
Per il Teorema di Rademacher $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^n$ esiste per q.o. $x \in A$, e inoltre $|\nabla u(x)| \leq \mathrm{Lip}(u)$, la costante di Lipschitz di u.
Inoltre, $x \longmapsto f(\nabla u(x))$ e' in $L^\infty(A)$ e quindi l'integrale converge.
Vogliamo studiare l'esistenza del minimo

$$\min \{ F(u) \; : \; \underbrace{u \in \mathrm{Lip}(\bar{A}) \text{ e } u_{|\partial A} = \mathcal{U}}_{u \in \mathcal{A}} \}.$$

ESEMPIO (Funzionale dell'area) La funzione $f(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$ è strettamente convessa e

$$F(u) = \int_A \sqrt{1+|Du(x)|^2}\, dx$$

è il funzionale dell'area.

Negli spazi di Sobolev l'ambiente naturale sarebbe $W^{1,1}(A)$ con $p=1$, quindi.

Assegnata $U \in Lip(\partial A)$ vogliamo trovare il grafico di area minima che ha come bordo il grafico di U. Non sempre esiste.

DEFINIZIONE (Bounded slope condition - Pendenza limitata)

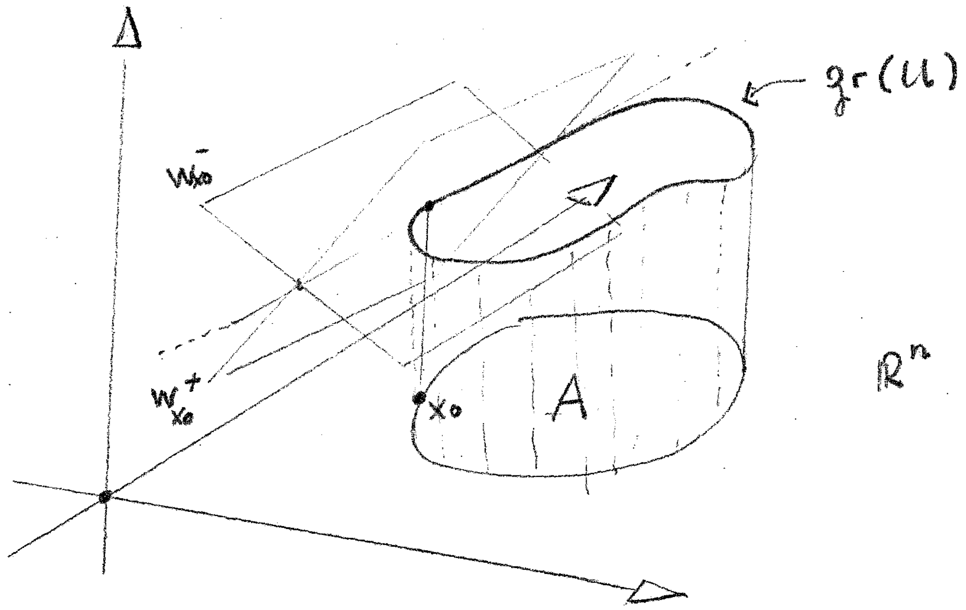
La coppia (A, U), con $U : \partial A \to \mathbb{R}$, verifica la bounded slope condition (BSC) se:

Esiste $Q > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \partial A$ esistono $w^-_{x_0}, w^+_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affini tali che:

i) $w^-_{x_0} \leq U \leq w^+_{x_0}$ su ∂A;

ii) $w^-_{x_0}(x_0) = U(x_0) = w^+_{x_0}(x_0)$;

iii) $Lip(w^{\pm}_{x_0}) \leq Q$.



<u>ESERCIZIO</u> Supponiamo che u non sia affine. Provare che:

$$(A, u) \text{ verifica BSC} \implies A \text{ è convesso.}$$

<u>REMARK</u> Se ∂A è di classe C^2 e le curvature principali di ∂A sono positive (>0) in ogni punto allora (A, u) verifica BSC per ogni $u \in C^2(\partial A)$. Teorema di Miranda, vedi Giusti Metodi Diretti del CdV Sez. 1.2.

Nostro obiettivo è di provare il seguente risultato.

limitato

<u>TEOREMA 1</u> Supponiamo che $(A, \mathcal{U})$ verifichi BSC, e sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (strettamente) convessa. Allora il minimo

$$\min \left\{ \int_A f(Du(x))\,dx \;:\; u \in Lip(\bar{A}) \text{ e } u_{|\partial A} = \mathcal{U} \right\}$$

è raggiunto (in modo unico se c'è "strettamente").

<u>NOTAZIONI</u>

$$Lip(u) = Lip_A(u) = \sup_{\substack{x, y \in A \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|}$$

$$Lip(A) = \left\{ u : \bar{A} \to \mathbb{R} \mid Lip(u) < \infty \right\}$$

$$Lip_K(A) = \left\{ u \in Lip(A) \;:\; Lip(u) \leq K \right\}, \qquad K > 0$$

$$Lip(A; \mathcal{U}) = \left\{ u \in Lip(A) \;:\; u_{|\partial A} = \mathcal{U} \right\}$$

$$Lip_K(A; \mathcal{U}) = \left\{ u \in Lip(A; \mathcal{U}) \;:\; Lip(u) \leq K \right\}.$$

<u>Proposizione 2</u> Siano $K > 0$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa e $\mathcal{U} \in Lip_K(\partial A)$. Allora il minimo

$$\min \left\{ F(u) = \int_A f(Du(x))\,dx \;:\; u \in Lip_K(A; \mathcal{U}) \right\}$$

è raggiunto.

DIM. In primo luogo $Lip_k(A;u) \neq \emptyset$, segue dal Teorema di estensione di Mac Shane.

■ → Supponiamo per semplicità $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Sia $L = \inf\{ F(u) ; u \in Lip_k(A;u) \}$ e consideriamo una successione minimizzante $u_h \in Lip_k(A;u)$, $h \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{h\to\infty} F(u_h) = L \in [-\infty, \infty).$$

$(L \in \mathbb{R})$

Abbiamo:

(x₀ ∈ ∂A a piacere)

i) $Lip(u_h) \leq K \quad \forall h$

ii) $|u_h(x)| \leq |u_h(x) - u_h(x_0)| + |u_h(x_0)|$

$$\leq K|x - x_0| + |u(x_0)|$$

$$\leq K \operatorname{diam}(A) + |u(x_0)| \qquad \forall x \in A \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Siamo nelle ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzelà. Quindi esiste una sottosuccessione – chiamata ancora $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ – che converge uniformemente ad una funzione $u \in Lip_k(A;u)$:

$$\lim_{h\to\infty} \max_{x\in\overline{A}} |u_h(x) - u(x)| = 0.$$

Dalla convessità di f:

$$f(\nabla u_h(x)) = f(\nabla u(x) + \nabla(u_h(x) - u(x))) \geq$$

Esiste q.o.

$$\geq f(\nabla u(x)) + \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h(x) - u(x)) \rangle$$

e quindi

$$F(u_h) \geq F(u) + \int_\Omega \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h(x) - u(x)) \rangle \, dx.$$

Vogliamo usare la convergenza uniforme $u_h \rightrightarrows u$: bisogna togliere le derivate.
Siccome $\nabla f(\nabla u(x)) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\forall \varepsilon > 0$ esiste $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_\Omega |G(x) - \nabla f(\nabla u(x))| \, dx \leq \varepsilon.$$

Dunque

$$\int_\Omega \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h - u) \rangle \, dx = \int_\Omega \langle G, \nabla(u_h - u) \rangle \, dx +$$

$$+ \int_\Omega \langle \nabla f(\nabla u) - G, \nabla(u_h - u) \rangle \, dx$$

$$\leq \int_\Omega \langle G, \nabla(u_h - u) \rangle \, dx + 2K\varepsilon.$$

Con una integrazione per parti e usando $u_h - u = 0$ su ∂A

$$\int_A \langle G, \nabla(u_h - u)\rangle dx = \underbrace{-\int_A \operatorname{div}(G)(u_h - u)\, dx}_{\downarrow\, h\to\infty \atop 0}$$

Concludiamo che

$$L = \lim_{h\to\infty} F(u_h) \geq F(u) - 2K\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

e quindi $F(u) \leq L$ e quindi $F(u) = L$.

$\square$

REMARK Sia u il minimo della Proposizione 2.
Se fosse $Lip(u) < K$ potremmo procedere nel seguente modo.
Sia $v \in Lip(A; u)$ solamente con $Lip(v) < \infty$.
Per $t \in (0,1)$ piccolo risulta $u + t(v-u) \in Lip_K(A;u)$ e quindi:

$$F(u) \leq F(tv + (1-t)u) \overset{\text{convessità}}{\leq} tF(v) + (1-t)F(u)$$

$$\Downarrow \quad (t>0)$$

$$F(u) \leq F(v)$$

Dunque, u sarebbe anche minimo per il TEOR. 1.

$\square$

DEFINIZIONE Una funzione $w \in Lip_k(A)$ si dice super-minimo del funzionale F se per ogni $\theta \in Lip_k(A, w)$ si ha
$$w \leq \theta \text{ in } A \quad \Rightarrow \quad F(w) \leq F(\theta).$$

Una funzione $v \in Lip_k(A)$ si dice sub-minimo per F se per ogni $\theta \in Lip_k(A, v)$ si ha
$$\theta \leq v \text{ in } A \quad \Rightarrow \quad F(v) \leq F(\theta).$$

COMMENTO I minimi di F (con dato al bordo fissato) sono sia super- che sub-minimi

TEOREMA (Principio del Massimo) Siano $k > 0$ ed $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strettamente convessa. Siano $w \in Lip_k(A)$ un superminimo di F e $v \in Lip_k(A)$ un sub-minimo di F. Allora:
$$v \leq w \text{ su } \partial A \quad \Rightarrow \quad v \leq w \text{ in } A.$$

DIM. L'insieme $B = \{x \in A ; v(x) > w(x)\}$ è aperto. Per assurdo supponiamo che $B \neq \emptyset$.

La funzione

$$\theta = \max\{v, w\} = \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in B \\ w(x) & \text{se } x \in A \setminus B \end{cases}$$

è in $\mathrm{Lip}_k(A)$. Inoltre $\theta = w$ su ∂A e $\theta \geq w$ in A. Poichè w è un superminimo, si ha

$$\int_A f(\nabla w)\, dx = F(w) \leq F(\theta) = \int_A f(\nabla \theta)\, dx ,$$

Siccome su $A \setminus B$ si ha $\nabla w = \nabla \theta$, deduciamo che

$$\int_B f(\nabla w)\, dx \leq \int_B f(\nabla v)\, dx .$$

Lavorando con $\hat{\theta} = \min\{v, w\}$ si ottiene la disuguaglianza opposta

$$\int_B f(\nabla v)\, dx \leq \int_B f(\nabla w)\, dx ,$$

e quindi;

$$\int_B f(\nabla v)\, dx = \int_B f(\nabla w)\, dx .$$

Sull'insieme B si deve avere $\nabla v \neq \nabla w$ su un insieme di misura positiva, altrimenti sarebbe $v = w$ in B (esercizio). Dunque, per la stretta convessità di f:

$$\int_B f\left(\nabla\left(\frac{v+w}{2}\right)\right) dx < \underbrace{\frac{1}{2}\int_B f(\nabla v)\, dx + \frac{1}{2}\int_B f(\nabla w)\, dx}_{\displaystyle \parallel \atop \displaystyle \int_B f(\nabla v)\, dx}\,.$$

Dunque la funzione

$$\hat{v} = \begin{cases} \dfrac{v+w}{2} & \text{su } B \\[2ex] v & \text{su } A \setminus B \end{cases}$$

contraddice la sub-minimalità di F.

Infatti $\hat{v} \in \mathrm{Lip}_k(A)$, $\hat{v} = v$ su ∂A e $\hat{v} \leq v$ in A.

$\square$

<u>COROLLARIO</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strettamente convessa e $k > 0$. Siano $v, w \in \mathrm{Lip}_k(A)$ due minimi di F ciascuno nella sua classe di dato al bordo. Allora:
$$\sup_A |v-w| = \sup_{\partial A} |v-w|.$$

Dim. Esercizio.

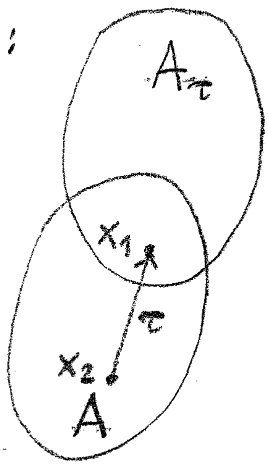
LEMMA (Riduzione alla frontiera) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ strettamente convessa e sia $u \in Lip_K(A)$ un minimo di:

$$F(u) = \int_A f(\nabla u(x))\, dx$$

in $Lip_K(A)$. Allora

$$Lip(u, A) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}.$$

Dim. Siano $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ e definiamo $\tau = x_1 - x_2$, $A_\tau = \tau + A$, $u_\tau(x) = u(x - \tau)$ con $u_\tau : A_\tau \longrightarrow \mathbb{R}$, si ha:



$$x_1 \in A \cap A_\tau \neq \emptyset.$$

Le due funzioni u e u_τ minimizzano

$$\int_{A \cap A_\tau} f(\nabla u(x))\, dx$$

(ciascuna con il suo dato al bordo).

Dal Principio del massimo (dal suo Corollario) segue:

$$|u(x_1) - u(x_2)| = |u(x_1) - u_\tau(x_1)| \leq$$

$$\leq |u(\bar{x}) - u_\tau(\bar{x})| = |u(\bar{x}) - u(\bar{x}-\tau)|$$

per qualche $\bar{x} \in \partial(A \cap A_\tau)$. Dunque si ha

$$\bar{x} \in \partial A \quad \text{oppure} \quad \bar{x}-\tau \in \partial A .$$

Quindi

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{|u(\bar{x}) - u(\bar{x}-\tau)|}{|\tau|} \leq \sup_{\substack{x \in A \\ y \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|},$$

e siccome x_1, x_2 sono generici, questo conclude la prova.

$\square$

<u>DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1</u>. Sia $Q > 0$ la costante della BSC e fissiamo $K > Q$.
Sia $u \in Lip_K(A; \mathcal{U})$ un (il, per stretta convessità) minimo di

$$\min \left\{ \int_A f(\nabla u)\, dx \; ; \; u \in Lip_K(A; \mathcal{U}) \right\}.$$

Sia $x_0 \in \partial A$. Siccome $u(x) = U(x)$ per $x \in \partial A$, dal Principio del Massimo segue

$$w^-_{x_0} \leq U \leq w^+_{x_0} \text{ su } \partial A \overset{PM}{\Longrightarrow} w^-_{x_0} \leq u \leq w^+_{x_0} \text{ su } A.$$

Per il Lemma di riduzione alla frontiera:

$$\mathrm{Lip}(u, A) = \sup_{\substack{x \in A \\ x_0 \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|}.$$

D'altra parte,

$$u(x) - u(x_0) \leq w^+_{x_0}(x) - w^+_{x_0}(x_0) \leq Q\,|x - x_0|$$

$$u(x) - u(x_0) \geq w^-_{x_0}(x) - w^-_{x_0}(x_0) \geq -Q\,|x - x_0|$$

e quindi $|u(x) - u(x_0)| \leq Q\,|x - x_0|$, ovvero

$$\mathrm{Lip}(u, A) \leq Q < K.$$

Dall'osservazione fatta in precedenza segue che u è un minimo senza la restrizione $\mathrm{Lip}(u, A) \leq K$.

$\square$

ESERCIZIO: I piani sono minimi nella loro classe di dato al bordo.

ELEMENTI ESSENZIALI SUGLI SPAZI DI SOBOLEV

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un aperto limitato e $1 \leq p \leq \infty$.
Diciamo che $f \in W^{1,p}(A)$ - f appartiene allo spazio di Sobolev $W^{1,p}(A)$ - se:

1) $f \in L^p(A)$;

2) Esistono funzioni $g_1, \dots, g_n \in L^p(A)$ tali che

$$\int_A f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_A g_i(x)\, \varphi(x)\, dx$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ e $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Chiameremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := g_i \in L^p(A), \qquad i = 1, \dots, n,$$

le derivate parziali deboli di f.
Indicheremo con

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

il gradiente (debole) di f.

con la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(A)} = \|f\|_{L^p(A)} + \|\nabla f\|_{L^p(A)}$$

$W^{1,p}(A)$ è uno spazio di Banach.

Lo spazio $W^{1,p}_0(A) \subset W^{1,p}(A)$ è formato dalle funzioni $f \in W^{1,p}(A)$ "che sono 0 su ∂A".

Precisamente:

$$W^{1,p}_0(A) = \overline{C^\infty_c(A)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(A)}}.$$

Notazione Quando $p=2$ si incontrano le notazioni

$$H^1(A) = W^{1,2}(A), \quad H^1_0(A) = W^{1,2}_0(A).$$

In dimensione $n=1$ gli spazi di Sobolev si descrivono in modo più concreto. Ad esempio, per l'intervallo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ si ha:

$$W^{1,p}(0,1) = \{ f \in AC([0,1]) \, ; \, f' \in L^p(0,1) \},$$

$$W^{1,p}_0(0,1) = \{ f \in AC([0,1]) \, ; \, f' \in L^p(0,1), \, f(0) = f(1) = 0 \}.$$

TOPOLOGIA FORTE E DEBOLE Su $W^{1,p}(A)$ ci sono la topologia forte e la topologia debole.

Quando $1 \leq p < \infty$ la topologia debole si descrive sequenzialmente nel seguente modo.

Siano $f, f_h \in W^{1,p}(A)$, $h \in \mathbb{N}$. Diciamo che

$$f_h \xrightarrow[h \to \infty]{W^{1,p}(A)} f \qquad \text{(convergenza debole in } W^{1,p}(A))$$

se:

① $$\int_A f_h \varphi \, dx \xrightarrow[h \to \infty]{} \int_A f \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in L^q(A)$$

② $$\int_A \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \varphi \, dx \xrightarrow[h \to \infty]{} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in L^q(A)$$
$$\forall i = 1, \dots, n,$$

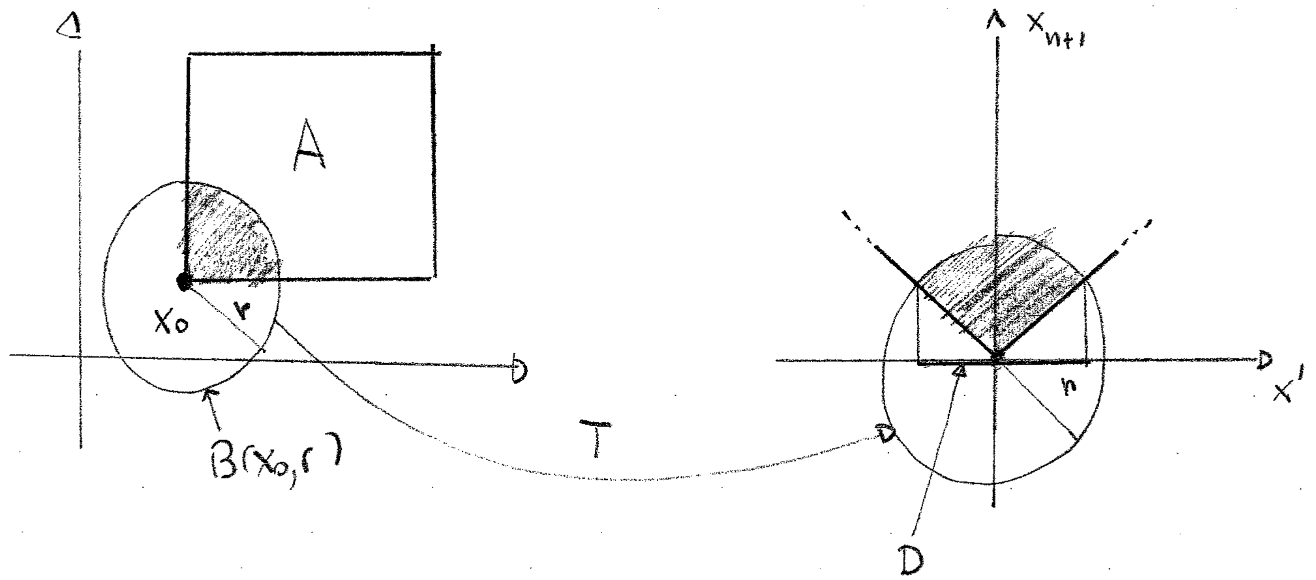
dove $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Quando $1 < p < \infty$, lo spazio $L^p(A)$ è riflessivo. Quindi per il Teorema di Banach-Alaoglu i sottoinsiemi limitati di $L^p(A)$ sono precompatti per la topologia debole.

Quindi gli insiemi limitati di $W^{1,p}(A)$ sono precompatti per la topologia debole di $W^{1,p}(A)$.

DEFINIZIONE Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ ha frontiera Lipschitziana se per ogni $x_0 \in \partial A$ esistono $r > 0$, un'isometria $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ed una funzione Lipschitziana $\psi : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tali che

$$T(\partial A \cap B(x_0, r)) = \{(x', \psi(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in D\}.$$



TEOREMA (Rellich - Kondrachov) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato con frontiera Lipschitziana. Sia $1 \leq p \leq \infty$. Allora l'immersione

$$W^{1,p}(A) \subset\subset L^p(A)$$

è compatta. Ovvero: i sottoinsiemi limitati di $W^{1,p}(A)$ sono precompatti in $L^p(A)$.

Quindi $p = \infty$ è una variante del Teorema di Ascoli - Arzelà. Vedremo in seguito la dimostrazione nel caso $p = 1$ per le funzioni BV.

Sia ora $1 \leq p < n$ e definiamo l'esponente di Sobolev coniugato:

$$p^* = \frac{pn}{n-p}$$

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera Lipschitz, $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$. Allora l'immersione $W^{1,p}(A) \subset\subset L^q(A)$ è compatta.

<u>COMMENTO</u> Per $W_0^{1,p}(A)$ si ha:

$$W_0^{1,p}(A) \subset\subset L^p(A) \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

$$W_0^{1,p}(A) \subset\subset L^q(A) \qquad \begin{array}{l} 1 \leq p < n \\ 1 \leq q < p^* \end{array}$$

con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato (senza ∂A Lipschitz).

DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato ed $f \in L^1(A)$. La media è

$$f_A = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A f(x)\, dx.$$

<u>TEOREMA</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz. Per ogni $1 \leq p < \infty$ esiste una costante $C = C(n, p, A)$ tale che

$$\int_A |f - f_A|^p\, dx \leq C \int_A |\nabla f|^p\, dx$$

per ogni $f \in W^{1,p}(A)$.

La dimostrazione segue da Rellich - Kondrachov.
Una variante è questa:

<u>TEOREMA</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $1 \leq p < \infty$. Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_A |f|^p dx \leq C \int_A |\nabla f|^p dx$$

per ogni $f \in W_0^{1,p}(A)$.

<u>SEMICONTINUITÀ INFERIORE DELLA NORMA</u>

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato con duale $(X^*, \|\cdot\|_*)$ dove

$$\|x^*\|_* := \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, x^* \rangle$$

Dal Teorema di Hahn - Banach segue che

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|_* \leq 1} \langle x, x^* \rangle$$

Supponiamo che $x_h \xrightarrow[h \to \infty]{X} x$, ovvero:

$$\langle x_h, x^* \rangle \xrightarrow[h \to \infty]{} \langle x, x^* \rangle \quad \forall x^* \in X^*$$

Dunque, se $\|x^*\|_* \leq 1$ si ha:

$$\langle x, x^* \rangle = \lim_{h\to\infty} (\inf) \langle x_h, x^* \rangle \leq \liminf_{h\to\infty} \|x_h\|$$

e passando a sup si trova la semicontinuità inferiore della norma per la convergenza debole

$$\|x\| \leq \liminf_{h\to\infty} \|x_h\|$$

se $x_h \rightharpoonup x$.

CONVESSITÀ E SEMICONTINUITÀ INFERIORE IN $W^{1,p}$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di Carathéodory se:

i) $x \longmapsto f(x, u, \xi)$ è ($\mathcal{L}^n$-)misurabile $\forall u \in \mathbb{R}$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$;

ii) Per ($\mathcal{L}^n$-)q.o. $x \in \Omega$, la funzione $(u, \xi) \longmapsto f(x, u, \xi)$ è continua.

ESERCIZIO Se f è di Carathéodory e $u: \Omega \to \mathbb{R}$ e $v: \Omega \to \mathbb{R}^n$ sono misurabili allora la funzione $x \longmapsto f(x, u(x), v(x))$ è misurabile.

Supponiamo d'ora in poi che sia anche $f \geq 0$.
Per $1 \leq p \leq \infty$ consideriamo il funzionale $F: W^{1,p}(\Omega) \to [0, \infty]$

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx .$$

TEOREMA Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ continua. Supponiamo che valga una delle due ipotesi:

1) F è sequenzialmente sci in $W^{1,p}(\Omega)$-debole per qualche $1 \leq p < \infty$. Oppure:

2) F è seq. sci in $W^{1,\infty}(\Omega)$-debole*.

Allora $\xi \longmapsto f(x, u, \xi)$ è convessa $\forall x \in \Omega$ e $\forall u \in \mathbb{R}$.

DIM. In realtà 1) => 2). Quindi supponiamo 2).

Presentiamo la dimostrazione nel seguente caso:

$n = 1$, $\Omega = (0,1)$, $f = f(\xi)$ con $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$.

L'ipotesi è che:

$$u_h \xrightarrow{W^{1,\infty}\text{-debole}^*} u \quad \Rightarrow \quad F(u) \le \liminf_{h\to\infty} F(u_h).$$

L'antecedente significa che

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} u_h \phi \, dx = \int_{[0,1]} u \phi \, dx, \qquad \forall \phi \in W^{1,1}(0,1)$$

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} u_h' \phi' \, dx = \int_{[0,1]} u' \phi' \, dx .$$

Dobbiamo provare che $\forall \xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha:

$$f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \le t f(\xi_1) + (1-t) f(\xi_0).$$

Definiamo $v : [0,1) \to \mathbb{R}$

$$v(x) = \begin{cases} \xi_1 & \text{se } x \in [0,t) \\ \xi_0 & \text{se } x \in [t,1) \end{cases}$$

estesa su $\mathbb{R}$ per 1-periodicità. Poi sia $v_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$v_h(x) = v(hx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per h grande le oscillazioni sono frequenti.

Ora integriamo e definiamo $u_h : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$u_h(x) = \int_0^x v_h(s)\, ds.$$

Si ha $u_h \in W^{1,\infty}(0,1)$, $u_h' = v_h$ e inoltre per ogni $\psi \in L^1(0,1)$ si ha

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} v_h \psi \, dx \overset{\text{Esercizio}}{=} \int_{[0,1]} v(x)\, dx \int_{[0,1]} \psi(x)\, dx$$

$$= (t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \int_{[0,1]} \psi(x)\, dx.$$

In altri termini:

$$u_h' = v_h \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty(0,1)\text{-debole}^*} t\xi_1 + (1-t)\xi_0 \quad \text{costante}$$

Analogamente: $u_h \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty - d*} x(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) =: u.$

Dall'ipotesi si ricava che

$$\int_{[0,1]} f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \, dx = F(u) \leq \liminf_{h\to\infty} F(u_h) =$$

$$= \liminf_{h\to\infty} \int_{[0,1]} f(v_h)\, dx$$

Ma con gli argomenti precedenti si vede che

$$f(v_h) \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty(0,1)\text{-debole}*} t\, f(\xi_1) + (1-t)\, f(\xi_0)$$

e concludiamo che

$$f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \leq t\, f(\xi_1) + (1-t)\, f(\xi_0)$$

$\square$

Ora invertiamo il teorema precedente: mostriamo che la convessità implica la semicontinuità inferiore in $W^{1,p}(\Omega)$-debole.

<u>TEOREMA (Tonelli)</u> Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty]$ di Carathéodory. Supponiamo che $\xi \longmapsto f(x,u,\xi)$ sia convessa per q.o. $x \in \Omega$ ed $u \in \mathbb{R}$. Allora il funzionale $F: W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty]$, $1 \leq p < \infty$,

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

è s.c.i. in $W^{1,p}(\Omega)$-debole.

Dim. Vediamo la dimostrazione in un caso modello. Sia $f = f(\xi)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo inoltre che esista una costante $C > 0$ tale che

$$|\nabla f(\xi)| \leq C |\xi|^{p-1} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sia dunque $u, u_h \in W^{1,p}(\Omega)$ tali che

$$u_h \xrightarrow[h \to \infty]{} u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega) \text{ debole}.$$

Usando la convessità di f si trova

$$F(u_h) = \int_\Omega f(\nabla u_h)\, dx \geq \int_\Omega \big(f(\nabla u) + \langle \nabla f(\nabla u), \nabla u_h - \nabla u \rangle \big)\, dx.$$

Osserviamo che

$$|\nabla f(\nabla u)| \leq C |\nabla u|^{p-1} \in L^q(\Omega)$$

con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Infatti $(p-1)q = p$ e $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$.

Dunque si ha

$$\lim_{h \to \infty} \int_\Omega \langle \nabla f(\nabla u), \nabla u_h - \nabla u \rangle\, dx = 0.$$

Concludiamo che

$$\liminf_{h \to \infty} F(u_h) \geq \int_\Omega f(\nabla u)\, dx = F(u).$$

□

ESISTENZA DI MINIMI IN $W^{1,p}$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz.
Fissiamo una funzione $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ che svolge il ruolo di dato al bordo, con $1 \leq p < \infty$, e consideriamo la classe di funzioni ammissibili

$$\mathcal{A} = u_0 + W_0^{1,p}(\Omega).$$

Data una funzione di Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ consideriamo il funzionale $F : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Supponiamo che esista $\bar{u} \in \mathcal{A}$ tale che $F(\bar{u}) < \infty$.

<u>TEOREMA</u> Oltre alle ipotesi precedenti supponiamo che:

i) sia $1 < p < \infty$;

ii) $\xi \longmapsto f(x, u, \xi)$ sia convessa $\forall u \in \mathbb{R}$ e per q.o. $x \in \Omega$;

iii) Esistano $g \in L^1(\Omega)$ e $C > 0$ tali che

$$f(x, u, \xi) \geq g(x) + C|\xi|^p \qquad \forall \xi \text{ e per q.o. } x,$$

Allora F ha minimo su A.

Dim. Sia $K = \{ u \in \mathcal{A} \; ; \; F(u) \leq F(\bar{u}) \} \subset W^{1,p}(\Omega)$.
Fissiamo su K la topologia debole di $W^{1,p}(\Omega)$.
Dalla ii) (convessità di $\xi \mapsto f(\cdot,\cdot,\xi)$) segue che
$F : K \to \mathbb{R}$ è semicontinuo inferiormente.
Inoltre, se $u \in K$ dalla condizione di coercività iii) segue che

$$F(\bar{u}) \geq F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega g(x)\,dx + C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx$$

e quindi

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leq \frac{1}{C}\left(\|g\|_1 + F(\bar{u}) \right).$$

Dalla Disuguaglianza di Poincaré:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u - u_0\|_{L^p(\Omega)} + \|u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq C_1 \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla u_0|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \|u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq C_1 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|u_0\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Quindi K è limitato in $W^{1,p}(\Omega)$.

Siccome K è chiuso per la topologia debole $W^{1,p}(\Omega)$

e siccome $p>1$

dal Teorema di Banach - Alaoglu segue che K

è compatto nella topologia debole di $W^{1,p}(\Omega)$.

L'esistenza del minimo segue dal Teorema di Weierstraß.

$\square$

ESEMPIO 1 Sia $\mathcal{A} = \left\{ u \in W^{1,1}([0,1]) = AC([0,1]) : \begin{array}{l} u(0)=0 \\ u(1)=1 \end{array} \right\}$

e sia $F : \mathcal{A} \to [0,\infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \sqrt{u^2 + u'^2}\, dx .$$

Le ipotesi ii) e iii) sono verificate. Non la (i): qui abbiamo $p=1$.

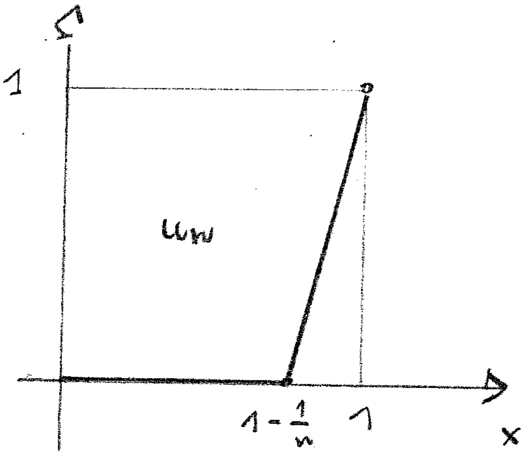
Verifichiamo che il minimo non è raggiunto.

Se $u \in \mathcal{A}$ allora

$$(*) \qquad F(u) \geq \int_{[0,1]} |u'|\,dx \geq \int_{[0,1]} u'(x)\,dx \overset{u \in AC}{=} u(1) - u(0) = 1$$

Quindi $\inf \{ F(u) : u \in \mathcal{A} \} \geq 1$.

Dato $n \in \mathbb{N}$ si consideri $u_n \in AC([0,1])$ fatta in questo modo



Allora

$$F(u_n) = \int_{[1-\frac{1}{n},1]} \sqrt{u^2+u'^2}\,dx \leq \int_{[1-\frac{1}{n},1]} \sqrt{1+n^2}\,dx = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$$

e quindi

$$\inf\{F(u)\,;\,u \in \mathcal{A}\} = 1.$$

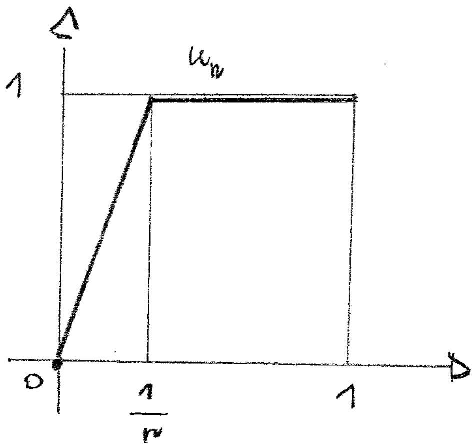
Se $u \in \mathcal{A}$ fosse un minimo, allora in (*) dovremmo avere tutte uguaglianze, cosa che implicherebbe $u(x) = 0$ per (quasi) ogni $x \in [0,1]$, contro le condizioni al bordo.

<u>ESEMPIO 2 (Weierstrass)</u> Sia $\mathcal{A} = \left\{ u \in W^{1,2}(0,1) \; : \; \begin{array}{l} u(0)=0 \\ u(1)=1 \end{array} \right\}$

e sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} x^2 u'(x)^2 \, dx .$$

Le condizioni i) e ii) sono verificate, ma non la coercività iii). Verifichiamo che il minimo non viene raggiunto. Basta considerare $u_n \in W^{1,2}(0,1)$ fatta nel seguente modo



$$F(u_n) = \int_{[0,\frac{1}{n}]} x^2 n^2 \, dx = \frac{1}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

quindi $\inf \{ F(u) \; ; \; u \in \mathcal{A} \} = 0$, Ma $F(u) = 0$ implica $u' = 0$ q.o. e quindi $u =$ costante (perchè $u \in AC$). Questo è incompatibile con i dati al bordo.

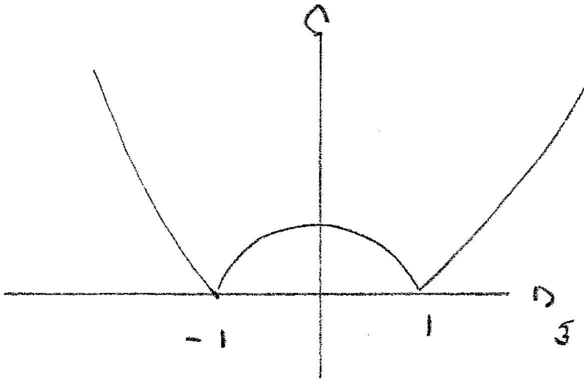
$\square$

ESEMPIO 3 (Bolza) Sia $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2}(0,1) : u(0)=u(1)=0\}$

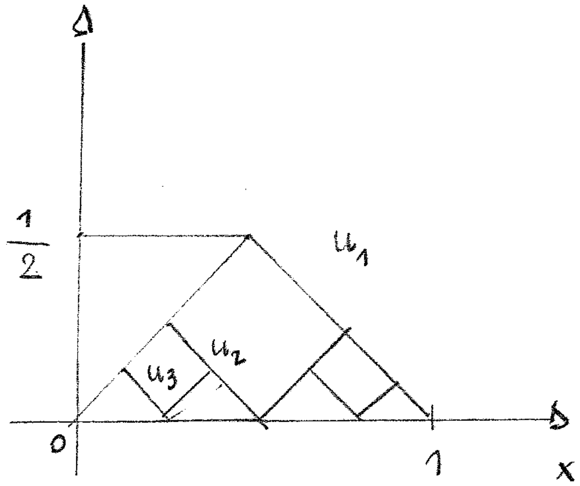
e sia $F : \mathcal{A} \to [0,\infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \left(|u'^2 - 1| + u^2 \right) dx .$$

La i) e la iii) sono verificate, ma non la ii) perché $\xi \mapsto |\xi^2 - 1|$ non è convessa



Per $n \in \mathbb{N}$ sia $u_n \in W^{1,2}(0,1)$ come in figura:



Chiaramente $|u_n'(x)| = 1$ q.o. e inoltre $\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n}$

Quindi $\lim_{n\to\infty} F(u_n) = 0$ e dunque $\inf\{F(u) : u \in \mathcal{A}\} = 0$. Ma $F(u) = 0$ implica $|u'(x)| = 1$ q.o. e $u = 0$, che sono incompatibili.

□

ESEMPIO 4 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz, $n \geq 1$. Sia

$$X = \left\{ u \in H^1(A) : \int_A u\, dx = 0 \right\}.$$

Si tratta di un sottospazio chiuso di $H^1(A)$.
É il complemento ortogonale della funzione $1 \in H^1(A)$.

Sia $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ il funzionale

$$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right\} dx$$

dove $f \in L^2(A)$ è una funzione fissata.

Studiamo il problema di minimo

$$\min \left\{ F(u) \ ; \ u \in X \right\}.$$

Sia $u_h \in X$, $h \in \mathbb{N}$, una successione minimizzante:

$$\lim_{h \to \infty} F(u_h) = \inf \left\{ F(u) \ ; \ u \in X \right\}.$$

Esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che $\forall h \in \mathbb{N}$

$$\int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 + f u_h \right\} dx \leq C .$$

Dato un parametro $\varepsilon > 0$, avremo

$$\int_A f u_h \, dx \geq - \frac{1}{2} \int_A \left(\frac{1}{\varepsilon} f^2 + \varepsilon\, u_h^2 \right) dx$$

e per la disuguaglianza di Poincaré esiste una costante $C_A > 0$ tale che

$$\int_A |u_h|^2 dx = \int_A |u_h - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Media} = 0}}{(u_h)_A}|^2 dx \leq C_A \int_A |\nabla u_h|^2 dx$$

e dunque

$$\int_A f \, u_h \, dx \geq -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|f\|^2_{L^2} + \varepsilon C_A \int_A |\nabla u_h|^2 dx \right\}.$$

In definitiva si trova

$$\frac{1}{2} (1 - \varepsilon C_A) \int_A |\nabla u_h|^2 dx \leq C + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|^2_{L^2(A)},$$

e scegliendo $1 - \varepsilon C_A \geq \frac{1}{2}$ $\quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2C_A} \right)$

si vede che esiste una costante $0 < C_1 < \infty$ tale che

$$\int_A |\nabla u_h|^2 dx \leq C_1 \qquad \forall h \in \mathbb{N}$$

e quindi anche

$$\int_A u_h^2 dx \leq C_A \cdot C_1 \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema di compattezza debole esiste $u \in H^1(A)$ ed esiste una sottosuccessione di $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ – chiamata ancora $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ – tale che

$$u_h \xrightarrow[h \to \infty]{H^1(A)} u$$

ovvero:

$$u_h \xrightarrow{L^2} u$$

$$\nabla u_h \xrightarrow{L^2} \nabla u .$$

(Dal Teorema di Rellich-Kondrachov segue che $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ è (pre)compatta in $L^2(A)$ e quindi – a meno di ulteriore s.s. – si ha in effetti $u_h \xrightarrow{L^2} u$ fortemente. Non useremo questo fatto.)

Per semicontinuità inferiore si ha

$$\int_A |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{h \to \infty} \int_A |\nabla u_h|^2 dx .$$

Inoltre
$$\lim_{h \to \infty} \int_A u_h f \, dx = \int_A u f \, dx$$

e
$$0 = \lim_{h \to \infty} \int_A u_h \, dx = \int_A u \, dx ,$$

In particolare $u \in X$. Infine

$$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right\} dx \leq$$

$$\leq \liminf_{h \to \infty} \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 + f u_h \right\} =$$

$$= \lim_{h \to \infty} F(u_h) .$$

Quindi u è il minimo di F su X.

Supponiamo che u e $\bar{u}$ siano due minimi. Siccome $u \mapsto F(u)$ è convesso si ha

$$F\left(\frac{u+\bar{u}}{2} \right) \leq \frac{1}{2} F(u) + \frac{1}{2} F(\bar{u})$$

e per la minimalità si ha $=$, cosa che implica

$$\int_A \left| \nabla \frac{u+\bar{u}}{2} \right|^2 dx = \frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_A |\nabla \bar{u}|^2 dx$$

Dalla stretta convessità di $\xi \mapsto |\xi|^2$ si deduce che deve essere $\nabla u = \nabla \bar{u}$ q.o. su A, ovvero $\nabla (u - \bar{u}) = 0$. La disuguaglianza di Poincaré

$$\int_A (u-\bar{u})^2 dx \leq c_A \int_A |\nabla (u-\bar{u})|^2 dx = 0$$

implica $u = \bar{u}$.

Questo prova l'unicità del minimo.
Deriviamo l'equazioni di Eulero-Lagrange in forma debole. Sia $\varphi \in C_c^\infty(A)$, allora

$$\psi := \varphi - \varphi_A = \varphi - \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A \varphi \, dx \in X.$$

Per $\varepsilon \in \mathbb{R}$ si consideri

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= F(u+\varepsilon\psi) \\ &= \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u + \varepsilon \nabla\psi|^2 + f(u+\varepsilon\psi) \right\} dx \\ &= \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 |\nabla\psi|^2 + \varepsilon \langle \nabla u, \nabla\psi \rangle \right. \\ &\qquad \left. + f\,(u+\varepsilon\psi) \right\} dx \end{aligned}$$

e dunque

$$g'(0) = \int_A \{ \langle \nabla u, \nabla\psi \rangle + f\psi \} \, dx .$$

Se u è un minimo si trova

$$0 = g'(0) = \int_A \{ \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle + f(\varphi - \varphi_A) \} \, dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Osserviamo che $\int_A f\, \varphi_A\, dx = \int_A f_A\, \varphi\, dx$

e quindi l'equazione è

$$\int_A \{ \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + (f - f_A)\varphi \}\, dx \overset{\forall \varphi}{=} 0 ,$$

Per la teoria della regolarità (che noi non vedremo) si ha $u \in H^2(A)$, ovvero u possiede le derivate seconde in $L^2(A)$ in senso debole. Inoltre

$$\circledast \qquad \int_A \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle\, dx \overset{\varphi \in C_c^\infty(A)}{=} - \int_A \Delta u\, \varphi\, dx$$

e l'equazione diventa

$$\int_A \{ -\Delta u + f - f_A \}\, \varphi\, dx \overset{\forall \varphi}{=} 0$$

Quindi si trova l'equazione in $L^2(A)$

$$(\square) \qquad \Delta u = f - f_A \qquad \text{in } L^2(A)$$

(Equazione di Poisson).

I conti precedenti si possono ripetere anche a partire da $\varphi \in C^\infty(\overline{A})$. L'unica differenza è in $\circledast$. Ora si ha

$$\int_A \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_A \left\{ \operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \varphi \Delta u \right\} dx .$$

In modo "formale" si trova col teorema della divergenza

$$\int_A \operatorname{div}(\varphi \nabla u) \, dx = \int_{\partial A} \varphi \langle \nabla u, \nu \rangle \, dH^{n-1} .$$

Bisogna che ∇u sia definito H^{n-1}-q.o. su ∂A.

Tenuto conto di $(\square)$, l'equazione di Eulero-Lagrange diventa ora

$$\int_{\partial A} \varphi \langle \nabla u, \nu \rangle \, dH^{n-1} = 0 \qquad \forall \varphi \in C(\partial A)$$

Questo implica che

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle = 0 \qquad \text{su } \partial A .$$

Questa è la condizione di Neumann.

$\square$

FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

DEF Diciamo che $f \in BV(A)$ è una funzione a variazione limitata in A se $f \in L^1(A)$ e

$$\|Df\|(A) := \sup \left\{ \int_A f \operatorname{div} \varphi \, dx \; : \; \begin{array}{l} \varphi \in C^1_c(A; \mathbb{R}^n) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \end{array} \right\} < \infty.$$

Chiamiamo $\|Df\|(A)$ la variazione totale di f in A.

DEF Diciamo che $f \in BV_{loc}(A)$ è una funzione localmente a variazione limitata se $f \in L^1_{loc}(A)$ e per ogni aperto $B \subset\subset A$ ($\underset{\text{compatto}}{\overline{B}} \subset A$) si ha $\|Df\|(B) < \infty$.

Notazione $\operatorname{div} \varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$ è la divergenza di $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Le funzioni a variazione limitata hanno derivata distribuzionale come misura.

<u>Notazione</u> Con $C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ indichiamo l'insieme delle funzioni continue $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tali che

$$\mathrm{spt}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

è compatto. Qui $n, m \geq 1$.

Il teorema di Riesz descrive il duale delle funzioni continue con supporto compatto.

<u>TEOREMA (Riesz)</u> Sia $T : C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$ una trasformazione lineare che sia (limitata) continua nel seguente senso: per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$\sup\Big\{ T(f) : f \in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ \underset{\|f\|_\infty \leq 1}{\mathrm{spt}(f) \subset K} \Big\} < \infty.$$

Allora esistono una misura di Radon μ su $\mathbb{R}^n$ ed una funzione μ-misurabile $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tali che:

(i) $T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, \sigma \rangle \, d\mu \qquad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$;

(ii) $|\sigma(x)| = 1$ per μ-q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Omettiamo la dimostrazione, che si fa così:

1) Si costruisce μ nel seguente modo:

$$\mu(A) = \sup \{ T(f) : f \in C_c(A; \mathbb{R}^m), \|f\|_\infty \leq 1 \}$$

con A aperto.

2) Si prova che μ è di Borel regolare finita sui compatti ($\to$ Radon)

3) Si costruisce σ. Questa parte è complicata. Si lavora per componenti. Si usa il teorema

$$L^1(\mathbb{R}^n; \mu)^* = L^\infty(\mathbb{R}^n; \mu).$$

Si verifica che $|\sigma(x)| = 1$ q.o.

Con il teorema di Riesz si ottiene la descrizione distribuzionale del gradiente distribuzionale delle funzioni BV.

TEOREMA Sia $f \in BV_{loc}(A)$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Allora esistono una misura di Radon μ in A ed una funzione μ-misurabile $\sigma : A \to \mathbb{R}^n$ tali che:

i) $|\sigma(x)| = 1$ μ-q.o.

ii) Vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_A f \operatorname{div}\varphi \, dx = -\int_A \langle \varphi, \sigma \rangle \, d\mu$$

per ogni $\varphi \in C^1_c(A; \mathbb{R}^n)$.

NOTAZIONE Useremo le seguenti notazioni:

$\|Df\| = \mu$ misura di Radon ≥ 0,

$[Df] = \sigma\mu$ misura di Radon vettoriale,

$\mu^i = \sigma^i \mu$ misura di Radon con segno.

$i = 1, \dots, n$

La formula di integrazione per parti diventa

$$\int_A f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = - \int_A \varphi \, d\mu^i$$

$$i = 1, \ldots, n$$

per ogni $\varphi \in C_c^1(A)$. Ovvero, μ^i è la derivata direzionale i-esima di f (è una misura) nel senso delle distribuzioni.

<u>DIMOSTRAZIONE</u> Definiamo l'operatore lineare

$$T : C_c^1(A; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(\varphi) = - \int_A f \operatorname{div} \varphi \, dx , \qquad \varphi \in C_c^1(A; \mathbb{R}^n).$$

Siccome $f \in BV_{loc}(A)$, per ogni insieme aperto $B \subset\subset A$ si ha

$$\| Df \| (B) = \sup \left\{ \int_A f \operatorname{div} \varphi \, dx \; : \; \begin{array}{c} \varphi \in C_c^1(B; \mathbb{R}^n) \\ \|\varphi\|_\infty \le 1 \end{array} \right\} < \infty ,$$

e quindi

$$\text{*)} \qquad |T(\varphi)| \leq \|Df\|(B)\, \|\varphi\|_\infty \ , \qquad \forall \varphi \in C^1_c(B;\mathbb{R}^n).$$

Sia ora $K \subset A$ un insieme compatto e sia $B \subset A$ aperto tale che $K \subset B$. Data $\varphi \in C(A;\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{spt}(\varphi) \subset K$, esiste una successione $\varphi_k \in C^\infty_c(B;\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, tale che

$$(\square) \qquad \lim_{k\to\infty} \|\varphi - \varphi_k\|_{L^\infty(B)} = 0 .$$

Basta fare delle mollificazioni.

Dalla *) segue che

$$(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ di Cauchy in } L^\infty(B) \implies (T(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ di Cauchy in } \mathbb{R}$$

Quindi esiste finito il limite

$$T(\varphi) := \lim_{k\to\infty} T(\varphi_k)$$

(e non dipende da $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, purché valga $(\square)$).

Ora abbiamo $T : C_c(A; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare

e dalla $*)$ segue che

$$\sup \left\{ T(\varphi) : \varphi \in C_c(A; \mathbb{R}^n), \ \underset{\|\varphi\|_\infty \leq 1}{\operatorname{spt}(\varphi) \subset K} \right\} \leq \|Df\|(B) < \infty$$

con $K \subset B \subset\subset A$ come sopra.

Ora si usa il Teorema di Riesz per trovare μ e σ.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Provare che $f \in BV(\mathbb{R}^n)$, calcolare σ e μ.

<u>COMMENTO STORICO</u> La definizione di De Giorgi di $BV(\mathbb{R}^n)$ era la seguente. Data $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si considera il problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{in } L^1(\mathbb{R}^n) \, . \end{cases}$$

La soluzione u verifica $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ e

$$\lim_{t \to 0^+} \| u(x,t) - f(x) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0 \, .$$

La soluzione è in effetti unica ed è

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy \, .$$

De Giorgi osserva che la funzione

$$t \longrightarrow \phi(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)| \, dx \, , \quad t > 0$$

è decrescente e quindi si può sempre definire

$$\|Df\|(\mathbb{R}^n) := \lim_{t \to 0^+} \phi(t) \in [0, \infty] .$$

Allora diciamo che $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|Df\|(\mathbb{R}^n) < \infty$.

La definizione è equivalente alle precedenti.

□

Ora vogliamo esaminare la struttura della misura vettoriale $[Df]$. Ci serve il teorema di decomposizione delle misure di Radon.

<u>DEFINIZIONE</u> Diciamo che due misure di Radon μ e ν in $\mathbb{R}^n$ sono ortogonali se esiste un insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\nu(B) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$.
Scriveremo $\mu \perp \nu$.

TEOREMA Siano μ e ν due misure di Radon in $\mathbb{R}^n$. Allora esistono due misure di Radon ν_{ac} e ν_s su $\mathbb{R}^n$ tali che:

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s \,, \quad \nu_{ac} \ll \mu \quad e \quad \nu_s \perp \mu .$$

DIM. Impostiamo la dimostrazione.
Si può supporre che $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ e $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$.
Definiamo

$$\mathcal{E} = \left\{ A \subset \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} A \text{ di Borel} \\ \mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0 \end{array} \right\} .$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $B_k \in \mathcal{E}$ tale che

$$\nu(B_k) \leq \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A) + \frac{1}{k} .$$

L'insieme

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

è di Borel e inoltre

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathbb{R}^n \setminus B_k) = 0$$

e dunque $B \in \mathcal{E}$.

Ora definiamo le misure di Radon

$$\nu_{ac} = \nu \llcorner B$$
$$\nu_s = \nu \llcorner (\mathbb{R}^n \setminus B)$$

dove $\llcorner$ = restrizione.

Chiaramente: $\nu_s(B) = 0$ (e $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$),

e quindi $\nu_s \perp \mu$.

Proviamo che $\nu_{ac} \ll \mu$. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ (Borel) con $\mu(A) = 0$. Allora $B \setminus A \in \mathcal{E}$, infatti:

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus (B \setminus A)) = \mu(A \cup \mathbb{R}^n \setminus B) = 0,$$

Quindi:

$$\nu(B) = \min_{E \in \mathcal{E}} \nu(E) \implies \nu(B) \leq \nu(B \setminus A)$$

$$\nu(B) = \nu(B \setminus A) + \nu(B \cap A)$$

Conclusione: $\nu_{ac}(A) := \nu(B \cap A) = 0$. $\square$

DECOMPOSIZIONE DELLA MISURA $[Df]$

Sia $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo introdotto le notazioni:

$$\mu = \|Df\|, \qquad [Df] = \sigma\mu, \qquad \mu^i = \sigma^i \mu.$$

Per il teorema di decomposizione esistono delle misure μ^i_{ac} e μ^i_s (con segno) tali che

$$\mu^i = \mu^i_{ac} + \mu^i_s, \qquad \mu^i_{ac} \ll \mathcal{L}^n \text{ e } \mu^i_s \perp \mathcal{L}^n.$$

Per il Teorema di differenziazione delle misure di Radon esistono funzioni $g_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\mu^i_{ac} = g_i \mathcal{L}^n, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Introduciamo le seguenti ulteriori notazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := g^i \quad \text{funzioni } L^1_{loc}$$

$$Df := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad \text{gradiente } L^1_{loc}$$

$$[Df]_{ac} = Df\, \mathcal{L}^n \quad \text{misura vett. AC.}$$

$$[Df]_s = (\mu^1_s, \dots, \mu^n_s) \quad \text{misura vettoriale singolare}$$

ESERCIZIO Sia $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Provare che

$$f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n) \iff \mu^1_s = \dots = \mu^n_s = 0.$$

SEMICONTINUITÀ INFERIORE E APPROSSIMAZIONE

Una delle utilità della definizione variazionale (quella con il sup) di BV è che fornisce gratis la semicontinuità inferiore della V.Tot. in L^1_{loc}.

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f_k \in BV(A)$, $k \in \mathbb{N}$, una successione tale che $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ in $L^1_{loc}(A)$. Allora

$$\|Df\|(A) \leq \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(A).$$

DIM. Sia $\varphi \in C^1_c(A;\mathbb{R}^n)$ tale che $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Allora

$$\int_A f \operatorname{div}\varphi \, dx = \lim_{k\to\infty}(\inf) \int_A f_k \operatorname{div}\varphi \, dx$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(A).$$

Col sup si ottiene la tesi. $\square$

Se la successione approssimante è scelta in modo opportuno allora le variazioni totali convergono alla variazione totale.

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto ed $f \in BV(A)$. Allora esiste una successione $f_k \in BV(A) \cap C^\infty(A)$, $k \in \mathbb{N}$, tale che:

1) $f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f$ in $L^1(A)$

2) $\| Df_k \| (A) \longrightarrow \| Df \| (A)$.

DIM. Proviamo il teorema quando $A = \mathbb{R}^n$. Sia $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, un nucleo di mollificazione standard. Definiamo

$$f_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy .$$

Sappiamo che $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e che

$$f_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Per semicontinuità

$$\| Df \| (\mathbb{R}^n) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \| Df_k \| (\mathbb{R}^n).$$

Sia ora $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ con $\|\varphi\|_\infty \le 1$.
Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{div}\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}\,\varphi(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\,f(y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{div}\,\varphi(x)\,dx\right)dy$$

$\nabla = \nabla_x$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\langle \nabla\eta_\varepsilon(x-y), \varphi(x)\rangle\,dx\right)dy$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n \frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\,\varphi_i(x)\,dx\right)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\varepsilon(x-y)\,\varphi(x)\,dx\right)dy$$

$(\varphi(x) = \varphi(-x))$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\mathrm{div}\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy.$$

Inoltre $(\eta_\varepsilon \ge 0)$

$$|\varphi_\varepsilon(y)| \le \int_{\mathbb{R}^n}\eta_\varepsilon(y-x)\underbrace{|\varphi(x)|}_{\le 1}dx \le 1 \qquad \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

Segue che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\, \operatorname{div}\varphi(x)\, dx \leq \|Df\|(\mathbb{R}^n) \qquad \forall \varepsilon > 0$$

e col sup si ottiene $\|Df_\varepsilon\|(\mathbb{R}^n) \leq \|Df\|(\mathbb{R}^n)$,

che implica

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \|Df_\varepsilon\|(\mathbb{R}^n) \leq \|Df\|(\mathbb{R}^n).$$

□

<u>COMMENTO</u> Una regolarizzazione alternativa è tramite il nucleo del calore.

Quando $f \in C^1(A) \cap BV(A)$ si ha

$$\|Df\|(A) = \int_A |\nabla f(x)|\, dx .$$

Una definizione alternativa della variazione totale si ottiene per rilassamento:

$$\|Df\|(A) := \inf \left\{ \liminf_{k \to \infty} \int_A |\nabla f_k|\, dx \;:\; \begin{array}{l} f_k \in C^1(A) \\ f_k \xrightarrow[k\to\infty]{L^1_{loc}(A)} f \end{array} \right\}.$$

TEOREMA DI COMPATTEZZA

Daremo un'idea schematica della dimostrazione del seguente teorema di compattezza.

<u>TEOREMA</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz. Sia $f_k \in BV(A)$, $k \in \mathbb{N}$, una successione tale che

$$M := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{L^1(A)} + \|Df_k\|(A) < \infty.$$

Allora esistono $f \in BV(A)$ ed una sottosuccessione $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tali che

$$f_{k_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} f \quad \text{in } L^1(A).$$

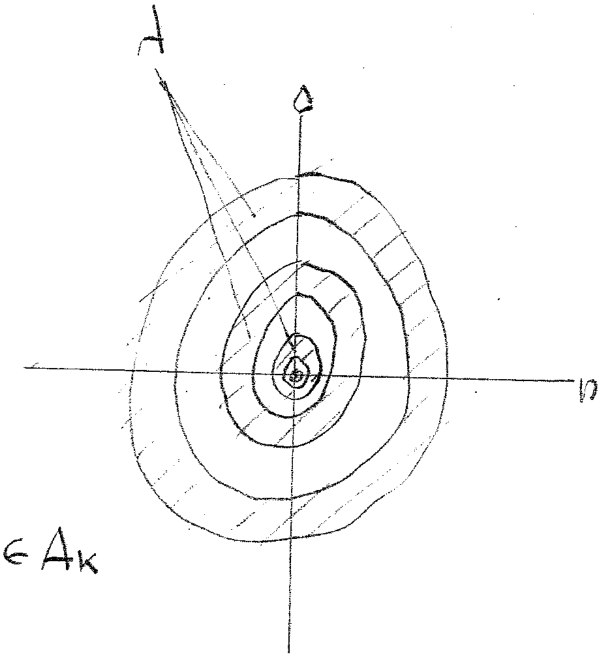
<u>COMMENTO</u> L'ipotesi ∂A Lipschitz può essere indebolita, ma qualche regolarità del bordo è necessaria. Per $k \geq 1$ sia

$$A_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2k+1} < |x| < \frac{1}{2k} \right\}$$

e consideriamo $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ aperto limitato.

si ha

$$C_K := \mathcal{L}^n(A_K) \xrightarrow[K\to\infty]{} 0 ,$$



Definiamo $f_K : A \to \mathbb{R}$

$$f_K(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_K} & x \in A_K \\ 0 & \text{Altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $\|f_K\|_{L^1(A)} = 1$ e $\|Df_K\|(A) = 0 \quad \forall K$.

Tuttavia $(f_K)_{K\in\mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni che convergono in $L^1(A)$.

DIM. Proviamo il teorema nel seguente caso semplificato: $A = \mathbb{R}^n$ ed esiste $R>0$ tale che $spt(f_K) \subset B(0,R) \quad \forall K \in \mathbb{N}$.

Sia $\mathcal{F} = \{f_K : K\in\mathbb{N}\}$. Affermiamo che $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Siccome $L^1(\mathbb{R}^n)$ è completo segue che $\overline{\mathcal{F}}$ è compatto in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Per $\varepsilon>0$ si consideri

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{ f_\varepsilon \mid f \in \mathcal{F} \}$$

dove $f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$, η_ε nucleo di regolarizzazione.

Per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha:

i) $\operatorname{spt}(f_\varepsilon) \subset B(0, R+\varepsilon)$;

ii) $|f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon^n} \|\eta\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy \leq \frac{1}{\varepsilon^n} \|\eta\|_\infty M$;

iii) $|Df_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \|D\eta\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy \leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \|D\eta\|_\infty M$.

Quindi $\mathcal{F}_\varepsilon$ è equicontinua ed equilimitata.
Per il Teorema di Ascoli - Arzelà $\mathcal{F}_\varepsilon$ è totalmente limitata per la norma $\|\cdot\|_\infty$ della convergenza uniforme. Quindi $\mathcal{F}_\varepsilon$ è totalmente limitata per la norma $\|\cdot\|_1$.

Ora proviamo che $\mathcal{F}_\varepsilon$ è "uniformemente vicina" ad $\mathcal{F}$ nella norma $\|\cdot\|_1$.

Sia $f \in \mathcal{F}$ e supponiamo preliminarmente che $f \in C^1$.

Allora si ha:

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy - f(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) \Big(f(x-\varepsilon z) - f(x) \Big)\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x - t\varepsilon z)\, dt\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) \int_0^1 \langle Df(x - t\varepsilon z), -\varepsilon z \rangle\, dt\, dz .$$

Segue che

$$\int_{\mathbb{R}^n} | f_\varepsilon(x) - f(x) |\, dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} | Df(x - t\varepsilon z) |\, |z|\, dx\, dt\, dz$$

$$\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|\, dx = \varepsilon\, \| Df \| (\mathbb{R}^n) .$$

Per approssimazione la stessa stima vale quando $f \in BV(\mathbb{R}^n)$.

La conclusione è che

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \| f_\varepsilon - f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \cdot M .$$

Ora proviamo che $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Fissiamo $\sigma > 0$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon M < \frac{\sigma}{3}$.

Siccome $\mathcal{F}_\varepsilon$ è totalmente limitato in $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$\exists\, f_1, \dots, f_N \in \mathcal{F}$ tali che $\mathcal{F}_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{L^1(\mathbb{R}^n)}(f_{i,\varepsilon}, \sigma/3)$.

Sia $f \in \mathcal{F}$. Allora $\quad (\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^n)})$

$$\|f - f_i\| \leq \underbrace{\|f - f_\varepsilon\|}_{< \sigma/3} + \underbrace{\|f_\varepsilon - f_{i,\varepsilon}\|}_{\substack{< \sigma/3 \\ \text{su scelta di } i}} + \underbrace{\|f_{i,\varepsilon} - f_i\|}_{< \sigma/3} < \sigma.$$

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $f \in BV(A)$ tale che $\|Df\|(A) = 0$. Provare che f è costante q.o.

<u>ESERCIZIO</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso limitato con frontiera Lipschitz. Provare che esiste una costante $0 \leq C < \infty$ tale che

$$\int_A |f(x) - f_A|\, dx \leq C\, \|Df\|(A)$$

per ogni $f \in BV(A)$.

Traces and Extensions

Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be open and let $f, g \in BV(A)$. The function

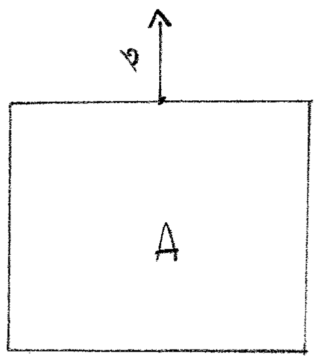
$$d(f,g) = \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \big| \|Df\|(A) - \|Dg\|(A) \big|$$

is a distance on $BV(A)$. The convergence in d is called "strict convergence".

Theorem 1. (Traces) Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set with Lipschitz boundary. There is a linear and continuous (in the strict convergence) mapping $T: BV(A) \longrightarrow L^1(\partial A; H^{n-1})$ such that

$$\int_A f \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int_A \varphi \cdot d[Df] + \int_{\partial A} (\varphi \cdot \nu) \, Tf \, dH^{n-1}$$

for all $f \in BV(A)$ and for all $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.
Here, ν is the exterior normal to ∂A, that is defined H^{n-1}-a.e. on ∂A.



Definition
The function $Tf: \partial A \longrightarrow [-\infty, \infty]$, $Tf \in L^1(\partial A; H^{n-1})$, is called the trace of $f \in BV(A)$ on ∂A.

<u>Theorem 2</u> $A \subset \mathbb{R}^n$ open bounded, ∂A Lipschitz. Let $f \in BV(A)$. Then for $\mathcal{H}^{n-1}$-a.e. $x \in \partial A$ we have

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(A \cap B_r(x))} \int_{A \cap B_r(x)} | f(y) - Tf(x) | \, dy = 0 .$$

In particular,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(A \cap B_r(x))} \int_{A \cap B_r(x)} f(y) \, dy = Tf(x) .$$

<u>Comment</u> If $f \in BV(A) \cap C(\overline{A})$ then we have

$$Tf(x) = f(x) \quad \text{for } \mathcal{H}^{n-1}\text{-a.e. } x \in \partial A .$$

<u>Theorem 3</u> $A \subset \mathbb{R}^n$ open bounded, ∂A Lipschitz. Let $f_1 \in BV(A)$, let $f_2 \in BV(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A})$. Define $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \in \mathbb{R}^n \setminus A . \end{cases}$$

Then $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and

$$\| Df \| (\mathbb{R}^n) = \| Df_1 \| (A) + \| Df_2 \| (\mathbb{R}^n \setminus A) + \int_{\partial A} | Tf_1 - Tf_2 | \, d\mathcal{H}^{n-1} .$$

For proofs see $\boxed{EG}$ pp. 176 - 184.

Fine Properties of BV functions

Definition Let $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be $\mathcal{L}^n$-measurable. Define for any $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mu(x) = \operatorname{ap}\limsup_{y \to x} f(y) = \inf\left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f > t\} \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = 0 \right\},$$

$$\lambda(x) = \operatorname{ap}\liminf_{y \to x} f(y) = \sup\left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f < t\} \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = 0 \right\}.$$

Theorem 1 Let $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be $\mathcal{L}^n$-measurable. Then

$$\lambda(x) = \mu(x) \in \mathbb{R} \quad \text{for } \mathcal{L}^n\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Moreover, λ and μ are Borel measurable.

Definition Define the "approximate discontinuity set" of a measurable function $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$J = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ \lambda(x) < \mu(x) \}.$$

("Jump set").

By Theorem 1 we have $\mathcal{L}^n(J) = 0$.

Theorem 2 Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Then we have

$$-\infty < \lambda(x) \leq \mu(x) < \infty \quad \text{for } \mathcal{H}^{n-1}\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^n$$

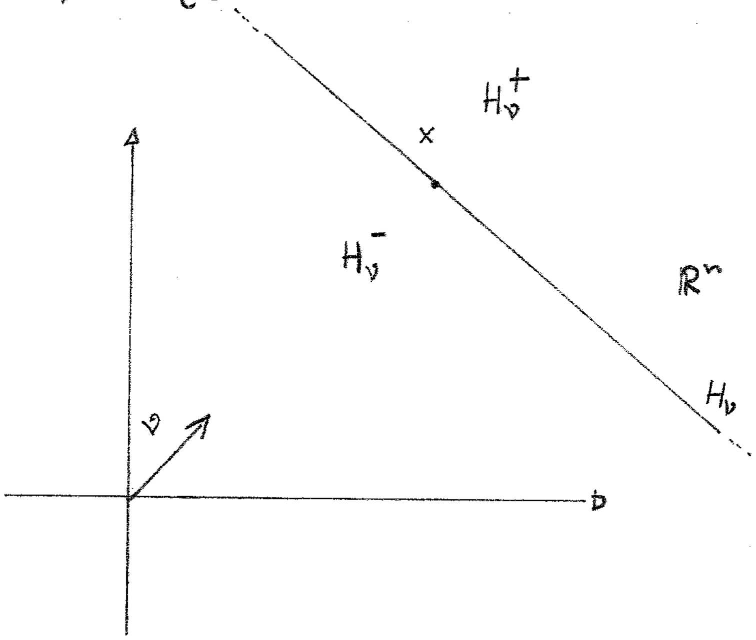
Comment: The function $F(x) = \dfrac{\lambda(x) + \mu(x)}{2}$ is finite $\mathcal{H}^{n-1}$-a.e. on $\mathbb{R}^n$, for a function $f \in BV(\mathbb{R}^n)$.

<u>Definition</u> For $x \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ with $|\nu| = 1$ let

$$H_\nu = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \; (y - x) \cdot \nu = 0 \},$$

$$H_\nu^+ = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \; (y - x) \cdot \nu \geq 0 \},$$

$$H_\nu^- = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \; (y - x) \cdot \nu \leq 0 \}.$$



<u>Theorem 3</u> Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and let $F(x) = \big(\lambda(x) + \mu(x)\big)/2$.

Then we have :

(1) $$\lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - F(x)| \, dy = 0 \quad \text{for } \mathcal{H}^{n-1}\text{- a.e. } x \in \mathbb{R}^n \setminus J \, ;$$

(2) For $\mathcal{H}^{n-1}$- a.e. $x \in J$ there exists $\nu = \nu(x) \in \mathbb{R}^n$, $|\nu| = 1$, such that

$$\lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x) \cap H_\nu^+} |f(y) - \mu(x)| \, dy = 0,$$

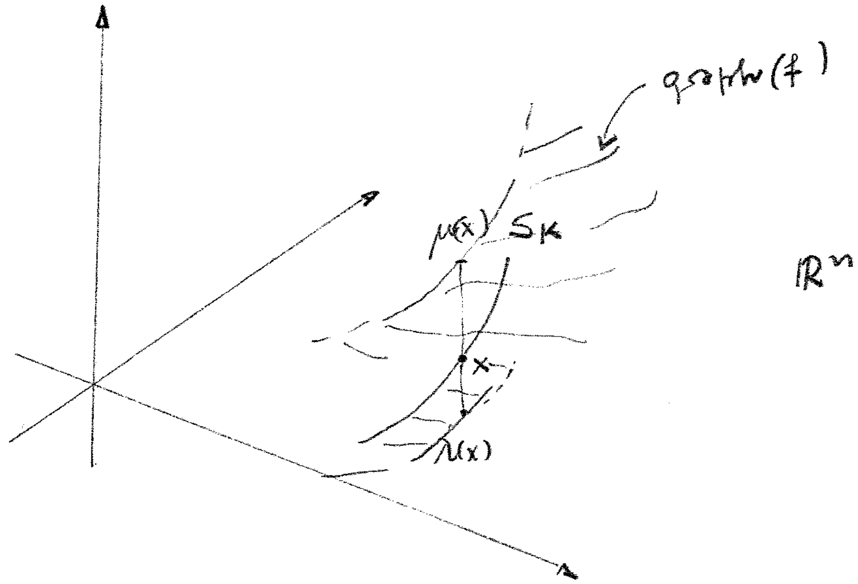
$$\lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x) \cap H_\nu^-} |f(y) - \lambda(x)| \, dy = 0 .$$

Theorem 4 Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and let J be the approximate discontinuity set of f. There exist countably many C^1-hypersurfaces $S_K \subset \mathbb{R}^n$, $K \in \mathbb{N}$, such that

$$\mathcal{H}^{n-1}\left(J \setminus \bigcup_{K=1}^{\infty} S_K\right) = 0 .$$

Comment: J is $\mathcal{H}^{n-1}$-rectifiable.

Picture:



Definition Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and let $\mu = \|Df\|$ be the total variation measure of f. We know that

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s \qquad \text{with } \mu_{ac} \ll \mathcal{L}^n \text{ and } \mu_s \perp \mathcal{L}^n .$$

We let

$$\mu_j = \mu_s \llcorner J \qquad \text{"Jump part of } \mu_s\text{"},$$

$$\mu_c = \mu_s \llcorner (\mathbb{R}^n / J) \qquad \text{"Cantor part of } \mu_s\text{"}.$$

<u>Theorem 5</u> Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and let $\mu = \|Df\|$ be the total variation measure. Then we have

$$\mu = \underbrace{|\nabla f|\, \mathcal{L}^n}_{\substack{\text{Absolutely}\\ \text{Continuous}\\ \text{Part}}} + \underbrace{|\lambda(x) - \mu(x)|\, H^{n-1} \llcorner J}_{\substack{\text{Jump}\\ \text{Part}}} + \underbrace{\mu_c}_{\substack{\text{Cantor}\\ \text{Part}}} .$$

Here we have $|\nabla f(x)| = \lim_{r \downarrow 0} \dfrac{\mu(B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))}$, the density of the absolutely continuous part. Moreover

$$\int_J |\lambda(x) - \mu(x)|\, dH^{n-1} < \infty .$$

<u>Definition</u> We say that $f \in SBV(\mathbb{R}^n)$, special function of bounded variation, if $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and $\mu_c = 0$.

FUNZIONALE DI MUMFORD-SHAH

Sia $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e fissiamo una funzione $g : \Omega \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ misurabile.

La funzione g è la "scala di grigio" o "immagine".

Introduciamo questo insieme

$$X = \{ (u, K) \, ; \; K \subset \overline{\Omega} \text{ compatto}, \; u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega \setminus K) \},$$

e consideriamo il funzionale di Mumford-Shah

$F : X \to [0, \infty)$

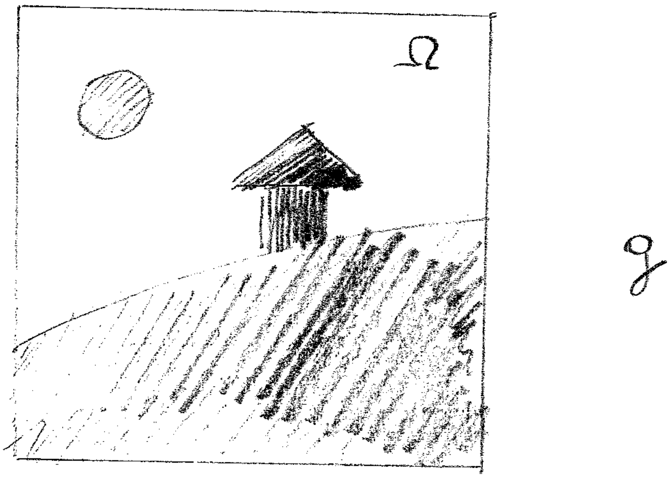
$$F(u,K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx + H^1(K)$$

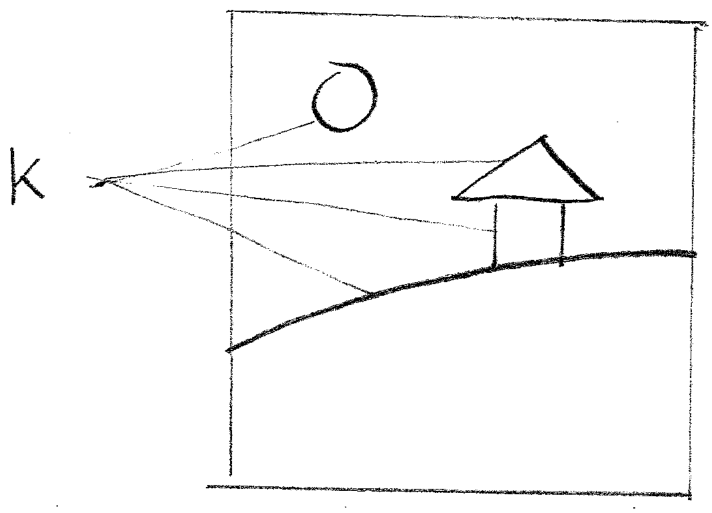
"Energia di sfumatura" — distanza L^2 dall'immagine — Lunghezza totale dei contorni

Consideriamo il problema di minimo

$$\min \{ F(u,K) \; : \; (u,K) \in X \}.$$

Nell'immagine $g \in L^\infty(\Omega)$ vogliamo selezionare un insieme di "contorni" K dove "g è discontinua" e approssimare g su $\Omega \setminus K$ in modo regolare (con "energia" piccola)





Se $(u,K) \in X$ è un minimo allora u risolve in senso debole

$$\Delta u = u - g \qquad \text{in } \Omega \setminus K$$

Per troncamento si può supporre che $\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty \leq 1$

Dalla teoria della regolarità per le Equazioni Differenziali si deduce che $u \in C^1(\Omega \setminus K)$.

In modo formale si avrebbe anche la condizione necessaria

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \text{ e su } K$$

con ν "normale".

<u>CONGETTURA</u> Se (u, K) è un minimo per F allora K è un unione localmente finita di curve $C^{1,1}$.

Questa è la congettura di Mumford - Shah.

L'esistenza di minimi si può dimostrare usando la teoria delle funzioni $SBV(\Omega)$.

Definiamo $G : SBV(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$

$$G(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u - g|^2 dx + \mathcal{H}^1(S_u)$$

dove $S_u \subset \Omega$ è l'insieme di salto di u
e $|\nabla u| \mathcal{L}^n$ è la parte assolutamente continua
della derivata $\mu = [Du]$.

L'esistenza di minimi si basa sul seguente
teorema di compattezza.

<u>TEOREMA</u> Sia $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di
funzioni in $SBV(\Omega)$ tali che:

i) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$

ii) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx + H^1(S_{u_k}) < \infty$

Allora esiste una sottosuccessione $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ed
esiste una funzione $u \in SBV(\Omega)$ tali che:

1) $u_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} u$ in $L^1(\Omega)$

2) $[Du_{k_j}] \longrightarrow [Du]$ nel senso debole* delle misure;

ed inoltre

A) $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{k_j}|^2 dx$,

B) $H^1(S_u) \leq \liminf_{j\to\infty} H^1(S_{u_{k_j}})$.

Dal teorema di compattezza/semicontinuità si ottiene l'esistenza di un minimo u.

L'insieme S_u non è chiuso. Ma $K := \overline{S_u}$ è chiuso e inoltre $\mathcal{H}^1(\overline{S_u} \setminus S_u) = 0$. (difficile!)

Sappiamo che $\overline{S_u}$ è rettificabile. Non sappiamo ancora che $K = \overline{S_u}$ è unione localmente finita di curve $C^{1,1}$.

Su $\Omega \setminus K$ la funzione u è di classe C^1.

Dunque la coppia $(u_{|\Omega\setminus K}, K)$ fornisce un minimo per il funzionale originale F.

$\square$

Sets of finite perimeter in $\mathbb{R}^n$

<u>Definition</u> We say that a $\mathcal{L}^n$-measurable set $E \subset \mathbb{R}^n$ has locally finite perimeter (is a Caccioppoli set) if $\chi_E \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$\|\partial E\|(A) := \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}\varphi \, dx : \varphi \in C_c^1(A; \mathbb{R}^n), \ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} < \infty$$

for any open set $A \subset\subset \mathbb{R}^n$.

We say that E has finite perimeter if $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n) < \infty$.

<u>Notation</u> • We let $P(E; A) = \|\partial E\|(A)$ and $P(E) = P(E; \mathbb{R}^n)$.

• Let μ and $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $|\sigma| = 1$, be the measure and vector given by Riesz Theorem. We have

$$\int_E \operatorname{div}\varphi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \sigma \, d\mu \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Here $E \subset \mathbb{R}^n$ has finite perimeter in $\mathbb{R}^n$.

We call

$\|\partial E\| = \mu$ the perimeter measure of E

$\nu_E = -\sigma$ the exterior (measure theoretic) unit normal to ∂E.

<u>Examples</u>

(1) $E \subset \mathbb{R}^n$ bounded open set with smooth (C^∞, C^1, Lipschitz) boundary. Then, by the divergence theorem

$$\int_E \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{outer} \\ \text{normal}}}{\nu} \, dH^{n-1}$$

It follows that

$$\sup_{\|\varphi\|_\infty \leq 1} \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E) < \infty .$$

Then E has finite perimeter in $\mathbb{R}^n$ and $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$.

(2) Let $\mathbb{Q}^n = \{ q_i \in \mathbb{Q}^n : i \in \mathbb{N} \}$ be an enumeration of $\mathbb{Q}^n$.
Fix radii $r_i > 0$ to be chosen and let

$$E_K = \bigcup_{i=1}^{K} \underbrace{B_{r_i}(q_i)}_{\text{open ball}} \quad \text{open set in } \mathbb{R}^n$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(q_i) \quad \text{open set in } \mathbb{R}^n.$$

Then

$$\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{r_i}(q_i))$$

$$\leq \alpha(n) \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n$$

Fix $r_i > 0$ such that $\alpha(n) \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

We can apply the divergence theorem to each E_K

$$\int_{E_K} \operatorname{div} \varphi \, dx \underset{\|\varphi\|_\infty < 1}{=} \int_{\partial E_K} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_K) \leq$$

ν exterior normal to ∂A_K

$$\leq \sum_{i=1}^{K} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{r_i}(q_i)) = n\alpha(n) \sum_{i=1}^{K} r_i^{n-1}$$

It follows that

$$\|\partial E_K\|(\mathbb{R}^n) \leq n\alpha(n) \sum_{i=1}^{K} r_i^{n-1}$$

$$\leq n\alpha(n) \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-1}$$

We fix $r_i > 0$ such that $n\alpha(n) \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-1} < \varepsilon$.

Because

$$\chi_{E_K} \xrightarrow[K\to\infty]{} \chi_E \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n),$$

by lower semicontinuity:

$$\|\partial E\|(\mathbb{R}^n) \leq \liminf_{k\to\infty} \|\partial E_k\|(\mathbb{R}^n) \leq \varepsilon.$$

<u>Conclusion:</u>

For any $\varepsilon > 0$ there is an open set $E \subset \mathbb{R}^n$ such that

- $\mathcal{L}^n(E) \leq \varepsilon$
- $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n) \leq \varepsilon$
- $\overline{E} = \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{L}^n(\partial E) = \mathcal{L}^n(\overline{E} \setminus \mathring{E}) = \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) = \infty.$

Remarks

(1) E and $\mathbb{R}^n \setminus E$ have the same perimeter.
In fact, for any $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \varphi(x)\, dx = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \operatorname{div} \varphi\, dx = -\int_E \operatorname{div} \varphi\, dx$$

(2) The measure $\|\partial E\|$ is concentrated on the topological boundary ∂E. Proof:

$$\|\partial E\| (\operatorname{int}(E)) = \sup \left\{ \int_{\operatorname{int}(E)} \operatorname{div} \varphi\, dx \ : \ \begin{array}{l} \varphi \in C^1_c(\operatorname{int}(E); \mathbb{R}^n) \\ \|\varphi\|_\infty \le 1 \end{array} \right\} = 0$$

and

$\|\partial E\| (\operatorname{ext}(E)) = 0$, similar.

Example 1 Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set with Lipschitz boundary. Fix $m \in \mathbb{R}$ such that $0 < m < \mathcal{L}^n(A)$.
Introduce the family of sets

$$\mathcal{A} = \{ E \subset A;\ E\ \mathcal{L}^n\text{-measurable},\ \mathcal{L}^n(E) = m \}.$$

Let $P : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ be the functional

$$P(E) = \|\partial E\| (A).$$

Fix on $\mathcal{A}$ the topology induced by the metric

$$\begin{aligned} d(E,F) = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E - \chi_F|\, dx &= \mathcal{L}^n(E \setminus F) + \mathcal{L}^n(F \setminus E) \\ &= \mathcal{L}^n(E \setminus F \cup F \setminus E) \\ &= \mathcal{L}^n(E \Delta F). \end{aligned}$$

This is the L^1-topology of characteristic functions.

We claim that the minimum problem

$$\min \{ P(E) : E \in \mathcal{A} \}$$

has a solution. Notice that $\mathcal{A} \neq \emptyset$ and there is $E \in \mathcal{A}$ with $P(E) < \infty$.

Consider a minimizing sequence $E_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k \to \infty} P(E_k) = \inf \{ P(E) : E \in \mathcal{A} \} < \infty .$$

We have

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n(E_k) + \|\partial E_k\|(A) < \infty .$$

Then the sequence of $BV(A)$-functions $f_k = \chi_{E_k}$ has a subsequence f_{k_j}, $j \in \mathbb{N}$, converging in $L^1(A)$ to a function $f \in BV(A)$:

$$f_{k_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} f \quad \text{in } L^1(A).$$

Up to a further sub-sequence we also have

$$\lim_{j \to \infty} f_{k_j}(x) = f(x) \quad \text{for } \mathcal{L}^n\text{-a.e. } x \in A.$$

Because $f_{k_j}(x) \in \{0,1\}$, we conclude that $f(x) \in \{0,1\}$ for $\mathcal{L}^n$-a.e. $x \in A$. This means that

$$f = \chi_F \quad \text{for some } F \subset A, \ \mathcal{L}^n\text{-measurable}.$$

Moreover we have

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}^n(E_{k_j}) = m \quad \forall j \in \mathbb{N} \\ \chi_{E_{k_j}} \xrightarrow[j \to \infty]{} \chi_F \quad \text{in } L^1(A) \end{array} \right\} \Longrightarrow \mathcal{L}^n(F) = m.$$

and we conclude that $F \in \mathcal{A}$.

The functional $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ is lower semicontinuous for the $L^1(A)$-convergence:

$$P(F) = \|\partial F\|(A) \leq \liminf_{j\to\infty} \|\partial E_{K_j}\|(A) =$$

$F \in \mathcal{A}$

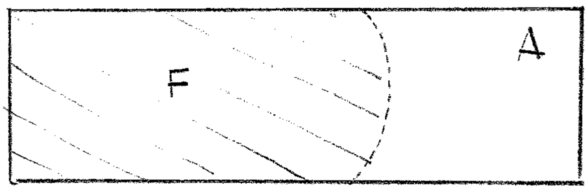
$$= \liminf_{j\to\infty} P(E_{K_j})$$

$$= \inf\{P(E) ; E \in \mathcal{A}\}.$$

We conclude that $P(F) = \min\{P(E) ; E \in \mathcal{A}\}$.

Remarks. The solution is not unique, in general.

- When $n = 2$, the boundary $\partial F \cap A$ of a solution F is made of pieces of arcs with the same curvature.



- When $n \geq 3$, the boundary $\partial F \cap A$ of a solution F is made of hypersurfaces with constant mean curvature.

An open problem. It is conjectured that when $A \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded convex set then any solution of the problem

$$\min\{\|\partial E\|(A) ; E \subset A \ \mathcal{L}^n\text{-meas}, \ \mathcal{L}^n(E) = m\},$$

with $0 < m < \mathcal{L}^n(A)$, is convex. This conjecture is still unsolved.

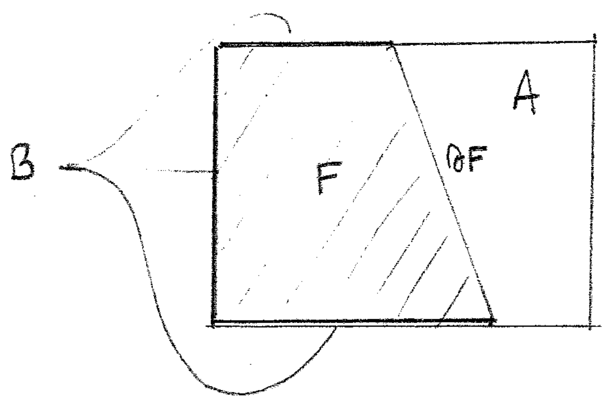
<u>Example 2</u> (Weak version of the Plateau problem)
Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set with Lipschitz boundary. Fix a Borel set $B \subset \partial A$. Let

$$\mathcal{A} = \{ E \subset A \,;\, E\ \mathcal{L}^n\text{-measurable},\ T(\chi_E) = \chi_B \}$$

where $T : BV(A) \longrightarrow \mathcal{L}^1(\partial A; \mathcal{H}^{n-1})$ is the trace operator.

Assume: there is $E \in \mathcal{A}$ with $\|\partial E\|(A) < \infty$.
Prove: there is $F \in \mathcal{A}$ such that

$$\|\partial F\|(A) = \min \{ \|\partial E\|(A) \,;\, E \in \mathcal{A} \}.$$



<u>Comment</u> The surface $\partial F \cap A$ is a "minimal surface".

Reduced Boundary

Definition (Reduced Boundary) Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a set with locally finite perimeter. The reduced boundary of E is the set $\partial^* E \subset \mathbb{R}^n$ of all points $x \in \mathbb{R}^n$ such that:

(1) $\|\partial E\|(B_r(x)) > 0$ for all $r > 0$;

(2) $$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\|\partial E\|(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \nu_E(y) \, d\|\partial E\| = \nu_E(x),$$ where

ν_E is the measure theoretic outward normal of E;

(3) $|\nu_E(x)| = 1$.

Remarks

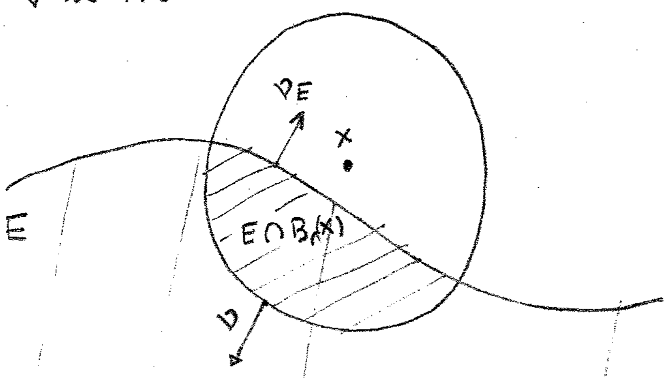
(1) We always have $\partial^* E \subset \partial E$;

(2) $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$ because $|\nu_E| = 1$ $\|\partial E\|$-a.e. and the limit (2) holds $\|\partial E\|$-a.e. by the differentiation theorem.

Lemma 1 $E \subset \mathbb{R}^n$ loc. finite perimeter, $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Then for $\mathcal{L}^1$-a.e. $r > 0$ we have

$$\int_{E \cap B_r(x)} \operatorname{div} \varphi(y) \, dy = \int_{\underset{\text{closed ball}}{B_r(x)}} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| + \int_{E \cap \partial B_r(x)} \varphi \cdot \nu \, dH^{n-1}$$

where ν is the outward normal to $\partial B_r(x)$



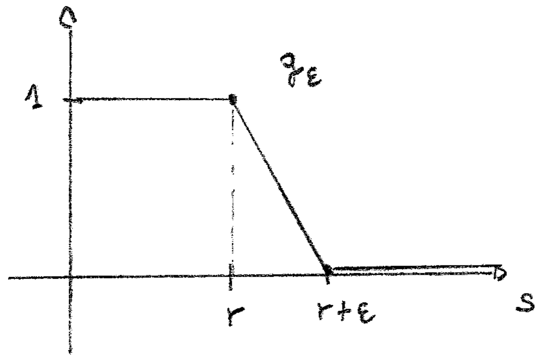
Proof. Let $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$= \int_E \operatorname{div}(h\varphi)\,dy = \int_E Dh\cdot\varphi\,dy + \int_E h\operatorname{div}\varphi\,dy$$

Structure Theorem

$$= \int_{\mathbb{R}^n} h\,\varphi\cdot\nu_E\,d\|\partial E\|.$$

Fix $\varepsilon > 0$, and define $g_\varepsilon : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$



$$g_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1 & 0 \le s \le r \\ 0 & s \ge r+\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}(r+\varepsilon-s) & r \le s \le r+\varepsilon \end{cases} \qquad \text{Lipschitz}$$

The previous formula holds for $h_\varepsilon(y) = g_\varepsilon(|y-x|)$; h_ε is Lipschitz, the formula is obtained by approximation.

We have

$$Dh_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } |y-x|<r \text{ or } |y-x|>r+\varepsilon; \\ -\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{y-x}{|y-x|}, & \text{if } r<|y-x|<r+\varepsilon. \end{cases}$$

We obtain

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\varepsilon \, \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| = -\int_{\{r<|y-x|<r+\varepsilon\}\cap E} \frac{1}{\varepsilon} \frac{y-x}{|y-x|} \cdot \varphi \, dy + \int_E h_\varepsilon \operatorname{div} \varphi \, dy .$$

Now let $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\int_{B_r(x)} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| = -\int_{E\cap \partial B_r(x)} \frac{y-x}{|y-x|} \cdot \varphi \, dy + \int_{E\cap B_r(x)} \operatorname{div} \varphi \, dy .$$

closed ball

$\square$

We used the following Lemma:

<u>Lemma 2</u> Let $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Then the function

$$r \longmapsto \varphi(r) = \int_{\partial B_r(0)} g(x) \, dH^{n-1}, \quad r \geq 0, \quad \text{is locally integrable.}$$

Moreover, for any $r>0$

$$\psi(r) = \int_{B_r(0)} g(x) \, dx = \int_0^r \int_{\partial B_s(0)} g(x) \, dH^{n-1}(x) \, ds .$$

In particular, ψ is absolutely continuous and moreover

$$\frac{d}{dr} \int_{B_r(0)} g(x) \, dx = \int_{\partial B_r(0)} g(x) \, dH^{n-1}(x)$$

for $\mathcal{L}^1$-a.e. $r>0$.

The proof is postponed.

Lemma 3 There exist dimensional constants $C_1, C_2 > 0$ with the following property. Let $E \subset \mathbb{R}^n$ have locally finite perimeter and let $x \in \partial^* E$. Then:

$$(1) \quad \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}{r^n} \geq C_1 > 0 ;$$

$$(2) \quad \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x) \setminus E)}{r^n} \geq C_2 > 0 .$$

Proof. By Lemma 1, for $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \leq 1$, we have

$$\int_{E \cap B_r(x)} \operatorname{div} \varphi \, dy = \int_{B_r(x)} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| + \int_{E \cap \partial B_r(x)} \varphi \cdot \nu \, dH^{n-1},$$

$$\int_{E \cap B_r(x)} \operatorname{div} \varphi \, dy \leq \|\partial E\|(B_r(x)) + H^{n-1}(\partial B_r(x) \cap E) .$$

Taking the sup in φ:

$$\|\partial(E \cap B_r(x))\|(\mathbb{R}^n) \leq \|\partial E\|(B_r(x)) + H^{n-1}(\partial B_r(x) \cap E).$$

Now choose $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ such that $\varphi = \underset{\text{constant}}{\nu_E(x)}$ on $B_r(x)$:

$$0 = \nu_E(x) \cdot \int_{B_r(x)} \nu_E(y) \, d\|\partial E\| + \nu_E(x) \cdot \int_{E \cap \partial B_r(x)} \nu \, dH^{n-1}$$

We deduce that

$$1 = |\nu_E(x)|^2 = \lim_{r \downarrow 0} \nu_E(x) \cdot \fint_{B_r(x)} \nu_E(y) \, d\|\partial E\|$$

Because $x \in \partial^* E$

$$= - \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\|\partial E\|(B_r(x))} \nu_E(x) \cdot \int_{E \cap \partial B_r(x)} \nu \, dH^{n-1}$$

denominator > 0 because $x \in \partial^* E$

Then there is $r_0 = r_0(x) > 0$ such that for $0 < r < r_0$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\|\partial E\|(B_r(x))} \left| \nu_E(x) \cdot \int_{E \cap \partial B_r(x)} \nu \, dH^{n-1} \right| \leq$$

$$\leq \frac{H^{n-1}(E \cap \partial B_r(x))}{\|\partial E\|(B_r(x))} .$$

We conclude that

$$\| \partial(E \cap B_r(x)) \| (\mathbb{R}^n) \leq 3 \, H^{n-1}(E \cap \partial B_r(x))$$

This holds for $\mathcal{L}^1$-a.e. $0 < r < r_0$. (The a.e. comes from Lemma 1).

Now let $g(r) = \mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))$. By Lemma 2:

$$g(r) = \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x) \cap E} dH^{n-1} \right) ds = \int_0^r H^{n-1}(\partial B_s(x) \cap E) \, ds$$

and moreover, for $\mathcal{L}^1$-a.e. $r > 0$:

$$g'(r) = H^{n-1}(\partial B_r(x) \cap E) .$$

Now we use the isoperimetric inequality to obtain:

$$g(r)^{\frac{n-1}{n}} = \mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))^{\frac{n-1}{n}} \overset{\text{Isop. Inequality}}{\leq} C \, \| \partial(E \cap B_r(x)) \| (\mathbb{R}^n)$$

$$\leq 3C \, H^{n-1}(E \cap \partial B_r(x)) = 3C \, g'(r)$$

for a.e. $r > 0$.

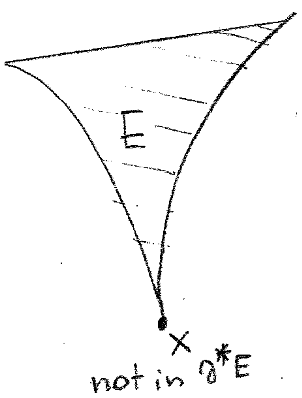
This is
$$\frac{1}{3C} \leq \varrho(r)^{\frac{1-n}{n}} \varrho'(r) = n \left(\varrho(r)^{\frac{1}{n}}\right)' .$$

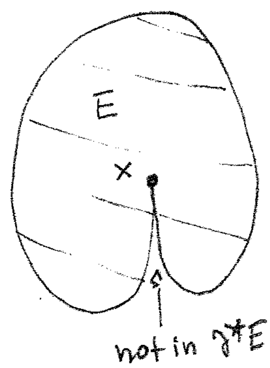
We integrate
$$\varrho(r)^{\frac{1}{n}} = \int_0^r \left(\varrho(s)^{\frac{1}{n}}\right)' ds \geq \frac{r}{3nC} ,$$

and this leads to
$$\mathcal{L}^n (E \cap B_r(x)) \geq \frac{r^n}{(3nC)^n} \qquad \text{for } 0 < r < r_0 .$$

The claim (1) follows. Claim (2) follows from
$$\|\partial E\| = \|\partial(\mathbb{R}^n \setminus E)\|$$
$$\nu_E = - \nu_{\mathbb{R}^n \setminus E}$$
□

<u>Remarks</u> :





<u>Lemma 4</u> There exist dimensional constants $C_1, C_2, C_3 > 0$ with the following property. Let $E \subset \mathbb{R}^n$ have locally finite perimeter and let $x \in \partial^* E$. Then:

$$(1) \quad \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\|\partial E\|(B_r(x))}{r^{n-1}} \geq C_1 > 0;$$

$$(2) \quad \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\|\partial E\|(B_r(x))}{r^{n-1}} \leq C_2 < \infty;$$

$$(3) \quad \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\|\partial(E \cap B_r(x))\|(\mathbb{R}^n)}{r^{n-1}} \leq C_3 < \infty.$$

Proof.

(1) This follows from the relative isoperimetric inequality

$$\|\partial E\|(B_r(x)) \geq \underset{\substack{\text{independent}\\ \text{of } r>0 \text{ and}\\ \text{of } x \in \mathbb{R}^n}}{C} \min\Big\{ \underbrace{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}_{\substack{\vee\!/ \\ C_1 r^n}}, \underbrace{\mathcal{L}^n(B_r(x) \setminus E)}_{\substack{\vee\!/ \\ C_2 r^n}} \Big\}^{\frac{n-1}{n}}.$$

Lemma 3

(2) In the proof of Lemma 3 we had:

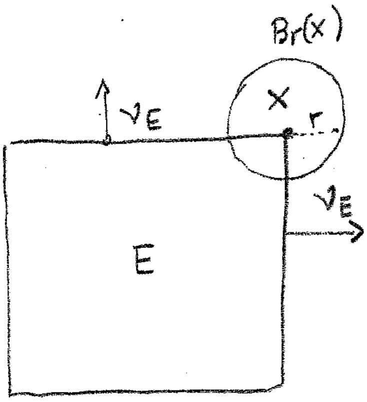
$$\|\partial E\|(B_r(x)) \leq 3\, H^{n-1}(\partial B_r(x) \cap E) \leq 3\, n\, \alpha(n)\, r^{n-1}.$$

(3) In the proof of Lemma 3 we had:

$$\|\partial(E \cap B_r(x))\|(\mathbb{R}^n) \leq \|\partial E\|(B_r(x)) + H^{n-1}(E \cap \partial B_r(x))$$

and the claim follows. $\square$

Remark The corner in the following picture is not in the reduced boundary



$$\fint_{B_r(x)} \nu_E \, d\|\partial E\| = \frac{1}{2r}\left\{(1,0)\cdot r + (0,1)\cdot r\right\} = \frac{(1,1)}{2}, \quad \forall r>0.$$

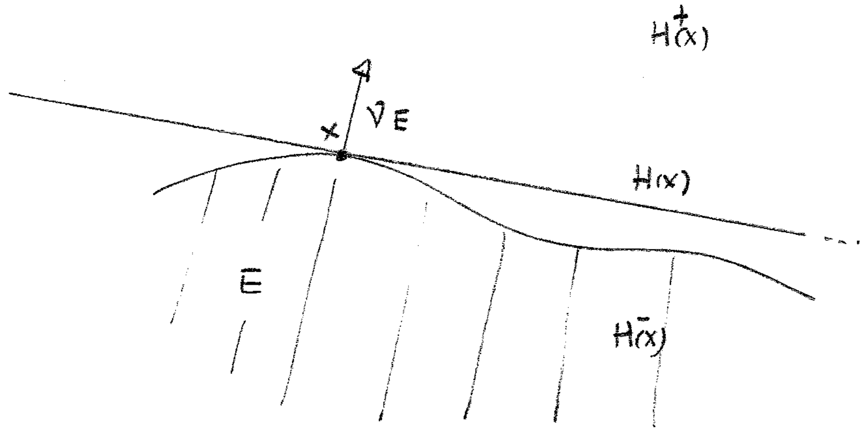
But $\left|\frac{1}{2}(1,1)\right| \neq 1.$

Blow-up of the reduced boundary

$E \subset \mathbb{R}^n$ has locally finite perimeter and $x \in \partial^* E$.

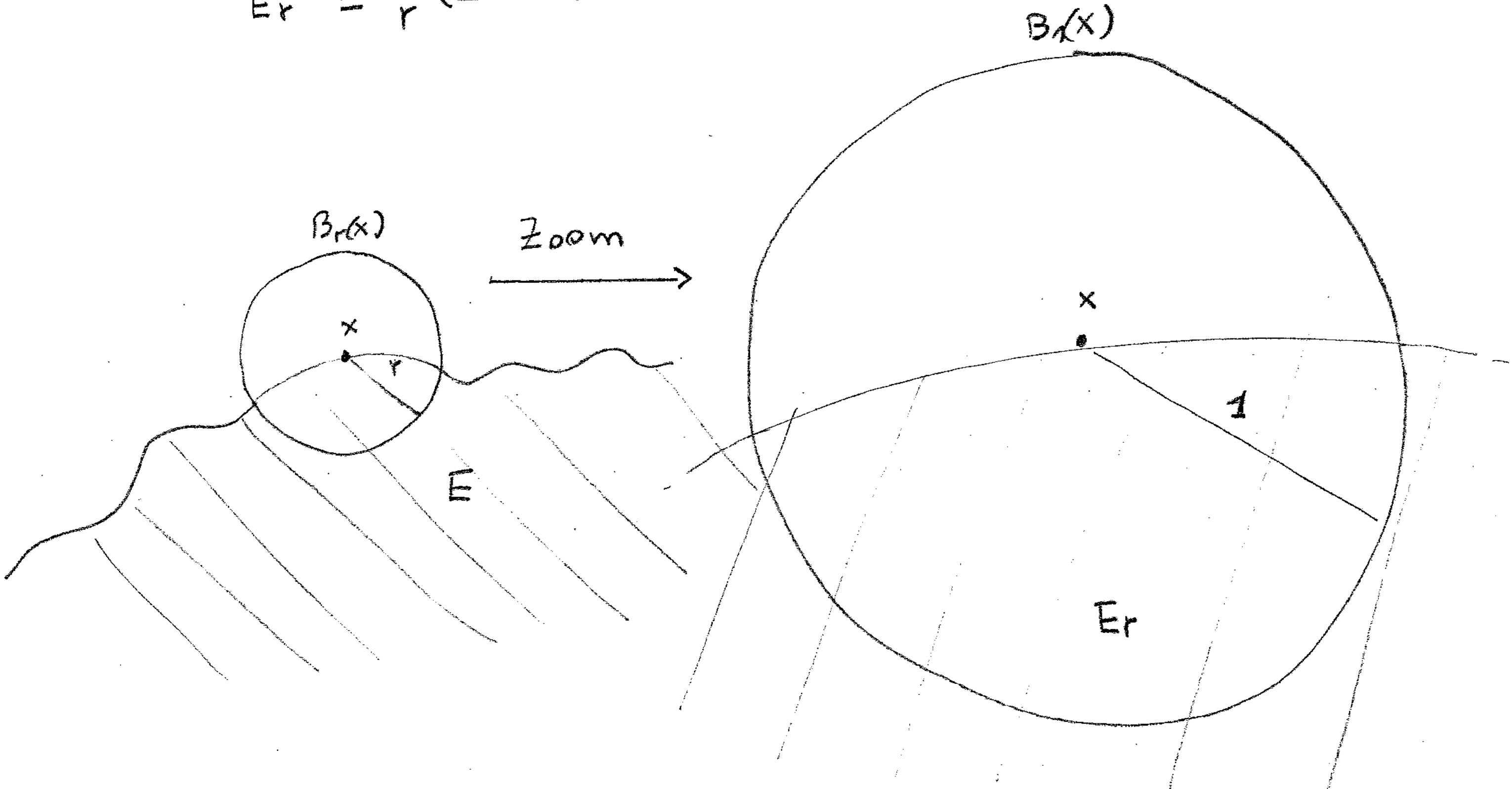
Definition We let:

$$H(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n ; (y-x) \cdot \nu_E(x) = 0 \},$$
$$H^+(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n ; (y-x) \cdot \nu_E(x) \geq 0 \},$$
$$H^-(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n ; (y-x) \cdot \nu_E(x) \leq 0 \}.$$



Notation. For any $r > 0$ we let

$$E_r = \frac{1}{r}(E - x) + x = \{ y \in \mathbb{R}^n ; r(y-x) + x \in E \}.$$



Theorem (Blow-up of $\partial^* E$) $E \subset \mathbb{R}^n$ of locally finite perimeter, $x \in \partial^* E$.

Then
$$\chi_{E_r} \xrightarrow[r \downarrow 0]{} \chi_{H^-(x)} \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Proof. Without loss of generality: $x = 0$ and $\nu_E(0) = e_n = (0, \dots, 0, 1)$;

$H(0) = \{ y \in \mathbb{R}^n ; y_n = 0 \}$

$H^+(0) = \{ y_n \geq 0 \}$

$H^-(0) = \{ y_n \leq 0 \}$

Claim: For any sequence $r_k \downarrow 0$ there is a subsequence $r_{k_j} \downarrow 0$ such that
$$\chi_{E_{r_{k_j}}} \xrightarrow[j \to \infty]{} \chi_{H^-(0)} \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Fix $L > 0$ and let $\overline{D_r}^{*} = \overline{E_r}^{*} \cap \overline{B_L(0)} = \frac{1}{r} E \cap B_L$.
open ball

Then we have:
$$\mathcal{L}^n(D_r) \leq \mathcal{L}^n(B_L(0)) < \infty \quad \text{indep. of } r > 0$$

Moreover, by scale-invariance we have
$$\|\partial D_r\|(\mathbb{R}^n) = \|\partial(\tfrac{1}{r} E \cap B_L)\|(\mathbb{R}^n) = \frac{1}{r^{n-1}} \|\partial(E \cap B_{Lr})\|(\mathbb{R}^n)$$
$$\leq C < \infty \quad \text{indep. of } r > 0,$$

by Lemma 4 part (3).

By the compactness theorem, for any sequence $r_k \downarrow 0$ there is a sub-sequence $s_j = r_{k_j}$ such that
$$\chi_{E_{s_j}} \xrightarrow[j \to \infty]{} f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

We can also assume that $\chi_{E_{s_j}}(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} f(x)$ for $\mathcal{L}^n$-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

We deduce that $f = \chi_F$ for some $F \subset \mathbb{R}^n$ with loc. finite perimeter. Then

$$\int_F \operatorname{div}\varphi \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_F \, d\|\partial F\| \quad , \quad \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n).$$

<u>Notation</u>: $E_{s_j} = E_j$ and $\nu_{E_{s_j}} = \nu_j$

Claim: $\nu_F = e_n = (0,\dots,0,1)$ $\|\partial F\|$-a.e. on $\mathbb{R}^n$.

Because $\chi_{E_j} \longrightarrow \chi_F$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_{E_j} \operatorname{div}\varphi \, dy & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\cdot\nu_j \, d\|\partial E_j\| & & \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \\
\downarrow & \Longrightarrow & \downarrow & & \Downarrow \\
\displaystyle\int_F \operatorname{div}\varphi \, dy & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\cdot\nu_F \, d\|\partial F\| & & \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

That is: $\nu_j \|\partial E_j\| \longrightarrow \nu_F \|\partial F\|$ weakly in the sense of Radon measures.

We know that $\|\partial F\|(\partial B_L(0)) = 0$ for all $L>0$ but a countable set. We fix such an $L>0$.

By the characterization of the weak convergence:

$$\int_{B_L(0)} \nu_j \, d\|\partial E_j\| \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_{B_L(0)} \nu_F \, d\|\partial F\|$$

Now we use the following relations;

- $$\|\partial E_j\|(B_L(0)) = \|\partial(\tfrac{1}{s_j}E)\|(B_L(0)) = \frac{1}{s_j^{n-1}}\|\partial E\|(B_{s_jL}(0))$$

- $$\int_{B_L(0)} \nu_j \, d\|\partial E_j\| = \frac{1}{s_j^{n-1}} \int_{B_{s_jL}(0)} \nu_E \, d\|\partial E\|$$

The proof is left as an exercise, Whence we find

$$\lim_{j\to\infty} \fint_{B_L(0)} \nu_j \, d\|\partial E_j\| = \lim_{j\to\infty} \frac{\int_{B_{s_jL}(0)} \nu_E \, d\|\partial E\|}{\|\partial E\|(B_{s_jL}(0))} \overset{0\in\partial^* E}{=} \nu_E(0) = e_n = (0,\dots,0,1)$$

and thus

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\int_{B_L(0)} e_n\cdot\nu_j \, d\|\partial E_j\|}{\|\partial E_j\|(B_L(0))} = 1.$$

By lower semicontinuity, as $\chi_{E_j} \to \chi_F$ in L^1_{loc}

$$\|\partial F\|(B_L(0)) \le \liminf_{j\to\infty} \|\partial E_j\|(B_L(0)) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{B_L(0)} e_n\cdot\nu_j \, d\|\partial E_j\| = \int_{B_L(0)} e_n\cdot e_F \, d\|\partial F\|$$

Conclusion:

$$\|\partial F\|(B_L(0)) \leq \int_{B_L(0)} e_n \cdot \nu_F \, d\|\partial F\| \leq$$

$$\leq \|\partial F\|(B_L(0))$$

$$\Downarrow$$

$$e_n \cdot \nu_F = 1 \quad \|\partial F\|\text{-a.e.}$$

$$\Downarrow$$

$$\nu_F = e_n \quad \|\partial F\|\text{-a.e.}$$

As a byproduct:

$$\|\partial F\|(B_L(0)) = \lim_{j \to \infty} \|\partial E_j'\|(B_L(0)).$$

Claim: F is a half space and in fact $F = H^-(0)$.

For $\varepsilon > 0$ let $f_\varepsilon = \chi_F * \eta_\varepsilon$ where η_ε is a standard convolution kernel. From

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon \operatorname{div} \varphi \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \underset{\overset{\|}{f}}{\chi_F} \operatorname{div} \varphi_\varepsilon \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \nu_F \cdot \varphi_\varepsilon \, dy, \quad \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n),$$

We deduce that

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dy = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

and

$$(**) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi\, dy \qquad \forall \psi \in C^1_c(\mathbb{R}^n).$$

Now

$$(*) \implies \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n-1;$$

$$(**) \implies \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_n} \leq 0 \qquad \text{on } \mathbb{R}^n.$$

From the convergence

$$f_\varepsilon(y) \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} \chi_F(y) \qquad \text{for } \mathcal{L}^n\text{-a.e. } y \in \mathbb{R}^n$$

we conclude that

$$F = \{ y \in \mathbb{R}^n \ ; \ y_n \leq \gamma \}$$

for some $\gamma \in \mathbb{R}$.

Finally,

$$\|\partial F\|(B_L(0)) = \lim_{j\to\infty} \|\partial E_j\|(B_L(0))$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{\|\partial E\|(B_{s_j L}(0))}{s_j^{n-1}} \geq C > 0,$$

for "a.e." $L > 0$, implies $\gamma = 0 \implies F = \{ y_n \leq 0 \} = H^-$.

$\square$

<u>Exercise</u> $E \subset \mathbb{R}^n$ has loc. finite perimeter, and $x \in \partial^* E$.

Prove that:

(1) $$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x) \cap H^+(x))}{r^n} = 0,$$

(2) $$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n((B_r(x) \setminus E) \cap H^-(x))}{r^n} = 0,$$

(3) $$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\| \partial E \| (B_r(x))}{\alpha(n-1)\, r^{n-1}} = 1$$

<u>Structure Theorem and characterization</u>

<u>Theorem</u> Assume that $E \subset \mathbb{R}^n$ has loc. finite perimeter.

Then:

(1) $\partial^* E$ is $\mathcal{H}^{n-1}$-rectifiable;

$$\partial^* E = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \cup N,$$

where $\|\partial E\|(N) = 0$ and K_k is a compact subset of a C^1-hypersurface $S_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$,

(2) $\nu_E |_{K_k}$ is normal to S_k;

(3) $\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E.$

For the proof: see [EG] on p. 205.

<u>Definition</u> (Measure theoretic boundary) Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be $\mathcal{L}^n$-measurable. The m.t.b. $\partial_* E$ of E is the set of all points $x \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}{r^n} > 0 \quad \text{and}$$

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x) \setminus E)}{r^n} > 0 .$$

<u>Lemma</u> $\partial^* E \subset \partial_* E$ and $H^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$

Proof: [EG] p. 208

<u>Theorem</u> (Divergence theorem) Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be of loc. finite perimeter and let $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, Then:

$$\boxed{\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E \, dH^{n-1}.}$$

The proof follows from the previous discussion

<u>Theorem</u> (Federer) Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be measurable. The following statements are equivalent:

A) E has locally finite perimeter;

B) $H^{n-1}(K \cap \partial_* E) < \infty$ for any $K \subset \mathbb{R}^n$ compact.

Proof: [EG] p. 222

FORMULA DELL'AREA: GRAFICI C^1

Vogliamo dare una dimostrazione della seguente variante della formula dell'area.

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A)$. Allora

$$\mathcal{H}^n(gr(f)) = \int_A \sqrt{1+|\nabla f(x)|^2}\, dx.$$

DIM. Iniziamo dal caso in cui f sia affine (lineare)

$$f(x) = \langle v, x\rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

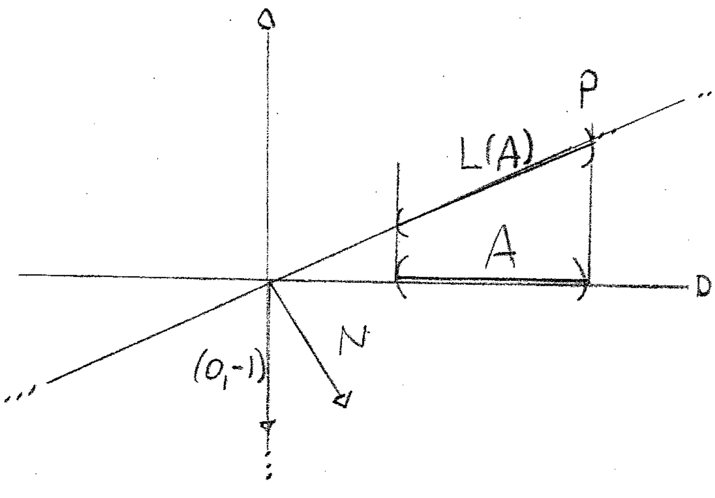
per qualche $v \in \mathbb{R}^n$. Sia $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la mappa lineare

$$L(x) = (x, \langle v,x\rangle), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

La normale al piano $P = L(\mathbb{R}^n)$ è

$$N = \frac{(v,-1)}{\sqrt{1+|v|^2}}.$$

Sia $T \in O(n+1)$ la (una) trasformazione ortogonale tale che $T(N) = (0,-1)$



Allora abbiamo, con $S := T \circ L$ dove S è lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{H}^n(L(A)) \underset{T \text{ isometria}}{=} \mathcal{H}^n(T \circ L(A))$$

$$= \mathcal{H}^n(S(A)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n \\ \text{su } \mathbb{R}^n}}{=} \mathcal{L}^n(S(A))$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatto noto}}}{=} |\det(S)| \, \mathcal{L}^n(A).$$

Inoltre, detta S^* la trasposta di S,

$$|\det(S)| = |\det(S^* S)|^{1/2} = |\det(L^* T^* T L)|^{1/2}$$

$$= |\det(L^* L)|^{1/2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{algebra} \\ \text{lineare}}}{=} \sqrt{1+|v|^2}$$

e quindi

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = \int_A \sqrt{1+|v|^2}\, dx = \int_A \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx.$$

Sia ora $f \in C^1(A)$, sia $F(x) = (x, f(x))$ e

$$G = \{ F(x) \in \mathbb{R}^{n+1} \; ; \; x \in A \}.$$

Senza perdere generalità possiamo supporre che $Lip(F) < \infty$. Questo è vero localmente.

Sia μ la misura di Borel su A definita in questo modo

$$\mu(B) \doteq H^n(F(B)), \quad B \subset A \text{ di Borel}.$$

Abbiamo

$$\mu(B) \leq Lip(F)^n \, H^n(B) = Lip(F)^n \, \mathcal{L}^n(B)$$

e quindi $\mu \ll \mathcal{L}^n$. Dunque esiste una funzione $g \in L^1_{loc}(A)$ tale che

$$\mu(B) = \int_B g(x)\, dx$$

e inoltre

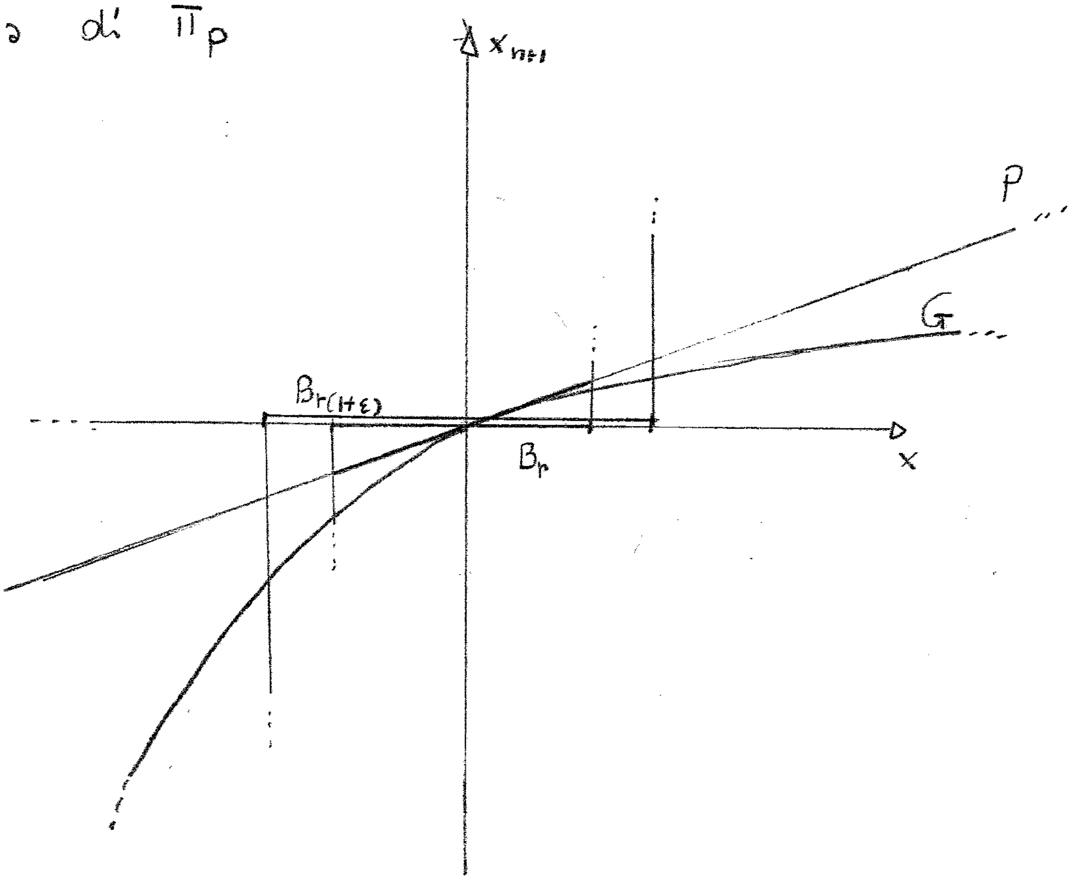
$$g(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{H^n(F(B_r(x)))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))},$$

per $\mathcal{L}^n$-q.o. x.

Calcoliamo il limite in ogni punto $x \in A$. Senza perdere di generalità supponiamo $x = 0$ e $f(0) = 0$.

Sia $v = \nabla f(0)$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ sia $L(x) = (x, \langle v, x \rangle)$ e poi $P = L(\mathbb{R}^n)$. Indichiamo con $\Pi_P : \mathbb{R}^{n+1} \to P$ la proiezione ortogonale su P.

Detto $G = F(A)$ il grafico di f e sia $\Pi_G : \Pi_P(G) \to G$ l'inversa di Π_P



Siano $r > 0$, $\varepsilon > 0$ e $B_r = B_r(0)$, $B_{r(1+\varepsilon)} = B_{r(1+\varepsilon)}(0)$.

Affermiamo che esiste $r_0 > 0$ tale che per $0 < r < r_0$ si ha:

1) $F(B_r) \subset \pi_G\left(L\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right)\right)$,

2) $L(B_r) \subset \pi_P\left(F\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right)\right)$.

La proiezione π_P è 1-Lipschitz.
Per $r_0 > 0$ opportuno, la "proiezione" π_G è $(1+\varepsilon)$-Lipschitz.

Dunque, usando 1):

$$
\begin{aligned}
H^n(F(B_r)) &\le H^n\left(\pi_G\left(L\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right)\right)\right) \\
&\le (1+\varepsilon)^n H^n\left(L\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right)\right) \\
&= (1+\varepsilon)^n \sqrt{1+|v|^2}\, \mathcal{L}^n\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right) \\
&= (1+\varepsilon)^{2n} \sqrt{1+|v|^2}\, \mathcal{L}^n(B_r)
\end{aligned}
$$

(Prima parte)

e quindi

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{H^n(F(B_r))}{\mathcal{L}^n(B_r)} \le (1+\varepsilon)^{2n} \sqrt{1+|v|^2}.$$

Usando invece 2) :

$$\sqrt{1+|v|^2}\ \mathcal{L}^n(B_r) = H^n(L(B_r)) \leq H^n(\Pi_p(F(B_{r(1+\varepsilon)})))$$

$$\leq H^n(F(B_{r(1+\varepsilon)}))$$

che può essere riscritta in questo modo:

$$H^n(F(B_r)) \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \sqrt{1+|v|^2}\ \mathcal{L}^n(B_r)$$

e quindi

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{H^n(F(B_r))}{\mathcal{L}^n(B_r)} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \sqrt{1+|v|^2} .$$

Siccome $\varepsilon>0$ è libero, si trova

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{H^n(F(B_r))}{\mathcal{L}^n(B_r)} = \sqrt{1+|v|^2} = \sqrt{1+|\nabla f(0)|^2} .$$

Proviamo la 1). É equivalente a $\Pi_p(F(B_r)) \subset L(B_{r(1+\varepsilon)})$.
Detta $\pi(x, x_{n+1}) = x$ si tratta di verificare che

$$\pi(\Pi_p(F(B_r))) \subset B_{r(1+\varepsilon)}$$

per $0<r<r_0$.

Sia $x \in B_r$. Allora $\Pi_P(F(x)) = F(x) - \langle F(x), N\rangle N$

e quindi

$$\pi(\Pi_P(F(x))) = x - \langle F(x), N\rangle \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}}$$

$$= x - \left(\langle x, v\rangle - f(x)\right) \frac{v}{1+|v|^2}$$

dove $f(x) = f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + o(|x|)$

$$= \langle v, x\rangle + o(|x|)$$

Segue che

$$|\pi(\Pi_P(F(x)))| = |x| \; (1+o(1))$$

$$\leq r\,(1+\varepsilon)$$

se $|x| < r$ e $o(1) < \varepsilon$
vero
per $r < r_0$.

Lasciamo la verifica di 2)

come esercizio.

$\square$

Area Formula

Goal of this chapter is to prove the general version of the Area Formula

$$\int_A \sqrt{1+|Df|^2}\,dx = \mathcal{H}^n(gr(f|A)) .$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz

$A \subset \mathbb{R}^n$

Jacobians

Def. (i) We say that a linear map $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, is orthogonal if $Tx \cdot Ty = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(ii) We say that a linear map $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, is symmetric if $x \cdot Ty = Tx \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

(iii) The adjoint of a linear map $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is the linear map $T^*: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ defined by

$$x \cdot Ty = T^* x \cdot y \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Theorem (Polar decomposition) Let $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be linear. Then:

(i) If $n \leq m$ there is $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ symmetric and $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ orthogonal such that $L = T \circ S$.

(ii) If $m \leq n$ there is $S: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ symmetric and $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ orthogonal such that $L = S \circ T^*$.

Definition Let $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be linear. We let:

(i) $[\![L]\!] = |\det S|$ if $n \leq m$ and $L = T \circ S$;

(ii) $[\![L]\!] = |\det S|$ if $m \leq n$ and $L = S \circ T^*$.

We call $[\![L]\!]$ the Jacobian of L.

Theorem $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Then:

(i) If $n \leq m$ then $[\![L]\!]^2 = \det(L^* \circ L)$;

(ii) If $m \leq n$ then $[\![L]\!]^2 = \det(L \circ L^*)$.

Proof (i):
$$\begin{aligned}\det(L^* \circ L) &= \det\left((T \circ S)^* \circ T \circ S\right)\\ &= \det(S^* \circ T^* \circ T \circ S)\\ &= \det(S^* \circ S) = \det(S)^2 = [\![L]\!]^2\end{aligned}$$

Definition For $n \leq m$ let:

(i) $\Lambda(m,n) = \{ \lambda : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} : \lambda \text{ is (strictly) increasing} \}$

(ii) For each $\lambda \in \Lambda(m,n)$ let $P_\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ be the "projection"
$$P_\lambda(x) = (x_{\lambda(1)}, \ldots, x_{\lambda(n)})$$

Theorem (Binet-Cauchy Formula) Let $n \leq m$ and $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Then
$$[\![L]\!]^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} \left(\det(P_\lambda \circ L)\right)^2.$$

Proof Let $L = (l_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $L^* = (l^*_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$

with $l^*_{ji} = l_{ij}$. Moreover, let

$$A = L^* \circ L \, , \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \, ,$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} l^*_{ik} l_{kj} = \sum_{k=1}^{m} l_{ki} l_{kj} \, .$$

Then

$$[\![L]\!]^2 = \det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} l_{ki} l_{k\sigma(i)}$$

with $\Sigma_n = \{ \text{perm. of } n \text{ elements} \}$,

Now let $\Phi := \{ \lambda : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\} \}$,
$\Phi^* := \{ \lambda \in \Phi \; ; \; \lambda \text{ injective} \}$.

We find

$$[\![L]\!]^2 = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\varphi \in \Phi} \prod_{i=1}^{n} l_{\varphi(i) i} \, l_{\varphi(i) \sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\varphi \in \Phi^*} \prod_{i=1}^{n} l_{\varphi(i) i} \, l_{\varphi(i) \sigma(i)} \, .$$

Now $\varphi \in \Phi^*$ is of the form $\varphi = \lambda \circ \theta$, unique, with $\theta \in \Sigma_n$ and $\lambda \in \Lambda(m,n)$, so

$$[\![L]\!]^2 = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\theta \in \Sigma_n} \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} \prod_{i=1}^{n} l_{\lambda(\theta(i)), i} \, l_{\lambda(\theta(i)), \sigma(i)}$$

and thus

$$[\![L]\!] = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\theta\in\Sigma_n} \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} \prod_{i=1}^{n} l_{\lambda(i),\theta(i)}\, l_{\lambda(i),\sigma(\theta(i))}$$

$$\sigma\circ\theta = \eta \in \Sigma_n \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\theta)\operatorname{sgn}(\eta)$$

$$= \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} \sum_{\theta,\eta\in\Sigma_n}{}^{\!\prime} \operatorname{sgn}(\theta)\operatorname{sgn}(\eta) \prod_{i=1}^{n} l_{\lambda(i),\theta(i)}\, l_{\lambda(i),\eta(i)}$$

$$= \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} \left(\sum_{\theta\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\theta) \prod_{i=1}^{n} l_{\lambda(i),\theta(i)}\right)^2$$

$$= \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} \left(\det(P_\lambda\circ L)\right)^2 .$$

$\square$

<u>Lemma 1</u> Let $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $n\le m$, be linear and let $A\subset\mathbb{R}^n$ be $\mathcal{L}^n$-measurable. Then

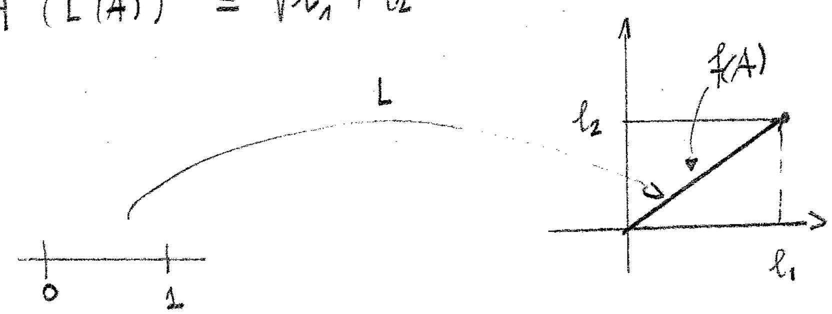
$$\mathcal{H}^n(L(A)) = [\![L]\!]\, \mathcal{L}^n(A)$$

Proof: Well known. It is omitted

<u>Example</u> $L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear, $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$, $A = [0,1]$

Then

$$\mathcal{H}^1(L(A)) = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$$



<u>Def</u> (Jacobian) Let $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, be Lipschitz.

The Jacobian of f is

$$Jf(x) = [\![Df(x)]\!], \quad \text{for } \mathcal{L}^n\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

(Area Formula)

<u>Theorem</u> Let $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ be Lipschitz, $n \leq m$, and let $A \subset \mathbb{R}^n$ be $\mathcal{L}^n$-measurable. Then

$$\int_A Jf(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n(y).$$

In particular, when f is 1-1 we have

$$(*) \qquad \int_A Jf(x)\, dx = \mathcal{H}^n(f(A)).$$

<u>Comment</u>. $y \longmapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(\{y\})) = \#\{x \in A : f(x) = y\}$ is the multiplicity function

<u>Example 1</u> When $n = 1$, let $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ be Lip. and 1-1.

Formula $(*)$ reads:

$$\int_{[0,1]} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \mathcal{H}^1(\gamma([0,1])).$$

<u>Example 2</u> Let $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ be Lip. and let $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ be the graph

$$F(x) = (x, f(x)).$$

The differential of F is

$$DF(x) = \begin{bmatrix} & I_n & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

By the Binet-Cauchy formula:

$$JF(x)^2 = [\![DF(x)]\!]^2 = 1 + |Df(x)|^2 .$$

Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be meas. (and with $\mathcal{L}^n(A) < \infty$).
By the Area Formula we have

$$\int_A \sqrt{1+|Df(x)|^2}\, dx = H^n(\text{gr} f|_A) .$$

<u>Example 3</u> Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be Lip. and 1-1 on $A \subset \mathbb{R}^n$
Coordinates $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Then

$$H^2(f(A)) = \int_A |f_u \wedge f_v| \, du dv .$$

<u>Minimal Surface Equation</u>

Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set and let $g : \partial A \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Consider the set

$$\mathcal{A} = \{ f \in C(\bar{A}) : f \in Lip_{loc}(A) \} .$$

Let $J : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ be the Area functional:

$$J(f) = \int_A \sqrt{1+|Df|^2}\, dx$$

Assume that the following Plateau problem has a solution

$$\min \{ J(f) \; ; \; f \in \mathcal{A} \} \in \mathbb{R}.$$

Let $f \in \mathcal{A}$ be a minimum. The function

$$\phi(\varepsilon) = J(f+\varepsilon\varphi) , \qquad \varphi \in C_c^1(A) \text{ fixed},$$

has a minimum at $\varepsilon = 0$. Compute

$$\varphi'(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_A \sqrt{1+ |Df|^2 + 2\varepsilon Df\cdot D\varphi + \varepsilon^2 |D\varphi|^2} \, dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \int_A \frac{\cancel{2}\, Df \cdot D\varphi}{\sqrt{1+|Df|^2}} \, dx$$

We deduce that

$$\int_A \frac{Df \cdot D\varphi}{\sqrt{1+|Df|^2}} \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^1(A).$$

Assume that $f \in C^2(A)$ and integrate by parts:

$$\int_A \operatorname{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}} \right) \varphi(x) \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^1(A).$$

We conclude that

$$(*) \qquad \operatorname{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}} \right) = 0 \qquad \text{in } A.$$

This is the <u>minimal surface equation</u>.

This is a second order elliptic, non linear equation.

Equation (*) has the following geometric meaning.

"The mean curvature of $gr(f)$ is identically zero".

<u>Definition</u> A C^2 hypersurface of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, with zero mean curvature is called <u>minimal surface</u>.

<u>Proof of the Area Formula</u>

<u>Lemma 2</u> $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Lip., $m \geq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-measurable.

Then:

(i) $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ is H^n-measurable

(ii) $y \longmapsto H^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ is H^n-meas. on $\mathbb{R}^m$ and

(iii) $\int_{\mathbb{R}^m} H^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, dH^n(y) \leq (\mathrm{Lip}(f))^n \mathcal{L}^n(A)$.

Proof. W.L.G: A is bounded ($\Rightarrow \mathcal{L}^n(A) < \infty$).

(i) $\forall i \in \mathbb{N}$ there is $K_i \subset A$ compact such that

$$\mathcal{L}^n(A) - \mathcal{L}^n(K_i) = \mathcal{L}^n(A \setminus K_i) < \frac{1}{i}.$$

Now: $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ compact $\Rightarrow f(K)$ Borel in $\mathbb{R}^m$

$\Rightarrow H^n$-measur. in $\mathbb{R}^m$

Then $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(K_i)$ is H^n-measur.

Moreover

$$H^n\left(f(A) \setminus f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right) \leq H^n\left(f\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right)$$
$$\leq (\mathrm{Lip}(f))^n \underbrace{\mathcal{L}^n\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)}_{=0}$$
$$\leq 0.$$

Then $f(A) \setminus f(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i)$ is H^n- meas. This implies (i).

(H^n is a complete measure)

(ii) Let $\mathcal{B}_k = \left\{ Q \subset \mathbb{R}^n \,;\, Q = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \,,\, a_i = \frac{c_i}{k} \,,\, b_i = \frac{c_i+1}{k} \right\}$ $c_i \in \mathbb{Z}$, $i=1,\dots,n$

where $k \in \mathbb{N}$ is fixed.

Clearly $\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in \mathcal{B}_k} Q$.

Define

$$g_k(y) = \sum_{Q \in \mathcal{B}_k} \chi_{f(A \cap Q)}(y) \,, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$= \# \{ Q \in \mathcal{B}_k \,;\, y \in f(A \cap Q) \}.$$

Then $g_k \uparrow$ and g_k is H^n- meas. on $\mathbb{R}^m$.

Moreover

$$\lim_{k \to \infty} g_k(y) = \# \{ x \in A \,;\, f(x) = y \}$$

$$= \underbrace{H^0 (A \cap f^{-1}\{y\})}_{\text{is thus } H^n\text{- measurable}}$$

(iii) By Monotone convergence

$$\int_{\mathbb{R}^m} H^0 (A \cap f^{-1}\{y\}) \, dH^n(y) = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k(y) \, dH^n(y) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{Q \in \mathcal{B}_k} H^n(f(A \cap Q)) \leq \limsup_{k \to \infty} \sum_{Q \in \mathcal{B}_k} (\mathrm{Lip}(f))^n \mathcal{L}^n(A \cap Q) =$$

$$= (\mathrm{Lip}(f))^n \mathcal{L}^n(A). \qquad \square$$

Lemma 3 Let $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, be Lipschitz.
Let $t > 1$ and let

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^n ; f \text{ is diff. at } x \text{ and } Jf(x) > 0 \}$$

There is a sequence of Borel sets $E_K \subset B$ such that:

(i) $\bigcup_{K=1}^{\infty} E_K = B$

(ii) $f : E_K \to \mathbb{R}^m$ is 1-1 for all $K \in \mathbb{N}$

(iii) For each $K \in \mathbb{N}$ there is $T_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
linear, symmetric, invertible such that:

- $\mathrm{Lip}\left(f|_{E_K} \circ T_K^{-1}\right) \leq t$;
- $\mathrm{Lip}\left(T_K \circ f|_{E_K}^{-1}\right) \leq t$;
- $\frac{1}{t^n} |\det T_K| \leq Jf(x) \leq t^n |\det T_K| \quad \forall x \in E_K.$

Proof. Fix $\varepsilon > 0$ s.t. $\frac{1}{t} + \varepsilon < 1 < t - \varepsilon$.

Let
- $C \subset B$ dense and countable
- $\mathcal{S} \subset \{ S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ lin. inv. sym.} \}$ dense and countable

For $c \in C$, $T \in \mathcal{S}$ and $i \in \mathbb{N}$ let

Def
$$E(c, T, i) = \{ b \in B(c, \tfrac{1}{i}) \cap B ; \ (1) \text{ and } (2) \text{ hold} \}$$

(1) $\left(\frac{1}{t} + \varepsilon\right) |Tv| \leq |Df(b) v| \leq (t - \varepsilon) |Tv| \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$

(2) $\left| f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (b - a) \right| \leq \varepsilon |T(b - a)| \qquad \forall a \in B(b, \tfrac{2}{i})$

Notice : • The family of all $E(c,T,i)$ is at most countable.

• Each $E(c,T,i)$ is Borel because f and Df are Borel

(1) and (2) imply

$$(3) \quad \frac{1}{t}\,|T(a-b)| \le |f(a)-f(b)| \le t\,|T(a-b)| \qquad \forall b \in E(c,T,i), \ \forall a \in B(b,\tfrac{2}{i})$$

<u>Claim</u> : For all: $b \in E(c,T,i)$ we have

$$(4) \quad \left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)^n |\det T| \le [\![Df(b)]\!] = Jf(b) \le (t-\varepsilon)^n |\det(T)|$$

Proof. We have $Df(b) = \underset{\text{orthog.}}{O} \circ \underset{\text{symmetric}}{S}$, polar decomposition

And thus

$$Jf(b) = |\det S|.$$

By (1) :

$$\left(\tfrac{1}{t}+\varepsilon\right)|Tv| \le \underbrace{|O\circ S(v)|}_{=\,|Sv|} \le (t-\varepsilon)\,|Tv| \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)|v| \le |S\circ T^{-1}v| \le (t-\varepsilon)\,|v|$$

$\Downarrow$ similar (...)

$\Downarrow$

$$S\circ T^{-1}(B(0,1)) \subset B(0,t-\varepsilon)$$

$\Downarrow$

$$\mathcal{L}^n(S\circ T^{-1}(B(0,1))) \le \mathcal{L}^n(B(0,t-\varepsilon))$$

$\Updownarrow$

$$|\det S| \le (t-\varepsilon)^n |\det T| \iff |\det(S\circ T^{-1})| \le (t-\varepsilon)^n$$

This proves the right inequality in (4),

The proof of the ineq. on the left is similar.

We relabel: $E(c,T,i) \rightsquigarrow E_k$ with $k \in \mathbb{N}$.

If $E_k = E(c,T,i)$ we let $T_k = T$.

(*) We prove: $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Let $b \in B$. We have $Df(b) = O \circ S$.

We choose $T \in \mathcal{S}$ very close to S in the following sense

$$\mathrm{Lip}(S \circ T^{-1}) \le t - \varepsilon \qquad \left(\Longrightarrow |Df(b)v| \le (t-\varepsilon)|Tv| \right)$$

$$\mathrm{Lip}(T^{-1} \circ S) \le \left(\frac{1}{t} + \varepsilon\right)^{-1}, \quad \left(\Longrightarrow |Df(b)v| \ge \left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)|Tv| \right)$$

Because $\mathrm{Lip}(S \circ T^{-1}) \le \| S \circ T^{-1} \|$, by density there is such a $T \in \mathcal{S}$.

Next we select $i \in \mathbb{N}$ such that

$$\left| f(a) - f(b) - Df(b)(a-b) \right| \le \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lip}(T^{-1})} |b-a| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Easy.}}}{\le} \varepsilon |T(b-a)|$$

for all $a \in B(b, \frac{2}{i})$.

By differentiability of f at b, there is such an $i \in \mathbb{N}$.

Finally, we select $c \in C$ such that $|b-c| < \frac{1}{i}$.

By density of C in B, there is such a point $c \in C$.

Conclusion: $b \in E(c,T,i)$. This ends the proof of the claim (*).

We prove (ii). Let $E_K = E(c, T, i)$ with $T = T_K$.

From (3):

$$(5) \qquad \frac{1}{t}\,|T_K(a-b)| \le |f(a) - f(b)| \le t\,|T_K(a-b)| \qquad \forall b \in E_K \quad \forall a \in B_{2/i}(b)$$

Notice that

$$a \in E_K \Rightarrow |a - c| < \frac{1}{i} \Rightarrow |a-b| < \frac{2}{i} \Rightarrow a \in B_{2/i}(b)$$

Thus

$$(6) \qquad \frac{1}{t}\,|T_K(a-b)| \le |f(a) - f(b)| \le t\,|T_K(a-b)| \qquad \forall a, b \in E_K,$$

Conclusion: $f|_{E_K}$ is 1-1.

We prove (iii). From (6) it follows

$$\mathrm{Lip}\left(f|_{E_K} \circ T_K^{-1}\right) \le t,$$

$$\mathrm{Lip}\left(T_K \circ f|_{E_K}^{-1}\right) \le t.$$

From (4) $\left(\frac{1}{t}\right)^n |\det T_K| \le Jf \le t^n |\det(T_K)|$ on E_K.

$\square$

Proof of the area formula.

By Rademacher theorem and Lemma 2 part (iii) we can assume that f is differentiable on A.

We can also assume $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.

Case 1: $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ Jf(x) > 0\}$

Case 2: $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ Jf(x) = 0\}$

We start with the Case 1. We have

$$A \subset B = \{x \in \mathbb{R}^n : Jf(x) > 0\}.$$

Fix $t > 1$ and let $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ be the sets of Lemma 3.
Fix $k \in \mathbb{N}$ and let

$$\mathcal{B}_k = \{Q \;;\; Q \text{ cubes of side length } 1/k \text{ of Lemma 2, proof}\}$$

$$= \{Q_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Let
$$F_j^i = A \cap E_j \cap Q_i \;, \quad i \in \mathbb{N},\; j \in \mathbb{N}.$$

The sets F_j^i are disjoint.
The same argument as in the proof of Lemma 2 shows that

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F_j^i)) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^n(y),$$

Now consider

$$\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) = \mathcal{H}^n(f \circ T_j^{-1} \circ T_j(F_j^i)) \overset{\operatorname{Lip}(f\circ T_j^{-1}|_{E_j}) \le t}{\le}$$

$$\le t^n \mathcal{H}^n(T_j(F_j^i)) = t^n |\det(T_j)|\, \mathcal{L}^n(F_j^i).$$

Similarly,

$$\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i)) = \mathcal{H}^n(T_j \circ f^{-1}_{|E_j} \circ f_{|E_j}(F_j^i)) \overset{\operatorname{Lip}(T_j\circ f^{-1}_{|E_j}) \le t}{\le}$$

$$\le t^n \mathcal{H}^n(f(F_j^i)).$$

We bring the estimates together:

$$\begin{aligned}
H^n(f(F_j^i)) &\le t^n\, |\det(T_j^i)|\, \mathcal{L}^n(F_j^i) \le \quad \left[\, |\det T_j^i| \le t^n\, Jf \text{ on } E_j^i \,\right]\\
&\le t^{2n} \int_{F_j^i} Jf(x)\, dx \le \\
&\le t^{3n} \int_{F_j^i} |\det(T_j^i)|\, dx = t^{3n}\, |\det(T_j^i)|\, \mathcal{L}^n(F_j^i) = \\
&= t^{3n}\, \mathcal{L}^n(T_j^i(F_j^i)) \\
&\le t^{4n}\, H^n(f(F_j^i)) .
\end{aligned}$$

Sum up in i and j:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} H^n(f(F_j^i)) \le t^{2n} \int_{\underset{\bigcup_{i,j=1}^{\infty} F_j^i}{\overset{A}{\parallel}}} Jf(x)\,dx \le t^{4n} \sum_{i,j=1}^{\infty} H^n(f(F_j^i)) .$$

Let first $K \to \infty$ and then $t \downarrow 1$ to obtain

$$\int_{\mathbb{R}^m} H^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, dH^n(y) = \int_A Jf(x)\, dx .$$

Case 2. Now let $A \subset \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Jf(x) = 0 \}$.
Fix $\varepsilon > 0$ and let $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ be

$$g(x) = (f(x), \varepsilon x) .$$

Also, let $p : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ be $p(y,z) = y$. Then $f = p \circ g$.

We have

$$Dg(x) = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} Df(x) \\ \\ \varepsilon I_n \end{matrix}\right] \left.\vphantom{\begin{matrix} Df(x) \\ \\ \varepsilon I_n \end{matrix}}\right] n+m \\ \underbrace{\qquad}_{n} \end{array}.$$

Then

$$[\![Dg(x)]\!]^2 = \varepsilon^{2n} + \text{positive terms} \geq \varepsilon^{2n} > 0$$

$$[\![Dg]\!]^2 = \underbrace{[\![Jf(x)]\!]^2}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{on } A}} + \text{terms cont. } \varepsilon^2 \leq \underbrace{C^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{dep. on Lip} f}} \varepsilon^2$$

Then we have $\quad p$ is 1-Lip

$$\mathcal{H}^n(f(A)) \leq \mathcal{H}^n(g(A)) = \int_A Jg(x)\,dx \leq C\varepsilon\, \mathcal{L}^n(A).$$

Letting $\varepsilon \downarrow 0$ we find $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$ and thus

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n(y) = 0$$

because $\quad \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) > 0 \Rightarrow y \in f(A)$.

We also have

$$0 = \int_A Jf(x)\,dx.$$

The area formula trivially holds on A.

$\square$

SUPERFICI MINIME

Una mappa lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $m \geq n$ si può fattorizzare $L = T \circ S$ con T ortogonale ed $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare simmetrica. Si definisce

$$[\![L]\!] = |\det S|$$

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è di classe C^1 si definisce lo Jacobiano ("elemento d'area")

$$Jf(x) = [\![Df(x)]\!] , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Se f è 1-1 su $B \subset \mathbb{R}^n$, la formula dell'area stabilisce che

$$H^n(f(B)) = \int_B Jf(x)\, dx =: A(f; B)$$

L'insieme $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ è una superficie immersa quando $Df(x)$ ha rango n $\forall x \in B$.

Diciamo che $f \in C^1(B; \mathbb{R}^m)$ è (parametrizza) una superficie minima se $\forall \varphi \in C^1_c(B; \mathbb{R}^m)$ si ha

$$\frac{d}{dt} A(f + t\varphi) \Big|_{t=0} = 0 .$$

Dunque le superfici minime sono i punti stazionari dell'area e <u>non</u> i minimi

<u>ESERCIZIO</u> Sia $f \in C^2(B;\mathbb{R}^3)$ con $B \subset \mathbb{R}^2$ aperto. Provare che f parametrizza una superficie minima se e solo se $S = f(B)$ ha curvatura media identicamente nulla.

<u>ESERCIZIO</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f \in C^2(A)$ una soluzione di

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0 \qquad \text{in } A.$$

Provare che $S = gr(f)$ è un <u>minimo</u> dell'area nel cilindro $A \times \mathbb{R}$.

FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE DI WEIERSTRASS

Deduciamo la formula di rappresentazione di Weierstrass per le superfici minime immerse in modo conforme in $\mathbb{R}^3$.

$U \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ dominio aperto, $z = u + iv \in \mathbb{C}$

In $\mathbb{R}^3$ siano $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $|\cdot|$ il prodotto scalare e la norma standard.

Per $F \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$ usiamo le notazioni:

$$F_u(z) = \frac{\partial}{\partial u} F(z) \ (\in \mathbb{R}^3), \quad z \in U$$

$$F_v(z) = \frac{\partial}{\partial v} F(z) \ (\in \mathbb{R}^3).$$

<u>DEF.</u> $F \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$ si dice conforme se:

1) $|F_u| = |F_v| > 0$ in U;

2) $\langle F_u, F_v \rangle = 0$ in U.

La funzione $E : U \to \mathbb{R}^3$, $E(z) = |F_u(z)|^2 = |F_v(z)|^2$ si dice fattore conforme di F.

Diremo che $\Sigma = F(U) \subset \mathbb{R}^3$ è una ipersuperficie immersa in $\mathbb{R}^3$ data dalla parametrizzazione conforme F.

I campi F_u e F_v sono tangenti a Σ e ortogonali.
La normale a Σ è data da

$$N = \frac{F_u \wedge F_v}{|F_u \wedge F_v|} = \frac{1}{E}(F_u \wedge F_v).$$

Dipende da $z \in \mathcal{U}$.

<u>Notazioni</u>. In un generico $z \in \mathcal{U}$:

$$F_z = \frac{1}{2}(F_u - i F_v) \in \mathbb{C}^3,$$

$$F_{\bar z} = \frac{1}{2}(F_u + i F_v) \in \mathbb{C}^3.$$

Estendiamo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathbb{C}^3$ in modo $\mathbb{C}$-lineare.
Se $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle A + iB, C + iD \rangle = \langle A, C \rangle + i \langle A, D \rangle + i \langle B, C \rangle - \langle B, D \rangle.$$

Dalle 1)-2) deduciamo che

$$\langle F_z, F_z \rangle = \frac{1}{4} \langle F_u - i F_v, F_u - i F_v \rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left(|F_u|^2 - |F_v|^2 - 2i \langle F_u, F_v \rangle \right)$$

$$= 0.$$

Diremo che F_z è isotropo.

LEMMA Sia $F \in C^2(U;\mathbb{R}^3)$ conforme e sia H la curvatura media di $\Sigma = F(U)$. Allora in un generico punto $z \in U$:

$$\Delta F = (2EH)\,N,$$

Dim. ΔF è ortogonale a F_z ed $F_{\bar z}$:

$$\langle \Delta F, F_z \rangle = 4 \langle F_{z\bar z}, F_z \rangle = 2 \frac{\partial}{\partial \bar z} \langle F_z, F_z \rangle$$

$$= 0 \quad \text{perché } F_z \text{ è isotropo.}$$

Analogamente: $\langle \Delta F, F_{\bar z} \rangle = 0$.
Quindi ΔF è parallelo ad N;

$$\langle \Delta F, N \rangle = 4 \langle F_{z\bar z}, N \rangle = -4 \langle F_{\bar z}, N_z \rangle$$

in quanto $\langle F_{\bar z}, N \rangle = 0$. Espandiamo:

$$\langle \Delta F, N \rangle = -\langle F_u - i F_v, N_u + i N_v \rangle$$

$$= -\Big(\langle F_u, N_u \rangle + \langle F_v, N_v \rangle + i \langle F_u, N_v \rangle - i \langle F_u, N_v \rangle \Big)$$

$$= -\big(\langle F_u, N_u \rangle + \langle F_v, N_v \rangle \big)$$

$$= -2E \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\langle F_u, N_u \rangle}{E} + \frac{\langle F_v, N_v \rangle}{E} \right)$$

Per la definizione di curvatura media si ottiene

$$\langle \Delta F, N \rangle = 2EH.$$

$\square$

COMMENTI Se Σ è una superficie minima allora $H=0$ e quindi $\Delta F = 0$. Le coordinate di F sono funzioni armoniche e quindi $F \in C^\infty(U; \mathbb{R}^3)$. Quindi una superficie minima di classe C^2 è automaticamente di classe C^∞.

Consideriamo il campo vettoriale complesso $X : U \to \mathbb{C}^3$

$$G(z) = 2 F_z(z), \quad z \in U.$$

Se Σ è una superficie minima si ha

$$G_{\bar z} = 2 F_{z\bar z} = 0,$$

ovvero le coordinate di G sono funzioni olomorfe. Sia X una primitiva complessa di G:

i) $X_{\bar z} = 0$ in U;

ii) $X_z = G$ in U.

LEMMA Sia $F : U \to \mathbb{R}^3$, con $U \subset \mathbb{C}$ connesso, la parametrizzazione conforme di una superficie minima. Allora $F - \mathrm{Re}(X)$ è costante in U.

DIM. Consideriamo

$$Y = F - \mathrm{Re}(X) = F - \frac{X + \overline{X}}{2}.$$

Allora:

$$Y_z = F_z - \frac{X_z + \overline{X_{\bar z}}}{2} = F_z - \frac{G}{2} = 0$$

$$Y_{\bar z} = F_{\bar z} - \frac{X_{\bar z} + \overline{X_z}}{2} = F_{\bar z} - \frac{\overline{G}}{2}$$

$$= F_{\bar z} - \frac{1}{2} \overline{2 F_z} = F_{\bar z} - \overline{F}_{\bar z} = F_{\bar z} - F_{\bar z} = 0.$$

Infatti $F = \overline{F}$.

Concludiamo che Y è costante su U.

$\square$

Il campo $G = (G_1, G_2, G_3)$ è isotropo!

$$0 = \langle G, G \rangle = G_1^2 + G_2^2 + G_3^2$$

ovvero:

$$(G_1 + i\, G_2)(G_1 - i\, G_2) + G_3^2 = 0 .$$

Poniamo

$$f = G_1 + i\, G_2 ,$$

$$g = G_1 - i\, G_2 ,$$

$$h = G_3 .$$

$f, g, h : U \to \mathbb{C}$ sono olomorfe.

Si ricava:

$$f = -\frac{h^2}{g} \qquad \text{dove } g \neq 0 ,$$

Le soluzioni G_1, G_2 del sistema

$$\begin{cases} G_1 + i\, G_2 = -\dfrac{h^2}{g} \\ G_1 - i\, G_2 = g \end{cases}$$

sono

$$G_1 = \frac{1}{2}\left(g - \frac{h^2}{g} \right) ,$$

$$G_2 = \frac{i}{2}\left(g + \frac{h^2}{g} \right) .$$

Si ottiene la formula per G:

$$(*) \qquad G = \left(\frac{1}{2}\left(g - \frac{h^2}{g}\right), \frac{i}{2}\left(g + \frac{h^2}{g}\right), h \right).$$

<u>TEOREMA</u> Sia $F: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{C}$ connesso, la parametrizzazione conforme di una superficie minima. Allora a meno di una traslazione si ha

$$F = \mathrm{Re}(X)$$

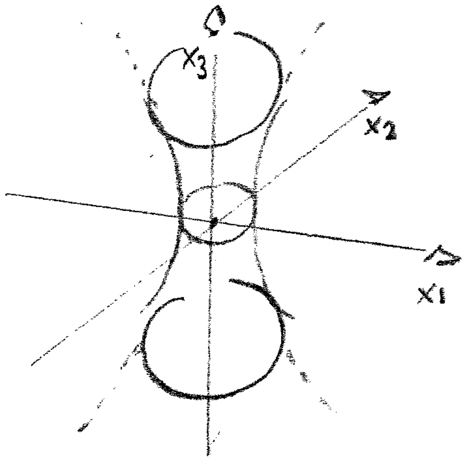
dove X è una primitiva olomorfa di una G della forma $(*)$ con h, g olomorfe in U.

<u>COMMENTI</u> Date h, g olomorfe possiamo formare G come in $(*)$ e poi calcolare una sua primitiva X. I conti delle pagine precedenti mostrano che $F = \mathrm{Re}(X)$ è una parametrizzazione conforme di una superficie minima.

Lo stesso vale per $\hat{F} = \mathrm{Im}(X)$.

ESERCIZIO Siano $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, $h = 1$ e $g(z) = e^z$ per $z \in \mathbb{C}$. Calcolare le superfici minime date dalle parametrizzazioni $F = \mathrm{Re}(X)$ e $\hat{F} = \mathrm{Im}(X)$.

Risposta: F parametrizza una catenoide:



$\hat{F}$ parametrizza un'elicoide.

FORMULA DI MONOTONIA

Vogliamo provare il seguente teorema noto come <u>formula di monotonia</u>:

TEOREMA Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro localmente finito in un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ e <u>stazionario</u> in A. Sia $0 \in \partial^* E$. Allora per quasi ogni $0 < r < \mathrm{dist}(0, \partial A)$:

$$\frac{d}{dr} \frac{P(E, B_r)}{r^{n-1}} = \frac{d}{dr} \int_{\partial^* E \cap B_r} \frac{\langle \nu_E, x \rangle^2}{|x|^{n+1}} \, dH^{n-1}.$$

In particolare

$$r \longmapsto \frac{P(E, B_r)}{r^{n-1}}$$

è monotona crescente.

COROLLARIO Un insieme stazionario in $\mathbb{R}^n$ non può essere limitato.

Diamo la definizione di insieme stazionario.
Sia $V \in C^\infty(A; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale e sia ν_E la normale di E. Definiamo la "divergenza tangenziale"

$$\mathrm{div}_E V = \mathrm{div}\, V - \langle \nu_E, (\nabla V) \nu_E \rangle$$

Commenti:

① Dunque la variazione prima del perimetro nella direzione V è:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\Phi_t(E), A)\Big|_{t=0} = \int_{\partial^* E \cap A} \mathrm{div}_E V \, dH^{n-1}$$

② Se E è un minimo del perimetro in A (per variazioni compatte) allora è stazionario.

DEFINIZIONE Sia $H \in L^1(\partial^* E; H^{n-1})$. Diciamo che E ha curvatura media H in A (in senso distribuzionale) se per ogni $V \in C_c^\infty(A; \mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int_{\partial^* E \cap A} \mathrm{div}_E V \, dH^{n-1} = \int_{\partial^* E \cap A} H \langle V, \nu_E \rangle \, dH^{n-1},$$

Dunque: E stazionario equivale a dire $H = 0$.

DEFINIZIONE Diciamo che E è stazionario in un aperto A se si ha

$$\int_{\partial^* E \cap A} \operatorname{div}_E V(x)\, dH^{n-1} = 0$$

per ogni $V \in C_c^\infty(A; \mathbb{R}^n)$.

La motivazione della definizione deriva dalla formula per lo sviluppo di Taylor del perimetro (variazione prima).

Sia $\Phi : A \times (-\delta, \delta) \xrightarrow{C^\infty} A$ un flusso ad un parametro di diffeomorfismi, ovvero

i) $\Phi(\cdot, t) : A \to A$ è un diffeomorfismo;

ii) $\Phi(\cdot, 0) =$ Identità;

iii) $\Phi(\cdot, t+s) = \Phi(\cdot, t) \circ \Phi(\cdot, s)$.

Definiamo il campo vettoriale (il generatore del flusso)

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x,t) \Big|_{t=0}, \quad x \in A.$$

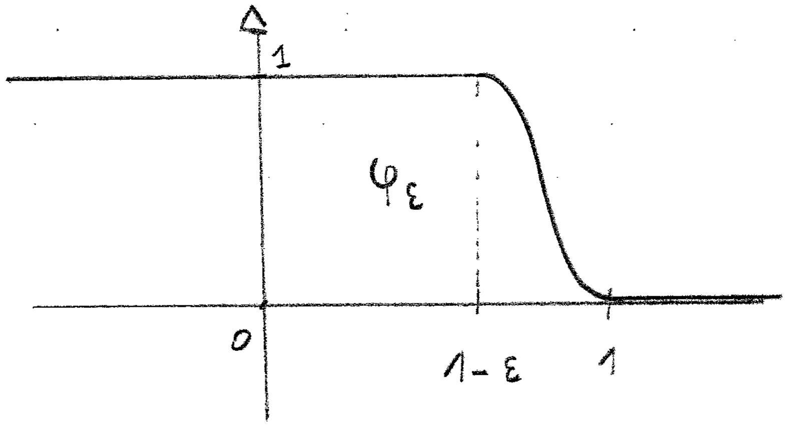
Notazione: $\Phi_t(\cdot) = \Phi(\cdot, t)$.

TEOREMA Sia E con perimetro finito in A. Allora per $t \to 0$

$$P(\Phi_t(E), A) = P(E,A) + t \int_{\partial^* E \cap A} \operatorname{div}_E V\, dH^{n-1} + o(t).$$

Dimostrazione della formula di monotonia

Sia $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, fatta in questo modo:



$$0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$$

Consideriamo questo campo vettoriale:

$$V_r(x) = \varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right) x$$

Conti:

$$\nabla V_r = \frac{1}{r|x|} \varphi_\varepsilon'\left(\frac{|x|}{r}\right) x \otimes x + \varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right) \mathrm{Id}$$

dove $x \otimes x = (x_i x_j)_{i,j=1,\dots,n}$.

$$\mathrm{div}\, V_r = \varphi_\varepsilon'\left(\frac{|x|}{r}\right)\frac{|x|}{r} + n\, \varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right)$$

$$\mathrm{div}_E V_r = \varphi_\varepsilon'\left(\frac{|x|}{r}\right)\frac{|x|}{r} + n\,\varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right) -$$

$$- \left\langle \nu_E, \frac{1}{r|x|}\varphi_\varepsilon'\left(\frac{|x|}{r}\right)\underbrace{(x\otimes x)\nu_E}_{= \langle x, \nu_E\rangle x} + \varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right)\nu_E \right\rangle$$

$$= (n-1)\,\varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right) + \frac{|x|}{r}\varphi_\varepsilon'\left(\frac{|x|}{r}\right)\left(1 - \frac{\langle x,\nu_E\rangle^2}{|x|^2}\right)$$

Siccome E è stazionario:

$$0 = \int_{\partial^* E} \operatorname{div}_E V_r \, dH^{n-1} = (n-1) \int_{\partial^* E} \varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right) dH^{n-1} +$$

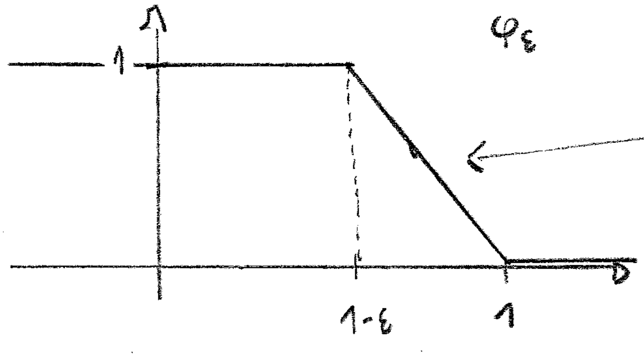
$$+ \int_{\partial^* E} \frac{|x|}{r} \varphi_\varepsilon'\left(\frac{|x|}{r}\right) \left(1 - \frac{\langle x, \nu_E \rangle^2}{|x|^2}\right) dH^{n-1}$$

Riordinata, questa formula diviene

$$A_\varepsilon = (n-1) \int_{\partial^* E} \varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right) dH^{n-1} - r \frac{\partial}{\partial r} \int_{\partial^* E} \varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right) dH^{n-1} =$$

$$= \int_{\partial^* E} \frac{|x|}{r} \varphi_\varepsilon'\left(\frac{|x|}{r}\right) \frac{\langle x, \nu_E \rangle^2}{|x|^2} dH^{n-1} = B_\varepsilon .$$

Per approssimazione possiamo supporre che φ_ε sia



$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1-t}{\varepsilon}$$

con $\varepsilon \to 0^+$

$(\forall r > 0)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial^* E} \varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right) dH^{n-1} = \int_{\partial^* E \cap B_r} 1 \, dH^{n-1} = P(E, B_r)$$

(Conv. monotona)

e inoltre per q.o. $r>0$ si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\partial^* E} \varphi_\varepsilon\left(\frac{|x|}{r}\right) dH^{n-1} = \frac{\partial}{\partial r} P(E, B_r).$$

(Esercizio)

Dunque, con $\vartheta(r) = P(E, B_r)$ si trova per q.o. $r>0$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} A_\varepsilon &= (n-1)\vartheta(r) - r\vartheta'(r) \\ &= -\left[(1-n)\vartheta(r) + r\vartheta'(r)\right] \\ &= -r^n\left[(1-n) r^{-n}\vartheta(r) + r^{1-n}\vartheta'(r)\right] \\ &= -r^n\left(r^{1-n}\vartheta(r)\right)'\end{aligned}$$

Affermiamo ora che per q.o. $r>0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{r^n} B_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial r} \int_{B_r\cap\partial^* E} \frac{\langle x, \nu_E\rangle^2}{|x|^{n+1}}\, dH^{n-1} = (\psi(r))'$$

Sia $r>0$ un punto di differenziabilità di ψ.

$$-\frac{B_\varepsilon}{r^n} = \frac{1}{r^n}\int_{\partial^* E\cap\{1-\varepsilon<\frac{|x|}{r}<1\}} \frac{|x|}{r}\,\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\langle x,\nu_E\rangle^2}{|x|^2}\, dH^{n-1}$$

$$= \frac{1}{r\varepsilon}\int_{\partial^* E\cap(B_r/\overline{B}_{r(1-\varepsilon)})} \frac{\langle x,\nu_E\rangle^2}{r^n |x|}\, dH^{n-1}$$

e quindi

$$-\frac{B_\varepsilon}{r^n} \leq \frac{1}{r\varepsilon} \int_{\partial^* E \cap (B_r / \overline{B}_{r(1-\varepsilon)})} \frac{\langle x, \nu_E \rangle^2}{|x|^{n+1}} \, dH^{n-1} \overset{q.o.r}{=}$$

$$= \frac{1}{r\varepsilon} \int_{\partial^* E \cap (B_r / B_{r(1-\varepsilon)})} \dots \, dH^{n-1}$$

$$= \frac{\psi(r) - \psi(r - r\varepsilon)}{r\varepsilon}$$

$$-\frac{B_\varepsilon}{r^n} \geq \frac{1}{r\varepsilon} \int_{\partial^* E \cap (B_r / \overline{B}_{r(1-\varepsilon)})} (1-\varepsilon)^n \frac{\langle x, \nu_E \rangle^2}{|x|^{n+1}} \, dH^{n-1} =$$

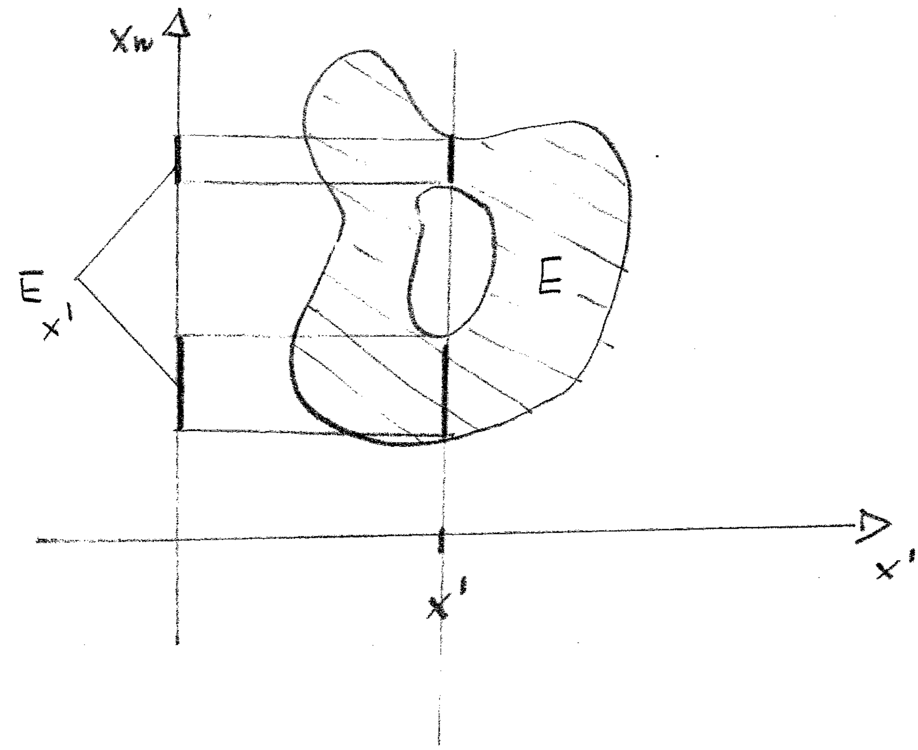
$$\overset{q.o.}{=} (1-\varepsilon)^n \frac{\psi(r) - \psi(r - r\varepsilon)}{r\varepsilon}$$

SIMMETRIZZAZIONE DI STEINER

Coordinate in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Per $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ definiamo le sezioni:

$$E_{x'} = \{ x_n \in \mathbb{R} : (x', x_n) \in E \}$$



Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile con $\mathcal{L}^n(E) < \infty$.

Definiamo la funzione $\vartheta : \mathbb{R}^{n-1} \to [0, \infty)$

$$\vartheta(x') = \begin{cases} \mathcal{L}^1(E_{x'}) & \text{se } \mathcal{L}^1(E_{x'}) < \infty \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Fubini - Tonelli $\Rightarrow$ $\vartheta \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$.

<u>DEFINIZIONE</u> Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile con $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, l'insieme

$$E^* = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_n| < \frac{1}{2} \vartheta(x') \right\}$$

si chiama riarrangiamento di Steiner di E.

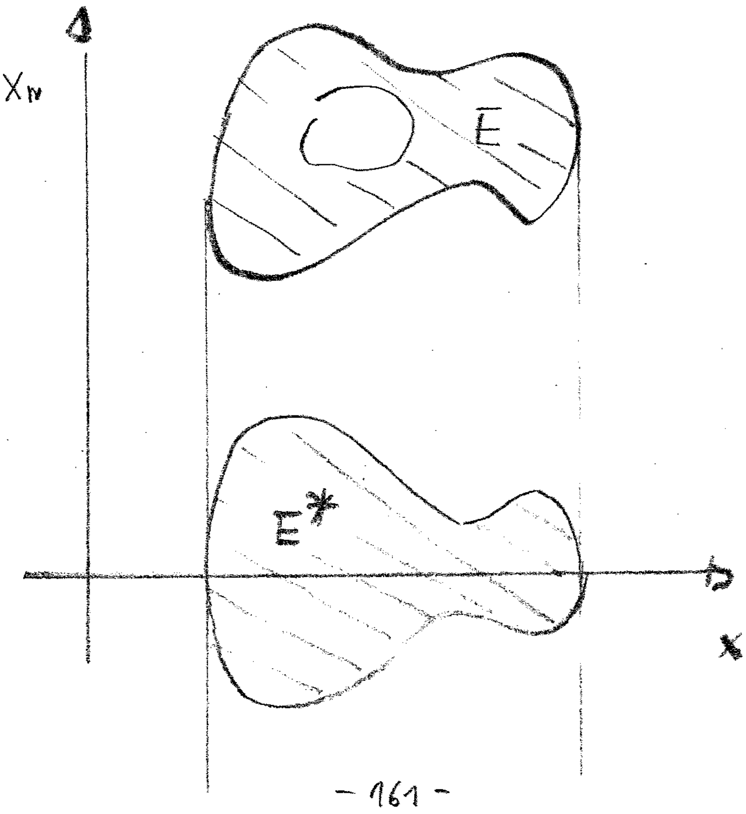
<u>OSSERVAZIONI</u>

(1) E^* è $\mathcal{L}^n$-misurabile ed $\mathcal{L}^n(E^*) = \mathcal{L}^n(E)$.

(2) E^* è x_n-simmetrico:

$$(x', x_n) \in E^* \iff (x', -x_n) \in E^*.$$

(3) E^* è x_n-normale, ovvero gli insiemi $E_{x'} \subset \mathbb{R}$ sono intervalli.



ESERCIZIO Provare che $\operatorname{diam}(E^*) \le \operatorname{diam}(E)$.

Proveremo il seguente teorema.

TEOREMA Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile con misura finita. Allora:

$$P(E^*) \le P(E).$$

Inoltre, se $P(E^*) = P(E)$ allora E è equivalente ad un insieme x_n-normale.

Dim. Per $i = 1, \dots, n$ ed $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto definiamo i perimetri parziali:

$$P_i(E; A) = \sup \left\{ \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx : \varphi \in C_c^1(A), \ \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\}$$

Esistono $\mu_1, \dots, \mu_n$ misure di Borel finite su $\mathbb{R}^{n-1}$ tali che per ogni $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto si abbia

$$\mu_i(A) = P_i(E; A \times \mathbb{R}), \quad i = 1 \dots n.$$

In modo analogo esistono misure di Borel μ_i^*, $i=1,\dots,n$, tali che

$$\mu_i^*(A) = P_i(E^*; A\times\mathbb{R})$$

con $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto.

<u>CLAIM</u>: $\mu_i^*(A) \leq \mu_i(A)$ $\forall i = 1,\dots,n$
$\forall A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto.

Partiamo dal caso $i=n$. Abbiamo:

$$\mu_n(A) = P_n(E; A\times\mathbb{R}) \leq P(E; A\times\mathbb{R}^n) \leq$$
$$\leq P(E;\mathbb{R}^n) < \infty$$

Possiamo supporre

Poi si ha:

$$\mu_n(A) = \sup_{\substack{\varphi\in C_c^1(A\times\mathbb{R})\\ |\varphi|\leq 1}} \int_{(A\times\mathbb{R})\cap E} \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',x_n)\,dx \quad (*)$$

$$= \sup_{\prime\prime} \int_A \int_{E_{x'}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',x_n)\,dx_n\,dx' \geq$$

$$\overset{(*)}{\underset{(=)}{\geq}} \int_A \left(\sup_{\substack{\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}) \\ |\varphi| \leq 1}} \int_{E_{x'}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_n)\, dx_n \right) dx',$$

<u>ESERCIZIO</u> Provare la disuguaglianza $(*)$ (e dedurre quindi che è un $=$).

Fare così:

(1) Provare $(*)$ quando χ_E è sostituita da $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

(2) Approssimare χ_E con funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e passare al limite.

Ora affermiamo che per $\mathcal{L}^{n-1}$-q.o. $x' \in A$ si ha

$$\underbrace{\sup_{\substack{\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}) \\ |\varphi| \leq 1}} \int_{E_{x'}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_n)\, dx_n}_{= P(E_{x'})} \overset{(**)}{\geq} \underbrace{\sup_{\substack{\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}) \\ |\varphi| \leq 1}} \int_{E^*_{x'}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_n)\, dx_n}_{= P(E^*_{x'})} .$$

Da (*) e (**) segue che $\mu_n(A) \geq \mu_n^*(A)$.

Proviamo (**). Per $\mathcal{L}^{n-1}$-q.o. $x' \in A$ si ha

$$\mathcal{L}^1(E_{x'}) < \infty \quad e$$
$$P(E_{x'}) < \infty .$$

Quindi (ESERCIZIO) $E_{x'}$ è equivalente ad una unione finita di intervalli:

$$E_{x'} = \bigcup_{j=1}^{K} (a_j', b_j') \subset \mathbb{R}$$

con $K \geq 0$ e dunque $P(E_{x'}) = 2K$.

Se $\mathcal{L}^1(E_{x'}) > 0$ deve essere $K \geq 1$.

In questo caso $P(E^*_{x'}) = 2$ (altrimenti $= 0$).

Questo prova (**).

Ora proviamo il CLAIM quando $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Abbiamo

$$\mu_i(A) = P_i(E; A\times\mathbb{R}) = \sup_{\substack{\varphi\in C^1_c(A\times\mathbb{R})\\ \|\varphi\|_\infty\le 1}} \int_E \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx$$

$$\geq \sup_{\substack{\varphi\in C^1_c(A)\\ \|\varphi\|_\infty\le 1}} \int_A \vartheta(x')\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x')\,dx', = (\blacksquare)$$

dove $\vartheta(x') = \mathcal{L}^1(E_{x'})$. Deduciamo in particolare che $\vartheta\in BV(A)$. Supponendo per un attimo che $\vartheta\in C^1(A)$ si trova:

$$(\blacksquare) = \int_A \left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}(x')\right| dx' = \text{[Formula di Coarea]}$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{A\cap\partial\{\vartheta>t\}} d\lambda_i\right) dt \qquad \lambda_i = \text{misura perimetro parziale } i\text{-esimo}$$

$$= \int_0^\infty \left(\sup_{\substack{\varphi\in C^1_c(A)\\ \|\varphi\|_\infty\le 1}} \int_{\{x'\in\mathbb{R}^{n-1}:\,\vartheta(x')>t\}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x')\,dx'\right) dt$$

Questi passaggi possono essere "formalizzati" quando $\vartheta\in BV(A)$. Deduciamo che $(t = 2x_n)$

$$(\blacksquare) \geq 2 \sup_{\substack{\varphi \in C^1_c(A) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}} \int_0^\infty \int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \frac{1}{2}\vartheta(x') > x_n\}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n)\, dx'\, dx_n$$

$$= 2\, P_i(E^*; A \times (0,\infty)) = P_i(E^*; A \times \mathbb{R})$$

$$= \mu_i^*(A).$$

Questo termina la prova del Claim.

Per terminare la dimostrazione abbiamo bisogno del seguente fatto.

Sia $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ una misura di Borel in $\mathbb{R}^{n-1}$ a valori in $\mathbb{R}^n$. La variazione totale $|\mu|$ di μ è la misura di Borel

$$|\mu|(A) = \sup \Big\{ \sum_{k=1}^\infty |\mu(A_k)| \; : \; A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \Big\}.$$

$A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di Borel $\qquad A_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di Borel

<u>ESERCIZIO</u> Provare che nel nostro caso si ha

$$|\mu|(\mathbb{R}^{n-1}) = P(E).$$

Siccome nel nostro caso $\mu^* \leq \mu$ per componenti si deduce che

$$P(E^*) = |\mu^*|(\mathbb{R}^{n-1}) \leq |\mu|(\mathbb{R}^{n-1}) = P(E).$$

Supponiamo ora che sia $P(E^*) = P(E)$.

Allora:

$$|\mu^*|(\mathbb{R}^{n-1}) = |\mu|(\mathbb{R}^{n-1}) \overset{\text{(facile)}}{\Longrightarrow} |\mu^*|(A) = |\mu|(A) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ Borel}$$

ESERCIZIO (Usare Radon-Nycodim) $\Downarrow$

$$\mu^* = \mu$$

In particolare $\mu^*_n = \mu_n$ e quindi

$$P(E^*_{x'}) = 2 \Longrightarrow P(E_{x'}) = 2$$

per $\mathcal{L}^{n-1}$-q.o. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Ovvero: E è equivalente ad un insieme x_n-normale.

$\square$

TEOREMA ISOPERIMETRICO

Consideriamo il problema di trovare l'insieme di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, che ha frontiera di area minima per volume racchiuso fissato:

$$\min \{ P(E) \; ; \; E \subset \mathbb{R}^n \; \mathcal{L}^n\text{-misurabile con } \mathcal{L}^n(E) = 1 \}.$$

Siccome $\mathcal{L}^n(\lambda E) = \lambda^n \mathcal{L}^n(E)$ e $P(\lambda E) = \lambda^{n-1} P(E)$, determinare il minimo precedente è equivalente a determinare

$$\min \left\{ \frac{P(E)}{\mathcal{L}^n(E)^{\frac{n-1}{n}}} \; ; \; E \subset \mathbb{R}^n \; \mathcal{L}^n\text{-mis. con } 0 < \mathcal{L}^n(E) < \infty \right\}.$$

TEOREMA Il minimo è raggiunto. Gli insiemi minimi sono esattamente le palle Euclidee (a meno di misura nulla).

Una formulazione più precisa del teorema è la seguente.

TEOREMA Sia $n \geq 2$. Per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile si ha

$$\min \{ \mathcal{L}^n(E), \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) \} \leq c_n \, P(E)^{\frac{n}{n-1}}, \qquad (*)$$

dove $\mathcal{L}^n(B) = c_n \, P(B)^{\frac{n}{n-1}}$ con $B \subset \mathbb{R}^n$ palla.
L'uguaglianza in $(*)$ implica che E oppure $\mathbb{R}^n \setminus E$ è una palla.

F è normale rispetto ad ogni iperpiano di $\mathbb{R}^n$ che passa per $0 \in \mathbb{R}^n$.

Qui F è un insieme convesso e dunque

$$F = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ f_1(x') < x_n < f_2(x') , \ x' \in D \}$$

con $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ convesso ed $f_1, -f_2 : D \to \mathbb{R}$ funzioni convesse. Inoltre

$$F^* = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x_n| < \frac{1}{2} (f_2(x') - f_1(x')) \}.$$

Dato un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ con $A \subset\subset \operatorname{int}(D)$, Per la Formula dell' Area:

$$P(F; A \times \mathbb{R}) = \int_A (\sqrt{1+|\nabla f_1|^2} + \sqrt{1+|\nabla f_2|^2}) \, dx',$$

$$P(F^*; A \times \mathbb{R}) = 2 \int_A \sqrt{1 + \frac{1}{4} |\nabla (f_2 - f_1)|^2} \, dx'.$$

Dal fatto che $P(F; A \times \mathbb{R}) = P(F^*; A \times \mathbb{R})$ si deduce (Teor. Differenziazione di Lebesgue) che in q.o. punto di D vale

$$\sqrt{1+|\nabla f_1|^2} + \sqrt{1+|\nabla f_2|^2} = 2 \sqrt{1 + \frac{1}{4} |\nabla f_2 - \nabla f_1|^2}$$

che è equivalente a

$$\sqrt{1+|\nabla f_1|^2} \sqrt{1+|\nabla f_2|^2} = \langle (1, \nabla f_1), (1, -\nabla f_2) \rangle$$

che implica $\nabla f_1 = -\nabla f_2$ q.o. in D.

DIM. Si parte da questo fatto, che non dimostriamo.
Per $n \geq 2$ vale:

$$P(E) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^n(E) < \infty \quad \text{oppure} \quad \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) < \infty.$$

Supponiamo dunque $\mathcal{L}^n(E) < \infty$.
Supponiamo anche che E sia limitato. Fissiamo $k > 0$ tale che $E \subset B_k(0)$ e consideriamo la famiglia di insiemi

$$\mathcal{F} = \{ F \subset \overline{B_k(0)} \; ; \; F \text{ è } \mathcal{L}^n\text{-misurabile e } \mathcal{L}^n(F) = \mathcal{L}^n(E) \}.$$

Fissiamo su $\mathcal{F}$ la topologia L^1 delle funzioni caratteristiche. Per il Teorema di immersione compatta di $BV(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato regolare e per la semicontinuità inferiore del perimetro per la convergenza L^1 esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che

$$P(F) = \min \{ P(G) \; ; \; G \in \mathcal{F} \}.$$

Sia F^* il riarrangiamento di Steiner di F in x_n.
Allora si ha ancora $F^* \in \mathcal{F}$ e inoltre $P(F^*) \leq P(F)$.
Dalla minimalità segue che $P(F^*) = P(F)$.
Quindi: F è x_n-normale.
Siccome la scelta del sistema di coordinate è arbitraria:

Segue che $f_1 + f_2$ è costante in D e quindi a meno di una traslazione in x_n possiamo supporre che

$$f_1 + f_2 = 0 \quad \text{in} \quad D.$$

Conclusione: A meno di una traslazione F è simmetrico e normale rispetto ad ogni iperpiano di $\mathbb{R}^n$ passante per $0 \in \mathbb{R}^n$.

Dunque: F è una palla.

Abbiamo finito la dimostrazione (nel caso E limitato):

$$\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(F) = C_n \, P(F)^{\frac{n}{n-1}} \leq C_n \, P(E)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Inoltre se c'è un $=$ allora E è una palla.

Caso E NON limitato: lasciato al lettore. Considerare $E \cap B_r$ con r opportuno. $\square$

Let $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ be a $\mathcal{L}^n$-measurable function such that for all $t>0$ we have

$$\mathcal{L}^n(E_t) < \infty, \quad \text{with} \quad E_t = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ f(x) > t\}.$$

We have the following representation for f:

$$f(x) = \int_0^{f(x)} dt = \int_0^\infty \chi_{(0,f(x))}(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \chi_{E_t}(x)\, dt .$$

In fact, $\chi_{E_t}(x) = 1 \iff \chi_{(0,f(x))}(t) = 1.$

For any $t>0$ let

$$E_t^* = B_r(0) \quad \text{with} \quad r>0$$

such that $\mathcal{L}^n(B_r(0)) = \mathcal{L}^n(E_t).$

By the isoperimetric inequality

$$\|\partial E_t^*\|(\mathbb{R}^n) \leq \|\partial E_t\|(\mathbb{R}^n).$$

We define a function $f^* : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ letting

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{E_t^*}(x)\, dt.$$

We call f^* the Schwarz rearrangement of f.

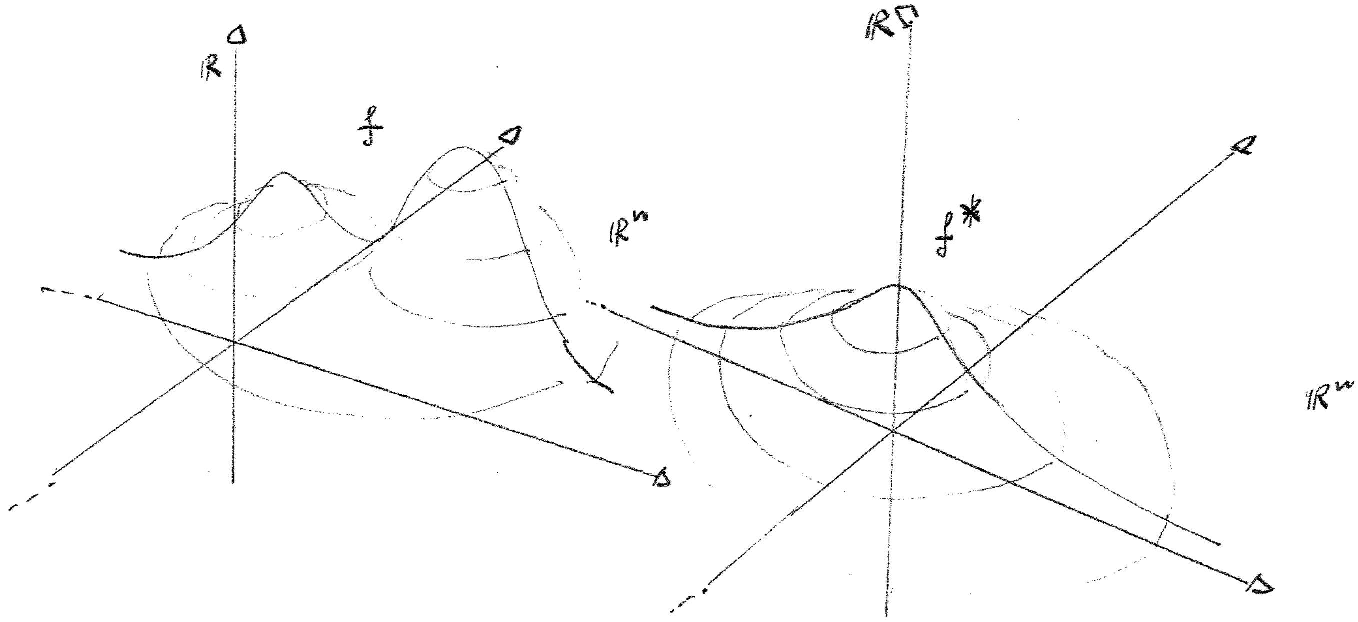
Elementary properties:

(1) f^* is $\mathcal{L}^n$-measurable;

(2) $f^*(x) = \varphi(|x|)$, $|x|>0$, for some $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$;

(3) φ is decreasing.

(4) $E_t^* = \{ f^* > t \}$.



Comment:

(1) $f \in C^1 \not\Rightarrow f^* \in C^1$

(2) $f \in BV(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f^* \in BV(\mathbb{R}^n)$ (not easy)

(3) $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (not easy).
$(p>1)$

<u>Remark</u> For any $p \geq 1$ we have

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f^*(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx .$$

Proof :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{f(x)^p} dt \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{(0, f(x)^p)}(t) \, dt \, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_{\{f(x)^p > t\}} dx \quad dt = \int_0^\infty \mathcal{L}^n \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t^{1/p}\} \, dt$$

$$= \int_0^\infty \mathcal{L}^n \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t^{1/p}\} \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)^p \, dx .$$

<u>Proposition</u> Let $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, be rearrangeable. Then

$$\mathrm{Lip}(f^*) \leq \mathrm{Lip}(f).$$

Proof. Assume $\left| f(x) - f(y) \right| \leq L|x-y|$ for all $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Let $x, y \in \mathbb{R}^n$ and let

$$t_1 = f^*(x),$$
$$t_2 = f^*(y) .$$

We may assume that $t_1 > t_2 (\geq 0)$. Let $\varepsilon > 0$ be such that

$$2\varepsilon < t_1 - t_2 .$$

Then we have

$$x \in \{f^* > t_1 - \varepsilon\} = \{f > t_1 - \varepsilon\}^* = B_{r_1}$$

$$y \notin \{f^* > t_2 + \varepsilon\} = \{f > t_2 + \varepsilon\}^* = B_{r_2}$$

for suitable $r_2 \geq r_1 \geq 0$. We deduce that

$$|x - y| \geq r_2 - r_1 .$$

Let
$$E_1 = \{f > t_1 - \varepsilon\},$$
$$E_2 = \{f > t_2 + \varepsilon\}.$$

Because $2\varepsilon < t_1 - t_2$, we infer that $E_1 \subset E_2$ and

$$\mathcal{L}^n(E_1) = \mathcal{L}^n(B_{r_1}),$$
$$\mathcal{L}^n(E_2) = \mathcal{L}^n(B_{r_2}).$$

Consider the number
$$r = \operatorname{dist}(\bar{E}_1, \partial \bar{E}_2) = \inf_{\substack{\bar{x} \in \bar{E}_1 \\ \bar{y} \in \partial \bar{E}_2}} |\bar{x} - \bar{y}|,$$

Using the inclusion

$$E_1 + rB \subset \bar{E}_2,$$

we obtain

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}^n(B_{r_2}) = \mathcal{L}^n(\bar{E}_2) \geq \mathcal{L}^n(E_1 + rB) \geq \\ \quad \| \\ r_2^n \, \mathcal{L}^n(B) \end{array}$$

$$\geqslant \left(\mathcal{L}^n(E_1)^{\frac{1}{n}} + \mathcal{L}^n(rB)^{\frac{1}{n}} \right)^n = \left(\mathcal{L}^n(B_{r_1})^{\frac{1}{n}} + \mathcal{L}^n(B_r)^{\frac{1}{n}} \right)^n =$$

$$= (r_1 + r)^n \, \mathcal{L}^n(B).$$

The conclusion is $\quad r_2 \geqslant r_1 + r$, that is

$$r \leqslant r_2 - r_1 \leqslant |x-y|.$$

Take $\bar{x} \in E_1$ and $\bar{y} \in \partial E_2$ such that

$$|\bar{x} - \bar{y}| \leq r + \varepsilon.$$

In particular,

$$f(\bar{x}) > t_1 - \varepsilon,$$

$$f(\bar{y}) \underset{(=)}{\leq} t_2 + \varepsilon$$

Thus

$$\left| f^*(x) - f^*(y) \right| = |t_1 - t_2| = t_1 - t_2 < f(\bar{x}) + \varepsilon - f(\bar{y}) + \varepsilon \leq$$

$$\leq L\,|\bar{x} - \bar{y}| + 2\varepsilon \leq L\,(r+\varepsilon) + 2\varepsilon \leq L\,(|x-y| + \varepsilon) + 2\varepsilon,$$

Letting $\varepsilon \downarrow 0$ we obtain $\quad \left| f^*(x) - f^*(y) \right| \leq L\,|x-y|.$

$\square$

<u>THEOREM</u> Let $p\geq 1$. For any $f\in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$ we have

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p \, dx .$$

Proof. We assume w.l.o.g. $f\geq 0$. We know that $f^*\in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$.

Case $p=1$. By the Coarea Formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx = \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)>t\})\, dt .$$

Let

$$E_t = \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)>t\}, \qquad t>0$$

$$E_t^* = \{x\in\mathbb{R}^n ; f^*(x)>t\} . \quad \nwarrow \text{Ball}$$

We know that

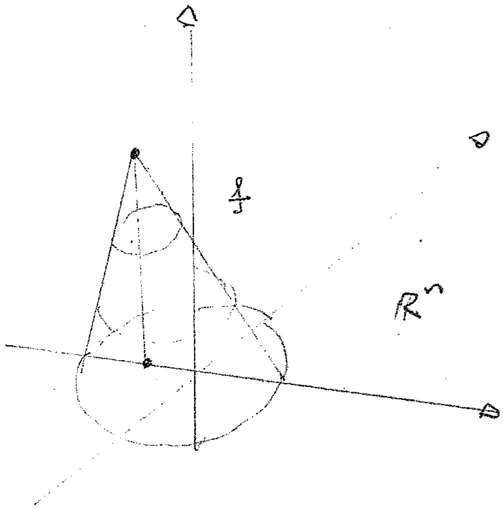
$$\mathcal{L}^n(E_t) = \mathcal{L}^n(E_t^*)$$

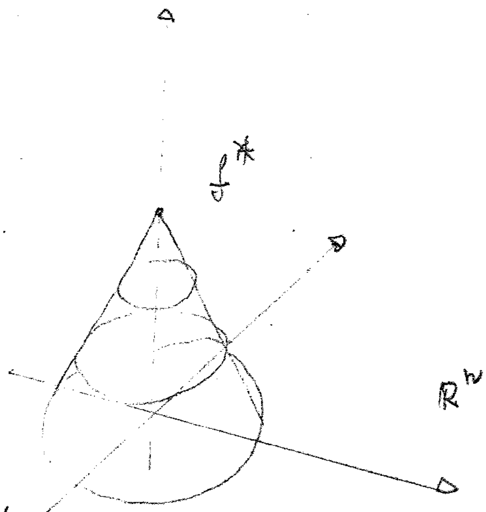
$$\|\partial E_t\|(\mathbb{R}^n) \geq \|\partial E_t^*\|(\mathbb{R}^n).$$

It follows that

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|dx = \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial\{f>t\})dt \overset{\circledast}{\geq} \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial\{f^*>t\})\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*|dx.$$

Remark. We have equality in $\circledast$ if and only if $E_t\subset\mathbb{R}^n$ is a ball for a.e. $t>0$. These balls however need not be centered at 0 (need not have all the same center)





In this case: $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*|$ but f is not radially symmetric.

Case $p > 1$. In this case, the Coarea Formula gives:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p \, dx = \int_0^\infty \int_{\underbrace{\partial\{f>t\}}_{= \partial E_t}} |\nabla f(x)|^{p-1} \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \, dt .$$

We need some preliminary observations. Notice that

$$\mathcal{L}^n(E_t) = \int_{E_t} \frac{1}{|\nabla f|} |\nabla f| \, dx$$

$$= \int_t^\infty \int_{\partial E_s} \frac{1}{|\nabla f|} \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \, ds$$

$$\mathcal{L}^n(E_t^*) = \int_t^\infty \int_{\partial E_s^*} \frac{1}{|\nabla f^*|} \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \, ds$$

$$= \int_t^\infty \underset{(\text{on } \partial E_s^*)}{\frac{1}{|\nabla f^*|}} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_s^*) \, ds$$

In fact, $|\nabla f^*|$ is constant on the spheres ∂E_s^*:

$$\left|\nabla f^*(x)\right| = \left|\varphi'(|x|)\frac{x}{|x|}\right| = |\varphi'(|x|)|.$$

$$f^*(x) = \varphi(|x|)$$

Differentiating the identity $\mathcal{L}^n(E_t) = \mathcal{L}^n(E_t^*)$ we obtain:

$$\int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|}\, dH^{n-1} = \frac{1}{|\nabla f^*|} H^{n-1}(\partial E_t^*),$$

for a.e. $t>0$.

A second observation is the following:

$$H^{n-1}(\partial E_t) = \int_{\partial E_t} dH^{n-1} = \int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|^{\frac{1}{p'}}} \cdot |\nabla f|^{\frac{1}{p'}}\, dH^{n-1} \leq$$

$$\overset{\text{Hölder Inequality}}{\leq} \left(\int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|}\, dH^{n-1}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\partial E_t} |\nabla f|^{\frac{p}{p'}}\, dH^{n-1}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|}\, dH^{n-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\partial E_t} |\nabla f|^{p-1}\, dH^{n-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Recall that $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 \iff p' = \frac{p}{p-1}$.

We deduce the inequality

$$\int_{\partial E_t} |\nabla f|^{p-1} \, dH^{n-1} \geqslant H^{n-1}(\partial E_t)^p \left(\int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|} \, dH^{n-1} \right)^{1-p} \geqslant$$

$$\geq H^{n-1}(\partial E_t)^p \, |\nabla f^*|^{p-1} \, H^{n-1}(\partial E_t^*)^{1-p}$$ Isop. inequality

$$\geqslant |\nabla f^*|^{p-1} \, H^{n-1}(\partial E_t^*) =$$

$$= \int_{\partial E_t^*} |\nabla f^*|^{p-1} \, dH^{n-1} .$$

Integrating on $(0,\infty)$ we obtain the claim:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p \, dx = \int_0^\infty \int_{\partial E_t} |\nabla f|^{p-1} \, dH^{n-1} \, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^\infty \int_{\partial E_t^*} |\nabla f^*|^{p-1} \, dH^{n-1} \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*|^p \, dx .$$

□

FORMULA DI COAREA. UN CASO MODELLO

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto ed $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Allora

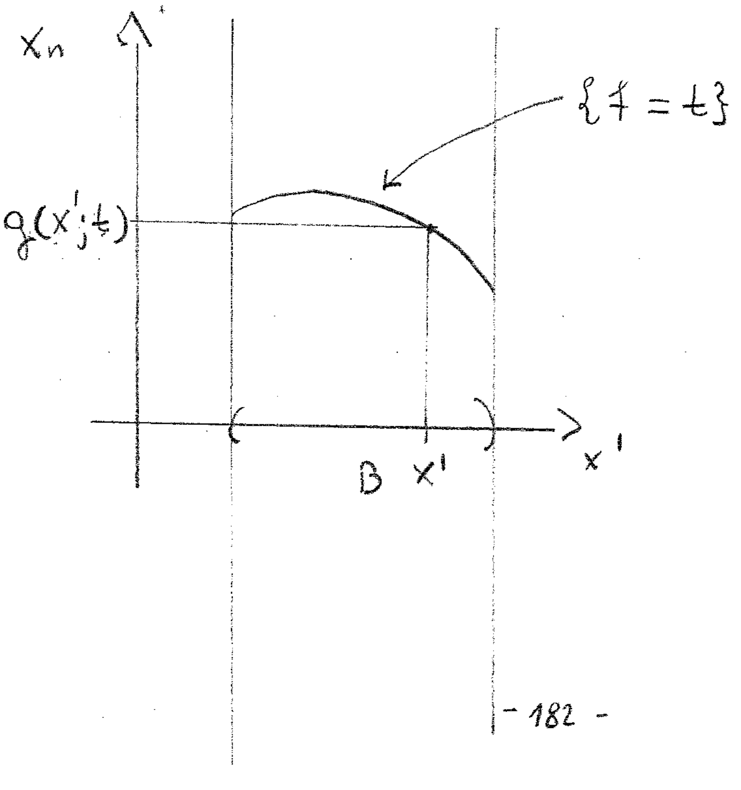
$$\int_A |\nabla f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\{x \in A : f(x) > t\})\,dt.$$

É una variante "curvilinea" del teorema di Fubini-Tonelli.

Dimostriamo il teorema nella seguente situazione modello:

$$A = B \times \mathbb{R} \qquad \text{con} \quad B \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto}$$

$$f \in C^1(B \times \mathbb{R}) \qquad \text{con} \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0 \text{ su } B \times \mathbb{R}.$$



Per il Teorema della funzione implicita l'insieme

$$\{x \in B \times \mathbb{R} \, ; \, f(x) = t\} \text{ è il grafico di una funzione } g(x';t)$$

Precisamente

$$\{f = t\} = \{(x', g(x';t)) \in \mathbb{R}^n ; \; x' \in B\}$$

con $g(\cdot\,;t) \in C^1(B)$. Inoltre

$$f(x', g(x';t)) \equiv t$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x', g(x';t)) \, \dfrac{\partial g}{\partial t}(x';t) = 1 \\[2ex] \nabla_{x'} f(x', g(x';t)) + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x', g(x';t)) \, \nabla_{x'} g(x';t) = 0 \end{cases}$$

In particolare

$$|\nabla f(x', g)| = \left(|\nabla_{x'} f(x', g)|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', g) \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', g) \right| \left(1 + |\nabla_{x'} g(x';t)|^2 \right)^{1/2}.$$

Con il cambio di variabile $x = G(\xi,t) := (\xi, g(\xi;t))$

con $\xi \in B$ si trova

$$\int_{B\times\mathbb{R}} |\nabla f(x)|\,dx = \int_{B\times\mathbb{R}} |\nabla f(\xi, g(\xi,t))| \left| \frac{\partial g}{\partial t}(\xi;t) \right| d\xi\,dt$$

Fubini-Tonelli

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{B} \sqrt{1+|\nabla_\xi g(\xi;t)|^2}\, d\xi\,dt$$

Formula Area

$$= \int_{\mathbb{R}} H^{n-1}(\{x\in B\times\mathbb{R} \,;\, f(x)=t\})\,dt \,,$$

$\square$

Γ - CONVERGENZA

1) RILASSAMENTO

2) Γ- LIMITI

3) CONVERGENZA DEI MINIMI E DEI VALORI MINIMI

1) Rilassamento.

(X,τ) spazio topologico

$$\mathcal{I}(x) = \{ U \subset X : U \text{ intorno di } x \}, \quad x \in X$$

DEF (Semicontinuità inferiore) Una funzione $F : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ è semicontinua inferiormente su X (sci) se per ogni $x \in X$ si ha

$$F(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{I}(x)} \inf_{y \in U} F(y).$$

COMMENTI

1) É equivalente richiedere: $F(x) = \sup\limits_{U \in \mathcal{I}(x)} \inf\limits_{y \in U} F(y)$.

2) Se X è uno Spazio Metrico (oppure uno

spazio topologico N_I) allora F è sci se $\forall x \in X$ e per ogni $x_h \xrightarrow[h\to\infty]{} x$ si ha

$$F(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h).$$

<u>DEF (Inviluppo semicontinuo inferiore)</u> Data $F: X \to (-\infty, \infty]$ chiamiamo la funzione $F^{sci}: X \to [-\infty, \infty]$

$$F^{sci}(x) = \sup_{U \in I(x)} \inf_{y \in U} F(y)$$

l'inviluppo semicontinuo inferiore di F.

<u>COMMENTI</u>

1) $F^{sci}(x) = \sup \left\{ G(x) \;;\; \underset{G \text{ sci}}{G: X \to [-\infty, \infty]}, \; G \leq F \right\}$

2) Negli Spazi Metrici:

$$F^{sci}(x) = \inf \left\{ \liminf_{h \to \infty} F(x_h) \;;\; x_h \xrightarrow[h\to\infty]{} x \right\}.$$

3) F^{sci} è sci su X.

2) Γ-limiti

(X, τ) Spazio Topologico

$F_h : X \to (-\infty, \infty]$, $h \in \mathbb{N}$

<u>DEFINIZIONE</u> Definiamo le funzioni $F^-, F^+ : X \to [-\infty, \infty]$

$$F^-(x) = \Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h(x) = \sup_{U \in \mathcal{I}(x)} \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y),$$

$$F^+(x) = \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h(x) = \sup_{U \in \mathcal{I}(x)} \limsup_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y),$$

per $x \in X$. Se $F^- = F^+ = F$ diremo che esiste il Γ-limite

$$F(x) = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h(x), \quad x \in X.$$

Negli spazi metrici il Γ-limite si descrive in modo sequenziale.

<u>TEOREMA</u> Sia (X, d) uno spazio metrico, $F, F_h : X \to (-\infty, \infty]$ con $h \in \mathbb{N}$. Sono equivalenti:

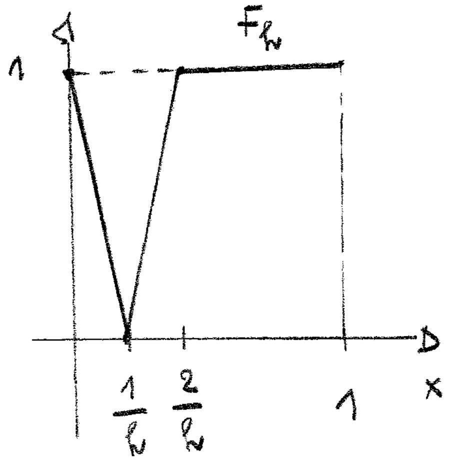
A) $F = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h$;

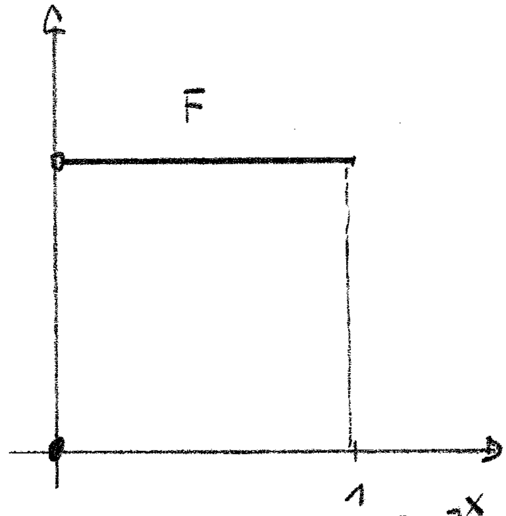
B) i) $\forall x \in X$ e $\forall\, x_h \xrightarrow[h\to\infty]{} x$: $F(x) \leq \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h)$;

ii) $\forall x \in X \;\exists\; x_h \xrightarrow[h\to\infty]{} x$: $F(x) \geq \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h)$.

Non proveremo il teorema e useremo B) come definizione di Γ-limite negli spazi metrici.

<u>ESEMPIO</u> Siano $F, F_h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ le funzioni in figura:





$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Allora si ha

$$F = \Gamma\text{-}\lim_{h \to \infty} F_h .$$

Controlliamo i) e ii) nel punto $x = 0$:

i) $0 = F(0) \leq \liminf_{h \to \infty} \underbrace{F_h(x_h)}_{\substack{\vee\! / \\ 0}} \qquad \forall x_h \to 0$

ii) Esiste $x_h \to 0$ tale che $0 = F(0) \geq \limsup_{h \to \infty} F_h(x_h)$.

Basta scegliere $x_h = \frac{1}{h}$.

$\square$

3) Convergenza dei minimi.

(X,d) Spazio Metrico

$F, F_h : X \to (-\infty, \infty]$, $h \in \mathbb{N}$

<u>LEMMA</u> $F = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h$ è sci su X.

DIM. Siano $x \in X$ e $x_h \to x$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste $x_{k,h} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_h$ tale che

$$F(x_h) \geq \limsup_{k\to\infty} F_k(x_{k,h})$$

e quindi $\forall h \; \exists k_h$ tale che

$$F(x_h) \geq F_k(x_{k,h}) - \frac{1}{h}, \qquad \forall k \geq k_h .$$

$$|x_{k,h} - x_h| < \frac{1}{h},$$

Dunque, con $k = k_h$

$$\liminf_{h\to\infty} F(x_h) \geq \liminf_{h\to\infty} F_{k_h}(x_{k_h,h}) \geq F(x)$$

in quanto $x_{k_h,h} \to x$,

$\square$

TEOREMA Sia X compatto e sia $F_h \geq C > -\infty$ $\forall h$. Se esiste $F = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h$ allora F ha minimo su X e inoltre

$$\min_X F = \lim_{h\to\infty} \inf_X F_h .$$

DIM. Dall'ipotesi $F_h \geq C > -\infty$ deduciamo che $F(x) > -\infty$ per ogni $x \in X$. Siccome F è sci su X, possiede minimo; esiste $x_0 \in X$ tale che

$$F(x_0) = \min_{x\in X} F(x) .$$

Esiste $x_h \to x_0$ tale che

$$(1) \qquad F(x_0) \geq \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h) \geq \limsup_{h\to\infty} \inf_X F_h ,$$

D'altra parte esiste $x_h \in X$ tale che

$$a_h = F_h(x_h) \leq \inf_X F_h + \frac{1}{h} .$$

Affermiamo che per ogni s.s. $(a_{h_k})_{k\in\mathbb{N}}$ esiste una ulteriore s.s. $(a_{h_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tale che

$$F(x_0) \leq \liminf_{j\to\infty} a_{h_{k_j}} . \qquad (*)$$

Siccome X è compatto, la successione $(x_{h_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente

$$x_{h_{k_j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} \bar{x} \in X .$$

Siccome $F = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h$ si ha

$F(x_0) \leq F(\bar{x}) \leq \liminf_{j\to\infty} F_{h_{k_j}}(x_{h_{k_j}})$. Questo prova (*).

Dalla affermazione in "}" segue che

(2) $\qquad F(x_0) \leq \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h) \leq \liminf_{h\to\infty} \inf_X F_h$.

Da (1) e (2) deriva la tesi:

$$F(x_0) = \lim_{h\to\infty} \inf_X F_h .$$

$\square$

<u>TEOREMA</u> Sia (X,d) uno spazio metrico e siano $F, F_h : X \to (-\infty,\infty]$ funzioni tali che $F = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h$.

Supponiamo esistano punti $x, x_h \in X$ tali che

i) $F_h(x_h) = \min_X F_h$;

ii) $x_h \xrightarrow[h\to\infty]{} x$.

Allora si ha $F(x) = \min_X F$.

DIM. Da un lato si ha:

$$F(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F_h(x_h) = \liminf_{h \to \infty} \min_X F_h .$$

D'altra parte, per ogni $y \in X$ esiste $y_h \to y$ tale che

$$F(y) \geq \limsup_{h \to \infty} F_h(y_h) \geq \limsup_{h \to \infty} \min_X F_h \geq$$

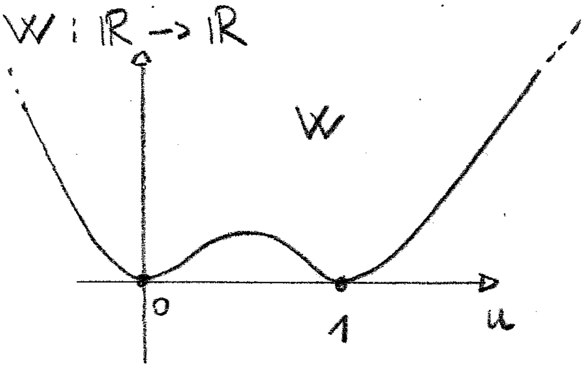
$$\geq \liminf_{h \to \infty} F_h(x_h) \geq F(x).$$

$\square$

FUNZIONALE DI MODICA - MORTOLA

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un insieme aperto.
Consideriamo il "potenziale" $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$W(u) = u^2(1-u)^2$$



Fissiamo $0 < V < \mathcal{L}^n(\Omega)$.
Consideriamo il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_\Omega W(u(x))\,dx \ ; \ u \in L^1(\Omega),\ \|u\|_1 = V \right\}.$$

Vogliamo separare la fase 0 (olio) dalla fase 1 (acqua).
Le soluzioni sono della forma $u = \chi_E$ con $\mathcal{L}^n(E) = V$.
Ci sono troppe soluzioni. Occorre un criterio di selezione.

Sia $\varepsilon > 0$ un parametro. Definiamo $F_\varepsilon : L^1(\Omega) \to [0,\infty]$

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left\{ \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right\} dx & \text{se } u \in H^1(\Omega) \\ \infty & \text{se } u \in L^1(\Omega) \setminus H^1(\Omega). \end{cases}$$

Ricordiamo che $H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \ ; \ |\nabla u| \in L^2(\Omega) \}$.

(Eventualmente: $F_\varepsilon(u) = \infty$ se $\|u\|_{L^1} \neq V$)

Poi definiamo $F : L^1(\Omega) \longrightarrow [0,\infty]$

$$F(u) = \begin{cases} 2\alpha\, P(E;\Omega) & \text{se} \quad u = \chi_E, \\ \infty & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

dove

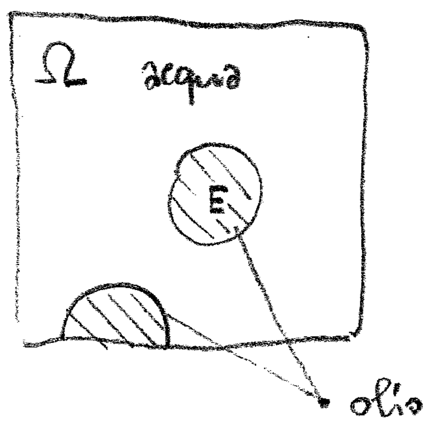
$$\alpha = \int_0^1 \sqrt{W(u)}\, du = \frac{1}{6}.$$

(Eventualmente: $F(u) = \infty$ se $\mathcal{L}^n(E) \neq V$)

<u>TEOREMA</u> Si ha $F = \Gamma\text{-}\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon$ in $L^1(\Omega)$.

<u>COMMENTO</u> I punti di minimo di F_ε convergono per $\varepsilon \downarrow 0$ ai punti di minimo del perimetro (eventualmente: con vincolo di volume).

Le gocce di olio nell'acqua hanno forma sferica



PREPARAZIONE EURISTICA   Consideriamo il problema 1-dimensionale

$$\min \left\{ F_\varepsilon(x) \; ; \; x : \mathbb{R} \to [0,1] \; , \; \begin{array}{l} x' \in L^2(\mathbb{R}) \\ x(-\infty) = 0 \quad x(\infty) = 1 \end{array} \right\}$$

dove

$$F_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varepsilon \, x'^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(x) \right\} dt \, ,$$

Vogliamo andare da 0 a 1 con energia minima.

L'equazione di Eulero - Lagrange associata è

$$-2\varepsilon x_\varepsilon'' + \frac{1}{\varepsilon} W'(x_\varepsilon) = 0 \qquad \text{su } \mathbb{R}$$

Moltiplicando per x':

$$-\varepsilon (x_\varepsilon'^2)' + \frac{1}{\varepsilon} (W(x_\varepsilon))' = 0$$

e integrando

$$-\varepsilon x_\varepsilon'^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(x_\varepsilon) = \text{costante} = 0 \, .$$

Che debba essere costante $= 0$ si vede con $t \mapsto \pm\infty$.

In definitiva

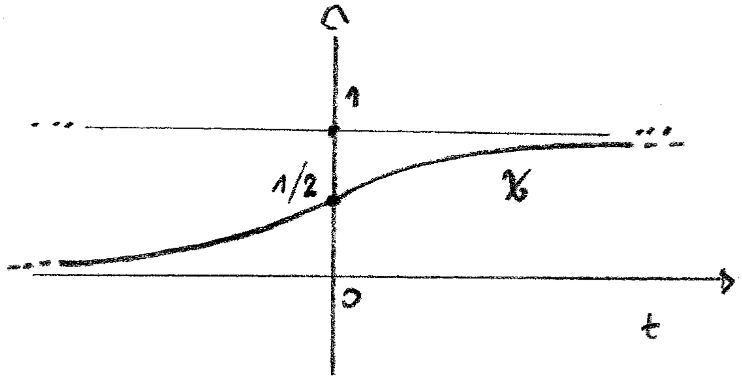
$$x_\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{W(x_\varepsilon)} \, .$$

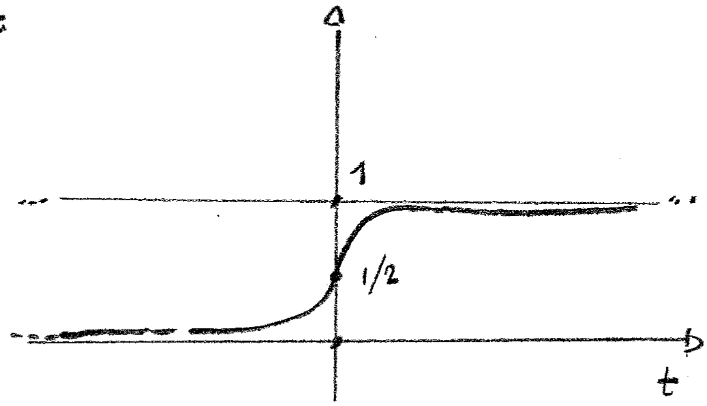
In effetti si ha $x_\varepsilon(t) = x(t/\varepsilon)$ dove

$$\begin{cases} x' = \sqrt{W(x)} \quad \text{su } \mathbb{R} \\ x(-\infty) = 0, \quad x(\infty) = 1 \quad \left(\Leftarrow \; x(0) = 1/2 \right). \end{cases}$$

La soluzione è:

$$x(t) = \frac{e^t}{1+e^t}, \qquad t \in \mathbb{R}$$





x_ε con $0 < \varepsilon \ll 1$.

x_ε separa 0 da 1 in modo rapido quando $0 < \varepsilon \ll 1$.

DIM. Per semplicità ignoriamo il vincolo di volume.

Notazione: $\varepsilon = \varepsilon_h = 1/h$ con $\varepsilon \to 0^+ \iff h \to \infty$.

i) Siano $u \in L^1(\Omega)$ e $u_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tali che $u_\varepsilon \xrightarrow{L^1} u$.

Vogliamo provare che

$$F(u) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Possiamo supporre che $\liminf\limits_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty$.

Possiamo anche supporre che: $u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} u(x)$ q.o.

Per il Lemma di Fatou:

$$\int_\Omega W(u)\,dx \le \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \int_\Omega W(u_\varepsilon)\,dx \le$$

$$\le \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 .$$

Quindi $W(u) = 0$ q.o. $\Rightarrow$ $u \in \{0,1\}$ q.o.

$\Rightarrow$ $u = \chi_E$.

Possiamo anche supporre che $0 \le u_\varepsilon \le 1$.
Infatti il troncamento continua a convergere ad u in $L^1(\Omega)$ e inoltre l'energia diminuisce.

Per $t \in [0,1]$ definiamo

$$\varphi(t) = \int_0^t \sqrt{W(u)}\,du$$

e quindi

$$w(x) = \varphi(u(x)) = d\, u(x),$$

$$w_\varepsilon(x) = \varphi(u_\varepsilon(x)) .$$

Con $L = \sup\limits_{0\le u\le 1} \sqrt{W(u)}$ si ha $|w_\varepsilon - w| \le L\,|u_\varepsilon - u|$

e quindi $w_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{L^1(\Omega)} w$.

Per la semicontinuità inferiore della variazione totale:

$$\alpha P(E;\Omega) = |\nabla w|(\Omega) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega |\nabla w_\varepsilon| \, dx =$$

$$= \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega \sqrt{W(u_\varepsilon)} \, |\nabla u_\varepsilon| \, dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega \left\{ \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \liminf_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Questo prova la prima condizione della Γ-convergenza.

ii) Ora sia $u \in L^1(\Omega)$ e proviamo che esistono $u_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ tali che

$$F(u) \geq \limsup_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Basta considerare $u = \chi_E$ con $P(E;\Omega) < \infty$.
In effetti basta considerare il caso

$$\partial E \cap \Omega \text{ è } C^\infty \quad \left(e \quad H^{n-1}(\partial\Omega \cap \partial E) = 0 \right).$$

Consideriamo la funzione distanza

$$\varrho(x) = \begin{cases} \operatorname{dist}(x;\partial E) & \text{se } x \in E \cap \Omega \\ -\operatorname{dist}(x;\partial E) & \text{se } x \in \Omega \setminus E \end{cases},$$

É noto che $|\nabla \varrho| = 1$ q.o. e $\varrho \in C^\infty$ in un intorno di ∂E.

Definiamo le funzioni

$$u_\varepsilon(x) = \chi_\varepsilon(\varrho(x)) = \chi(\varrho(x)/\varepsilon) \quad , \quad x \in \Omega,$$

dove $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\chi(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$.

Usando la Formula di Coarea e $|\nabla \varrho| = 1$

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_\Omega \left\{ \varepsilon \left| \chi'(\varrho/\varepsilon) \frac{\nabla \varrho}{\varepsilon} \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(\chi(\varrho/\varepsilon)) \right\} dx$$

$$= \int_\Omega \left\{ \frac{1}{\varepsilon} |\chi'(\varrho/\varepsilon)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(\chi(\varrho/\varepsilon)) \right\} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ |\chi'(t/\varepsilon)|^2 + W(\chi(t/\varepsilon)) \right\} \int_{\{x \in \Omega \,|\, \varrho(x) = t\}} dH^{n-1} \quad dt$$

In definitiva si ottiene

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \chi'^2 + W(\chi) \} H^{n-1}(\{\rho = \tau\varepsilon\} \cap \Omega)\, d\tau$$

É possibile provare (omettiamo la dimostrazione) che

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} H^{n-1}(\{\rho = \tau\varepsilon\} \cap \Omega) = H^{n-1}(\partial E \cap \Omega)$$
$$= P(E; \Omega)$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = P(E;\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} \{ \chi'^2 + W(\chi) \} d\tau$$
$$= P(E;\Omega) \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} W(\chi)\, d\tau \qquad (\chi(\tau) = u)$$
$$= P(E,\Omega)\ 2 \int_0^1 \sqrt{W(u)}\, du .$$

$\square$

CENNI DI TEORIA DEL TRASPORTO OTTIMO

Siano μ, ν due misure di Borel finite su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$
con
$$\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n).$$

Data $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di Borel ($B \subset \mathbb{R}^m$ Borel $\Rightarrow$ $T^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$ Borel), la misura push-forward $T_\# \mu$ è definita
$$T_\# \mu (B) = \mu(T^{-1}B), \quad B \subset \mathbb{R}^m \text{ Borel}.$$

<u>Esercizio</u> Per $f : \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ di Borel si ha la formula del cambiamento di variabile
$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d T_\#\mu (y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)\, d\mu(x).$$

<u>DEFINIZIONE</u> (Mappe di trasporto) Diciamo che $T \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$ se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di Borel e $T_\# \mu = \nu$.

Sia poi $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{continua}} [0,\infty)$ una "funzione costo". Uno modello
$$c(x,y) = \frac{1}{2} |x-y|^2 \quad \text{"Costo quadratico"}$$

Il problema fondamentale del Trasporto ottimo è

$$\min\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} d(x, Tx)\, d\mu(x) \ : \ T \in \mathcal{T}(\mu, \nu) \right\}$$

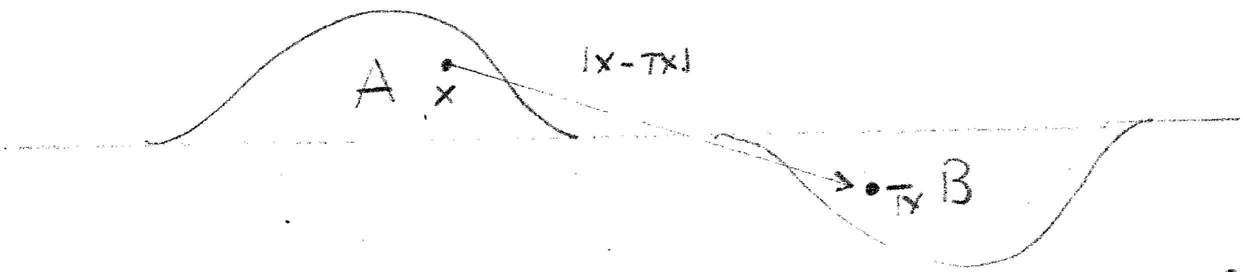
<u>ESEMPIO</u> $\mu = \mathcal{L}^n \llcorner A$ $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato

$\nu = \mathcal{L}^n \llcorner B$ $B \subset \mathbb{R}^n$ " "

con $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B)$

Il problema di Monge è: $(d = |x-y|)$

$$\min\left\{ \int_A |x - Tx|\, dx \ : \ T_{\#} \mathcal{L}^n \llcorner A = \mathcal{L}^n \llcorner B \right\}$$



Qui $d(x,y) = |x-y|$ con esponente $p = 1$ in $|x-y|^p$.

<u>COMMENTO</u> Supponiamo

$\mu = f \mathcal{L}^n$ con $f, g \geq 0$
$\nu = g \mathcal{L}^n$ $\|f\|_1 = \|g\|_1$

Supponiamo che $\nu = T_{\#}\mu$ con
T diffeomorfismo di classe C^1.

Allora per $B \subset \mathbb{R}^n$ Borel; (ad es, palla)

$$\int_B f(x)\,dx = \mu(B) = \mu(T^{-1}TB) =$$

$$= \nu(TB) = \int_{TB} g(y)\,dy = [y = T(x)]$$

$$= \int_B g(T(x))\,|\det JT(x)|\,dx$$

Dividendo per $\mathcal{L}^n(B)$ e facendo $\mathcal{L}^n(B) \to 0$ si trova

$$f(x) = g(T(x))\,|\det JT(x)| \quad \text{per q.o. } x,$$

Supponendo $T(x) = \nabla\varphi(x)$ con $\varphi \in C^2$ ed $H\varphi \geq 0$ si ottiene

$$\det H\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(T(x))}$$

dove $g(T(x)) > 0$. Questa è l'equazione di Monge - Ampère.

Kantorovic ha introdotto una formulazione debole del problema di Monge.

Su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ abbiamo le proiezioni

$$p^1(x,y) = x \in \mathbb{R}^n,$$
$$p^2(x,y) = y \in \mathbb{R}^n.$$

<u>DEFINIZIONE (Piano di trasporto)</u> Siano μ, ν come sopra. Definiamo l'insieme dei piani di trasporto:

$$\Pi(\mu,\nu) = \left\{ \pi \text{ misura di Borel su } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ tale che } p^1_\# \pi = \mu \text{ e } p^2_\# \pi = \nu \right\}.$$

<u>OSS</u>: $\mu \otimes \nu \in \Pi(\mu,\nu)$.

Introduciamo il funzionale $I : \Pi(\mu,\nu) \to [0,\infty]$.

$$I(\pi) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi$$

Il problema di minimo di Kantorovic è

$$\min \{ I(\pi) \; ; \; \pi \in \Pi(\mu,\nu) \} \; ;$$

Vantaggi:
1) Si cerca una misura invece che una mappa.
2) I vincoli sono lineari.

COMMENTO Supponiamo che $T \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$ e consideriamo $Id \times T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $\quad Id \times T(x) = (x, Tx)$.

La misura $\pi = (Id \times T)_\# \mu$ è in $\Pi(\mu, \nu)$ e inoltre $spt(\pi) \subset gr(T)$, ovvero $\pi(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus gr(T)) = 0$.

Supponiamo viceversa che $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ sia una misura tale che $spt(\pi) \subset gr(T)$ con $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di Borel. Allora $\nu = T_\# \mu$.

Inoltre, nei due casi si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y)\, d(Id \times T)_\# \mu$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} d(x, Tx)\, d\mu.$$

Quindi, se esistono i minimi si ha

minimo Kantorovic $\leq$ minimo Monge

Se poi il minimo di Kantorovic è del tipo $\pi = (Id \times T)_\# \mu$ allora è anche un minimo di Monge.

PROPOSIZIONE Siano μ, ν due misure di Borel con supporto compatto e $\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ continua. Allora, il minimo di Kantorovic esiste finito.

La dimostrazione si basa sul teorema di compattezza per le misure di Radon

TEOREMA Sia $(\mu_h)_{h \in \mathbb{R}}$ una successione di misure di Borel (Radon) tali che

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} \mu_h(\mathbb{R}^n) < \infty .$$

Allora esiste una sottosuccessione $(\mu_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ed esiste una misura di Borel (Radon) tale che $\mu_{h_k} \xrightarrow{*} \mu$ ovvero

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, d\mu_{h_k} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, d\mu$$

per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, continua con supporto compatto.

DIM. della PROP. Siano H, K compatti per cui

$spt(\mu) \subset H$ e $spt(\nu) \subset K$, se $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$
allora $spt(\pi) \subset H \times K$.

Sia $\pi_h \in \Pi(\mu,\nu)$ minimizzante:

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi_h = m =$$

$$= \inf\{ I(\pi) \; ; \; \pi \in \Pi(\mu,\nu)\} < \infty.$$

A meno di sottosuccessione, si ha $\pi_h \overset{*}{\rightharpoonup} \pi$
con π misura di Borel (Radon).
Siccome $spt\, \pi_h \subset H\times K$ $\forall h$, possiamo
considerare d (continua e) con supporto compatto.
Dunque

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi_h = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi.$$

Lasciamo ora come esercizio di verificare che

$$p^1_\# \pi = \mu \quad e \quad p^2_\# \pi = \nu.$$

HINT: $\pi_h \overset{*}{\rightharpoonup} \pi \iff \pi_h(B) \to \pi(B)$
$\forall B$ Borel con $\pi(\partial B) = 0$.

$\square$

Kantorovic ha trasformato il problema $\min\{I(\pi) \; ; \; \pi \in \Pi(\mu,\nu)\}$ in un problema duale.

Consideriamo l'insieme di coppie di funzioni

$$\Phi = \left\{ (\varphi,\psi) : \begin{array}{l} \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n;\mu) \\ \psi \in L^1(\mathbb{R}^n;\nu) \end{array} , \; \begin{array}{c} \varphi(x)+\psi(y) \leq d(x,y) \\ x,y \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

dove d è la funzione costo assegnata.

Definiamo $J : \Phi \to \mathbb{R}$

$$J(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, d\nu .$$

Se $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$, è come scrivere

$$J(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \big(\varphi(x) + \psi(y)\big)\, d\pi ,$$

e chiaramente

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi} J(\varphi,\psi) \leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi = I(\pi)$$

e quindi

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi} J(\varphi,\psi) \leq \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi) .$$

In realtà, vale il seguente

<u>TEOREMA (di dualità)</u> Siano μ, ν due misure di Borel tali che $\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n)$, sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ continua. Allora

$$(*) \quad \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi} J(\varphi,\psi) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi),$$

La dimostrazione è omessa, si basa su argomenti di analisi funzionale.

D'ora in avanti supporremo che

$$d(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2 .$$

In questo caso:

$$I(\pi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left(|x|^2 - 2\langle x,y\rangle + |y|^2\right) d\pi$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 d\mu + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 d\nu}_{= M} - \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \langle x,y\rangle\, d\pi$$

Analogamente:

$$J(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, d\nu$$

$$= M - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x|^2}{2} - \varphi(x) \right) d\mu$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|y|^2}{2} - \psi(y) \right) d\nu$$

$$= M - \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}(x)\, d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi}(y)\, d\nu$$

e inoltre

$$\overline{\varphi}(x) + \overline{\psi}(y) = \frac{1}{2}|x|^2 - \varphi(x) + \frac{1}{2}|x|^2 - \psi(y)$$

$$\geq \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2) - \frac{1}{2}|x-y|^2 = \langle x, y \rangle.$$

In questi conti occorre: $M < \infty$.

Dunque ⊛ si riformula nel seguente modo

$$(**) \qquad \inf_{\substack{(\overline{\varphi},\overline{\psi}) \\ \overline{\varphi}(x) + \overline{\psi}(y) \geq \langle x,y \rangle}} J(\overline{\varphi},\overline{\psi}) = \sup_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \langle x,y \rangle\, d\pi$$

$\uparrow$

È un massimo.
Lo abbiamo provato.

Defininiamo la funzione convessa coniugata

$$\overline{\varphi}^*(y) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \langle y, z \rangle - \overline{\varphi}(z) \,, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

É convessa in quanto sup di funzioni affini.
Inoltre

$$\overline{\varphi}^*(y) \leq \overline{\psi}(y) \quad , \; y \in \mathbb{R}^n$$

e dunque

$$J(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \geq J(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}^*) \geq J(\overline{\varphi}^{**}, \overline{\varphi}^*)$$

dove ora $\overline{\varphi}^*$ e $\overline{\varphi}^{**}$ sono entrambe convesse (e coniugate fra loro).

<u>LEMMA</u> L'estremo inferiore

$$\inf_{(\overline{\varphi}^*, \overline{\varphi}^{**})} J(\overline{\varphi}^*, \overline{\varphi}^{**}) \qquad \text{D}$$

è raggiunto,

La dimostrazione è omessa. Si basa sul Teorema di Ascoli - Arzelà.

Sia $\varphi := \bar{\varphi}^*$ una funzione convessa che fornisce il minimo in (D).

Sia $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ un piano di trasporto ottimale.

Allora (**) diventa

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (\varphi(x) + \varphi^*(y))\, d\pi = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle \, d\pi$$

ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \underbrace{(\varphi(x) + \varphi^*(y) - \langle x,y \rangle)}_{\substack{\geq \; \forall x,y \\ 0}} \, d\pi = 0$$

Deduciamo che π-q.o. si ha

$$\varphi(x) + \varphi^*(y) = \langle x, y \rangle$$

e quindi per π-q.o. (x,y) si trova

$$\langle x,y \rangle \overset{(\geq)}{=} \varphi(x) + \varphi^*(y) \geq \varphi(x) + \langle y, z \rangle - \varphi(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

ovvero

$$\varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z - x \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

ovvero $y \in \partial \varphi(x)$, sottodifferenziale di f in x.

Esiste dunque $N \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tale che

1) $\pi(N) = 0$.

2) $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus N \implies y \in \partial\varphi(x)$.

La funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile q.o.-$\mathcal{L}^n$.
Dunque esiste $N_1 \subset \mathbb{R}^n$ tale che

a) $\mathcal{L}^n(N_1) = 0$

b) $x \in \mathbb{R}^n \setminus N_1 \implies \partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$

Supponiamo ora che $\mu \ll \mathcal{L}^n$. Allora

$$0 = \mu(N_1) = p^1_{\#}\pi(N_1) = \pi(N_1 \times \mathbb{R}^n).$$

Dunque se $(x,y) \notin N \cup N_1 \times \mathbb{R}^n$ ($\leftarrow$ misura $\pi = 0$)
deve essere $y = \nabla\varphi(x)$. La funzione

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \begin{aligned} T(x) &= \nabla\varphi(x) & x \in \mathbb{R}^n \setminus N_1 \\ T(x) &= 0 & x \in N_1 \end{aligned}$$

è di Borel e inoltre $\operatorname{spt}(\pi) \subset gr(T)$ ovvero

$$\pi = (Id \times T)_{\#}\mu$$

Il piano di trasporto π è indotto da una mappa di trasporto $T = \nabla\varphi$.
Abbiamo dimostrato il seguente teorema di Brenier:

TEOREMA (Brenier) Siano μ, ν due misure di Borel in $\mathbb{R}^n$ con supporto compatto, $\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n)$ e $\mu << \mathcal{L}^n$. Allora esiste una funzione convessa $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $T = \nabla\varphi$ realizza il minimo

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |x - Tx|^2 \, d\mu \; ; \; T_{\#}\mu = \nu \right\}.$$

APPLICAZIONE ALLA DISUGUAGLIANZA ISOPERIMETRICA

Sia $B = \{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; |x| < 1 \}$ la palla unitaria e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e aperto. Consideriamo le misure

$$\mu = \mathcal{L}^n \llcorner A$$

$$\nu = \mathcal{L}^n \llcorner B .$$

con l'ipotesi $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B)$.

Esiste $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $T = \nabla\varphi$ verifica $T_{\#}\mu = \nu$ (ed è un minimo con costo quadratico)

ASSUMIAMO che T sia un diffeomorfismo di classe C^1 da A in B.

Per provarlo occorre la teoria della regolarità.

Allora avremo: (JT = Jacobiano di T)

1) $T(x) \in B$ per ogni $x \in A$

2) $|\det JT(x)| = 1$ per ogni $x \in A$.

Possiamo dire che $\det JT(x) = +1$ per $x \in A$.

Ora useremo la disuguaglianza:

$$\circledast \qquad \det(M)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \operatorname{tr}(M)$$

per ogni matrice M simmetrica $n \times n$.
(È la disuguaglianza media geom. ≤ media aritm.)

Inoltre se c'è = in $\circledast$ allora gli autovalori di M sono tutti uguali fra loro ed in particolare M è diagonale.

Dunque:

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_A \det JT(x)^{\frac{1}{n}} dx \overset{\circledast}{\leq} \frac{1}{n} \int_A \operatorname{div} T(x)\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle T(x), N(x) \rangle \, dH^{n-1} \leq$$

Normale Esterna a ∂A

$|T(x)| \leq 1$

$$\leq \frac{1}{n} H^{n-1}(\partial A).$$

Per la palla sappiamo che $\mathcal{L}^n(B) = \frac{1}{n} H^{n-1}(\partial B)$.

Deduciamo che

$$H^{n-1}(\partial B) \leq H^{n-1}(\partial A).$$

Se poi è $H^{n-1}(\partial B) = H^{n-1}(\partial A)$ allora sopra nel punto ⊛ c'è un "=" e quindi

$$1 = \det JT(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(JT(x))$$

per $x \in A$. Deduciamo che $JT(x) = Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$,

ovvero $T(x) = x_0 + x$, per $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

In altri termini T è una traslazione e quindi A è una palla.

$\square$

CENNI SULLA TEORIA DELLE CORRENTI

1. Richiami sulle algebre esterne.
2. Correnti, massa bordo
3. Problema di Plateau
4. Lemma di deformazione
5. Cenni sulla teoria della regolarità
6. Coni di Simon
7. Le varietà olomorfe sono minime

① Richiami sulle algebre esterne

V spazio vettoriale reale $(V=\mathbb{R}^n)$, $m\in\mathbb{N}$

Indichiamo con $\Lambda_m(V)$ la m-algebra esterna.
È uno spazio vettoriale. Una base è

$$\{ e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_m} \ ; \ 1\le i_1<i_2<\dots<i_m\le n\}$$

dove $e_1\dots e_n$ è una base di $V=\mathbb{R}^n$.
Elementi di $\Lambda_m(V)$ sono somme di elementi indecomponibili della forma

$$v_1\wedge\dots\wedge v_m \ , \qquad v_i\in V.$$

Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su V. Lo si estende su $\Lambda_m(V)$ in questo modo;

$$\langle v_1\wedge\dots\wedge v_m , w_1\wedge\dots\wedge w_m\rangle = \det\left((\langle v_i,w_j\rangle)_{i,j=1\dots m} \right).$$

e quindi

$$|v_1\wedge\dots\wedge v_m| = \sqrt{\det\left((\langle v_i,v_j\rangle)_{i,j=1\dots m} \right)}$$

È il volume del "parallelepipedo"

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i v_i \ : \ 0\le t_i\le 1 \right\}.$$

Sia V^* il duale di V, con base duale $dx_1, \dots, dx_n$.
Allora

$$\Lambda_m(V^*) = \Lambda_m(V)^* = \Lambda^m(V).$$

Una base è data da

$$\{ dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m} \;:\; 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n \}.$$

La dualità è data da

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m \,(v_1 \wedge \dots \wedge v_m) = \det(\omega_i(v_j))$$

dove $\omega_i \in V^*$ e $v_j \in V$.

② Correnti, massa e bordo.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.
Definiamo le m-forme con supporto compatto in Ω

$$D^m(\Omega) = \left\{ \omega : \Omega \to \Lambda^m(\mathbb{R}^n) \text{ tali che } \omega(x) = \sum_I f_I(x)\, dx_I \right\}$$

dove $f_I \in C_c^\infty(\Omega)$, $I = \{ i_1 < i_2 < \dots < i_m \}$ e

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}.$$

DEFINIZIONE $T : D^m(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ è una corrente se:

i) T è lineare;

ii) T è limitato (continuo) nel senso che:

$\forall K \subset\subset \Omega \ \exists C > 0 \ \exists k \in \mathbb{N}$ tali che

$$|T(\omega)| \leq C \, \|\omega\|_{C^k} \qquad \forall \omega \in D^m(\Omega)$$

con $\mathrm{spt}\, \omega \subset K$.

Sopra abbiamo usato $\|\omega\|_{C^k} = \sum_I \|f_I\|_{C^k}$.

ESEMPIO Sia $\Sigma \subset \Omega$ una superficie di classe C^∞ e $\dim(\Sigma) = m$, ed orientabile. Definiamo

$$[\![\Sigma]\!](\omega) = \underbrace{\int_\Sigma \omega}_{\text{definizione geometrica}} \overset{\text{Formula Area}}{=} \int_\Sigma \omega(\tau) \, d\mathcal{H}^m,$$

dove $\tau = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ e $v_1, \dots, v_m \in T_p\Sigma$ sono ortonormali e positivamente orientati.

Sia $K \subset\subset \Omega$ compatto. Allora

$$\|\omega\|_C = \sup_{x \in \Sigma \cap K} \ \sup_{\substack{\tau \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n) \\ |\tau| \leq 1}} |\omega(\tau)| < \infty$$

e quindi

$$\left| [\![\Sigma]\!](\omega) \right| \leq \|\omega\|_C \cdot \mathcal{H}^m(\Sigma \cap \Omega).$$

Dunque $T = [\![\Sigma]\!]$ è lineare e continua.
Dunque le superfici orientate sono correnti.

Sia $\omega \in C_0(\Omega; \Lambda^m(\mathbb{R}^n))$, ovvero $\omega : \Omega \to \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ è continua con supporto compatto. La comassa di ω è

$$\|\omega\|_C = \sup_{x \in \Omega} \sup_{\substack{|\tau| \leq 1 \\ \tau \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)}} |\omega(\tau)|.$$

$(X, \|\cdot\|_C)$ è uno spazio normato.

DEF (Massa di una corrente) La massa di una corrente T su $D^m(\Omega)$ è

$$M(T) = \sup_{\|\omega\|_C \leq 1} |T(\omega)|.$$

Se $M(T) < \infty$ diremo che T ha massa finita.
Scriveremo anche $\|T\| = M(T)$.

Le correnti di massa finita con $\|\cdot\|$ formano uno spazio normato che coincide con il duale di X.
In particolare X^* è uno spazio di Banach.

COMMENTO Gli insiemi chiusi (top. forte) e limitati in un duale sono compatti nella topologia debole*.

Quindi: se $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di correnti tale che

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} M(T_k) < \infty$$

allora esiste una sottosuccessione $(T_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ed esiste T corrente (di massa finita) tali che

i) $T_{k_j}(\omega) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} T(\omega) \quad \forall \omega \in C_0(\Omega; \Lambda^m(\mathbb{R}^n))$;

ii) La massa è semicontinua inferiormente

$$M(T) \leq \liminf_{j\to\infty} M(T_{k_j}).$$

Il punto ii) segue dal fatto che $M(\cdot)$ è una norma duale.

COMMENTO Se $\Sigma \subset \Omega$ è una superficie orientabile di dimensione $m \in \mathbb{N}$, si ha

$$M([\![\Sigma]\!]) = \sup_{\|\omega\|_C \leq 1} [\![\Sigma]\!](\omega)$$

$$= \sup_{\|\omega\|_C \leq 1} \int_\Sigma \omega(\tau)\, dH^m$$

con τ = m-piano tangente a Σ e

$$\|\omega\|_C \leq 1 \iff \sup_{|\tau|\leq 1} |\omega(\tau)| \leq 1$$

Se Σ è compatta ($\Rightarrow$ massa finita) si può scegliere $\omega = \tau^*$ ovvero $\omega(\tau) = 1$ identicamente su Σ e poi estendere ω in Ω in modo tale che $\omega \in C_c(\Omega; \Lambda^m(\mathbb{R}^n))$ e $\|\omega\|_C \le 1$.

Quindi si deduce che

$$M([\![\Sigma]\!]) = H^m(\Sigma).$$

Se è solo $H^m(\Sigma) < \infty$ si ragiona per approssimazione

Quindi: La massa di una corrente estende la nozione di area.

La derivata esterna di $\omega \in D^m(\Omega)$

$$\omega = \sum_I f_I(x)\, dx_I$$

è la $m+1$ forma $d\omega \in D^{m+1}(\Omega)$

$$d\omega = \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I(x)}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I .$$

<u>DEF (Corrente bordo)</u> Il bordo di una corrente $T \in D^m(\Omega)'$ è la corrente $\partial T \in D^{m-1}(\Omega)'$

$$\partial T(\omega) = T(d\omega), \quad \omega \in D^{m-1}(\Omega).$$

Osserviamo che $\omega \mapsto \partial T(\omega)$ è lineare.

Inoltre:

$$|\partial T(\omega)| = |T(d\omega)| \leq C \|d\omega\|_{C^K}$$

$$\leq C \|\omega\|_{C^{K+1}}$$

e quindi ∂T è limitato.

COMMENTO Sia Σ una superficie orientabile con bordo $\partial\Sigma$. Allora

$$[\![\partial\Sigma]\!](\omega) = \int_{\partial\Sigma} \omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\Sigma} d\omega = [\![\Sigma]\!](d\omega)$$

Quindi

$$\underbrace{[\![\partial\Sigma]\!]}_{\text{frontiera}} = \underbrace{\partial[\![\Sigma]\!]}_{\text{corrente bordo}} .$$

DEF (Corrente normale) Diciamo che T è una corrente normale se

$$M(T) + M(\partial T) < \infty .$$

Le correnti normali formano uno spazio di Banach.

(3) PROBLEMA DI PLATEAU

Sia $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ una corrente senza bordo, $\partial T = 0$, e con supporto compatto.

Il Problema di Plateau è lo studio del problema di minimo

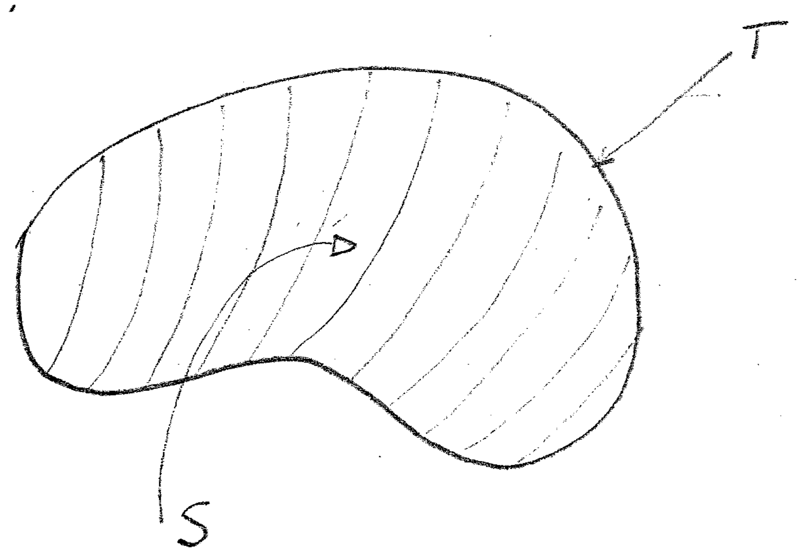
$$\min \{ M(S) \ ; \ S \in \mathcal{D}_{m+1}(\mathbb{R}^n) \ , \ \partial S = T \}.$$

Le questioni sono:

1) Esistenza dei minimi (possibilmente in classi ristrette di correnti)

2) Unicità dei minimi. In generalità non c'è.

3) Regolarità dei minimi: il minimo S è sperabilmente una superficie classica regolare.



DEF (Supporto) Il supporto di $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme chiuso

$$spt(T) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \Omega$$

dove l'unione è fatta sugli aperti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tali che $T(\omega) = 0$ per ogni $\omega \in \mathcal{D}^m(\Omega)$.

La teoria di Federer - Fleming stabilisce l'esistenza nella classe delle correnti rettificabili intere.

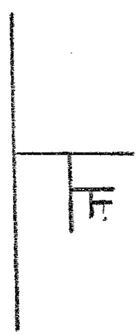
DEF (Insieme $\mathcal{H}^m$-rettificabile) Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ è $\mathcal{H}^m$-rettificabile se:

1) $S = S_0 \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ con $\mathcal{H}^m(S_0) = 0$

ed $\underset{\substack{\text{(limitato)} \\ \text{(compatto)}}}{S_j} \subset f_j(\mathbb{R}^m)$ con $f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Lip.;

2) $\mathcal{H}^m(S) < \infty$.

Esempio



É $\mathcal{H}^1$ rettificabile se la lunghezza totale è finita

DEF (Corrente rettificabile) Una corrente $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ si dice rettificabile se è della forma:

$$T(\omega) = \int_K \theta(x) \langle \vec{\tau}, \omega \rangle \, dH^m(K)$$

dove:

1) $K \subset \mathbb{R}^n$ è H^m-rettificabile

2) $\theta : K \to \mathbb{Z}$ è integrabile (funzione molteplicità)

3) $\vec{\tau} : K \to \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ è di Borel e inoltre

$$\vec{\tau}(x) = \tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_m \qquad \text{(orientazione del piano tangente)}$$

con $\tau_1 \dots \tau_m$ ortonormali tangenti a K.

DEF (Corrente intera) Una corrente $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ si dice intera se:

1) T è rettificabile e $spt(T)$ è compatto

2) ∂T è rettificabile e $spt(\partial T)$ è compatto.

OSS. Le correnti intere sono normali, $M(T) < \infty$ e $M(\partial T) < \infty$.

<u>Flat metric</u> Per una corrente intera $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ definiamo

$$\mathcal{F}(T) = \inf\{ M(S) + M(A) \ : \ T = S + \partial A \}.$$
con S, A intere

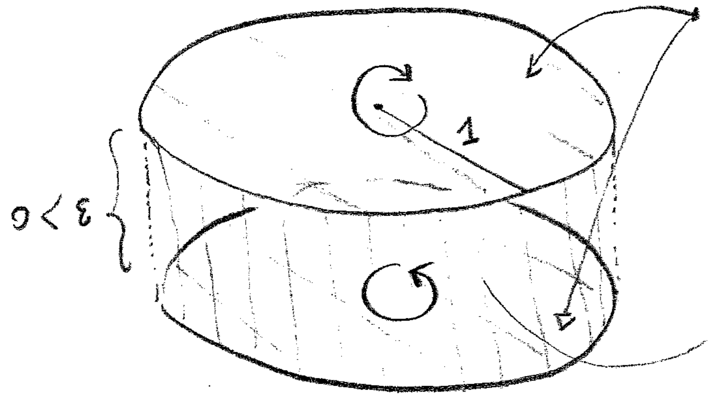
<u>Osservazioni</u>

1) $\mathcal{F}$ è una norma (esercizio) e $\mathcal{F}(T) \leq M(T)$

2) Se $\mathcal{F}(T_j - T) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ allora $T_j \xrightarrow[j\to\infty]{*} T$,

la topologia della "flat metric" è più forte della topologia debole-$*$ (esercizio)

3) Si guardi la figura:



T = due dischi di raggio 1, orientazioni opposte

S = superficie laterale del cilindro, orientata opportunamente

A = cilindro solido

In effetti: $T = \partial A + S$ e inoltre

$$\mathcal{F}(T) \overset{(=)}{\leq} M(A) + M(S) = \pi\varepsilon + 2\pi\varepsilon = 3\pi\varepsilon$$

$$M(T) = 2\pi.$$

TEOREMA (Federer - Fleming). Sia $R > 0$ e siano $T_j \in D_m(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, correnti intere tali che:

1) $spt(T_j) \subset \overline{B(0,R)}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$;

2) $\sup_{j \in \mathbb{N}} M(T_j) + M(\partial T_j) < \infty$.

Allora esiste una corrente intera $T \in D_m(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mathcal{F}(T_j - T) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$.

La dimostrazione si basa sul teorema di deformazione e viene omessa.

TEOREMA (Esistenza per il Problema di Plateau).

Sia $B \in D_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto tale che esista $T_0 \in D_m(\mathbb{R}^n)$ intera con supporto compatto tale che $\partial T_0 = B$. Allora il minimo

$$\min \{ M(T) : T \text{ intera con } \partial T = B \}$$

viene raggiunto.

Dim, Sia $R>0$ tale che $spt(B) \subset \overline{B(0,R)}$ e $spt(T_0) \subset \overline{B(0,R)}$.

Sia $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ minimizzante, ovvero:

i) T_j intera con $\partial T_j = B$;

ii) $\lim_{j\to\infty} M(T_j) = \inf\{M(T) ; T \text{ intera}, \partial T = B\}$.

Sia $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proiezione su $\overline{B(0,R)}$

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leq R \\ R\dfrac{x}{|x|} & \text{se } |x| \geq R \end{cases}$$

É 1-Lipschitz. Le correnti

$$(\pi_{\#} T_j)(\omega) := T_j(\pi^{*}\omega)$$

pull-back di forme

verificano $M(\pi_{\#} T_j) \leq Lip(\pi)^m M(T_j) \leq M(T_j)$.
Inoltre $spt(\pi_{\#} T_j) \subset \overline{B(0,R)}$. (Esercizi)

Dunque possiamo supporre: $spt(T_j) \subset \overline{B(0,R)}$.
Definiamo

$$\hat{T}_j = T_j - T_0 .$$

Allora:

i) $spt(\hat{T}_j) \subset \overline{B(0,R)}$

ii) $M(\hat{T}_j) \leq M(T_j) + M(T_0) \leq C < \infty \quad \forall j$

iii) $\partial \hat{T}_j = \partial T_j - \partial T_0 = B = B = 0$.

Siamo nelle ipotesi del teorema di compattezza.
A meno di una sottosuccessione, esiste $\hat{T} \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ intera tale che

$$\mathcal{F}(\hat{T}_j - \hat{T}) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \qquad \left(\Rightarrow \quad \hat{T}_j \xrightharpoonup[j\to\infty]{*} \hat{T} \right)$$

Definiamo

$$T = \hat{T} + T_0, \qquad (T \text{ è } \underline{\text{intera}})$$

Siccome $\partial \hat{T} = 0$ (in quanto $\partial \hat{T}_j = 0 \ \forall j$)
si ha

$$\partial T = \partial \hat{T} + \partial T_0 = 0 + B = B.$$

Inoltre

$$T_j \xrightharpoonup[j\to\infty]{*} T$$

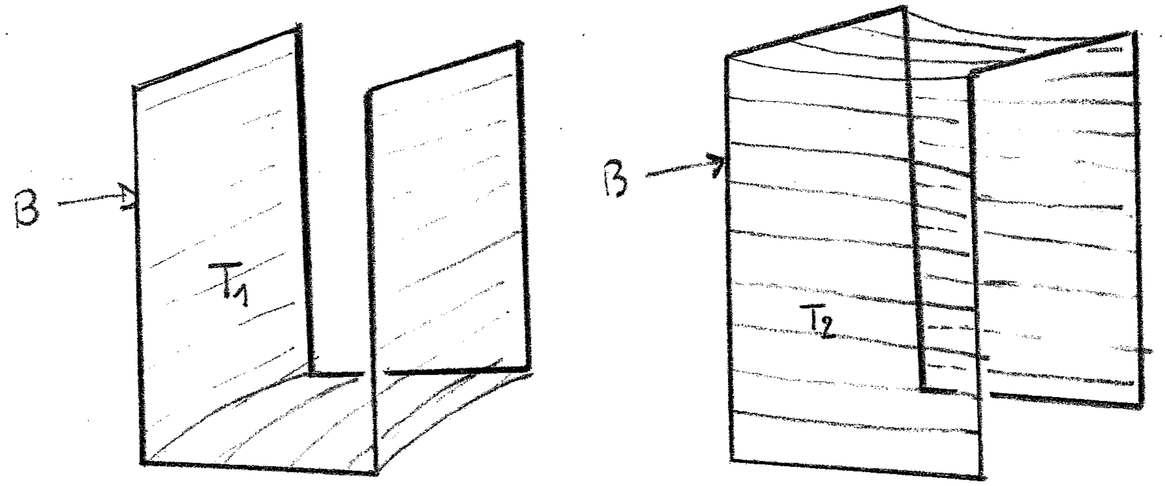
e per semicontinuità inferiore:

$$M(T) \leq \liminf_{j\to\infty} M(T_j).$$

Quindi T è un minimo.

$\square$

<u>Commento</u> In generale non c'è unicità:



Ma sappiamo che se B è un grafico lipschitz con la BSC allora la soluzione è unica.

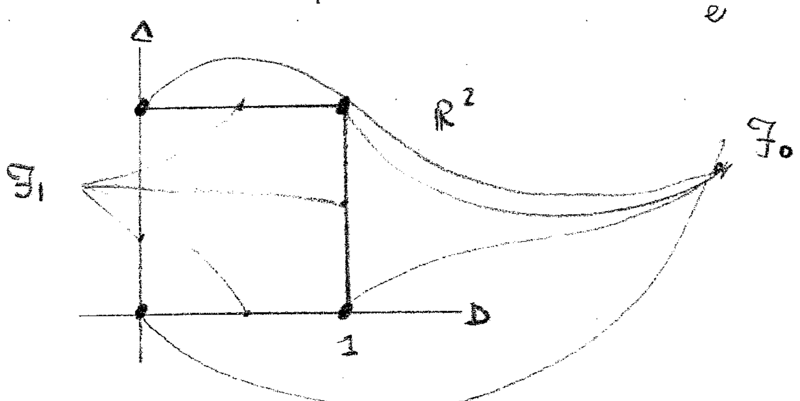
④ LEMMA DI DEFORMAZIONE

Siano $0 \leq m \leq n$. Il cubo unitario di $\mathbb{R}^n$ è

$$C = [0,1]^n$$

su cui fissiamo una orientazione.
Le facce m-dimensionali di C sono

$$\mathcal{F}_m = \left\{ F = \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i] \qquad \alpha_i, \beta_i \in \{0,1\}, \ \alpha_i \leq \beta_i \ \text{ e } \ \alpha_i = \beta_i \ \ n-m \text{ volte} \right\}$$



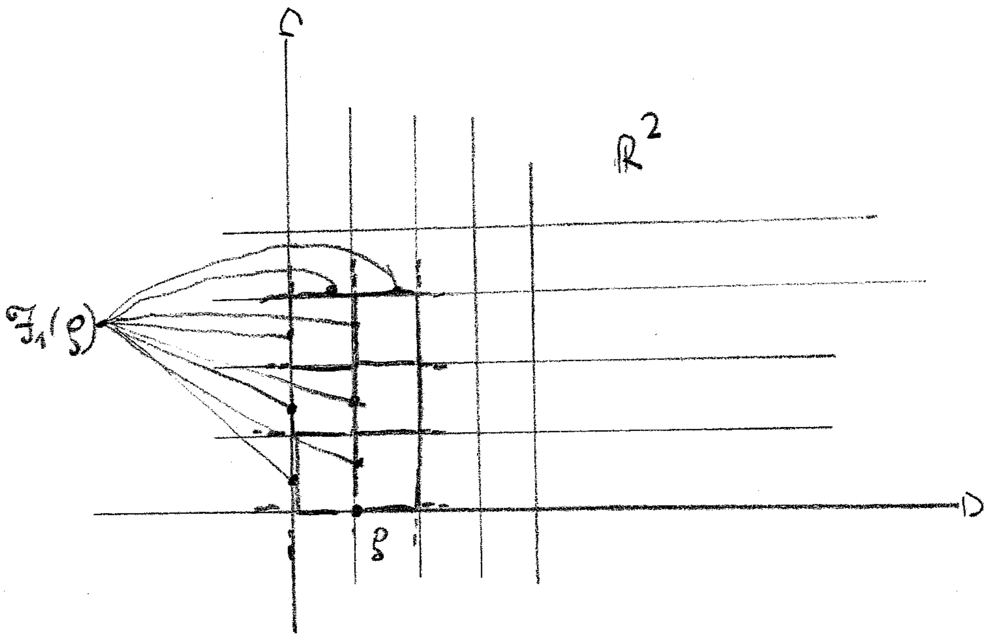
Riscaliamo e trasliamo:

$$C_\rho(x) = x + [0,\rho]^n \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \rho > 0.$$

Prendiamo $x = \rho z$ con $z \in \mathbb{Z}^n$.

Facce di tutti i cubi traslati e riscalati:

$$\mathcal{F}_m(\rho) = \{ \rho(z + F) \; ; \; F \in \mathcal{F}_m, \; z \in \mathbb{Z}^n \}.$$



Per $F \in \mathcal{F}_m(\rho)$ con orientazione indotta, indichiamo con $[\![F]\!]$ la relativa corrente in $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA (DI DEFORMAZIONE) Siano $1 \leq m \leq n-1$ e $\rho > 0$.

Sia $T \in D_m(\mathbb{R}^n)$ una corrente normale;

$$M(T) + M(\partial T) < \infty .$$

Esistono $P, S \in D_m(\mathbb{R}^n)$ e $R \in D_{m+1}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$T - P = \partial R + S$$

e inoltre:

1) $P = \sum_{F \in \mathcal{F}_m(\rho)} p_F [\![F]\!]$ con $p_F \in \mathbb{R}$ ($p_F \in \mathbb{Z}$ se T è integrale)

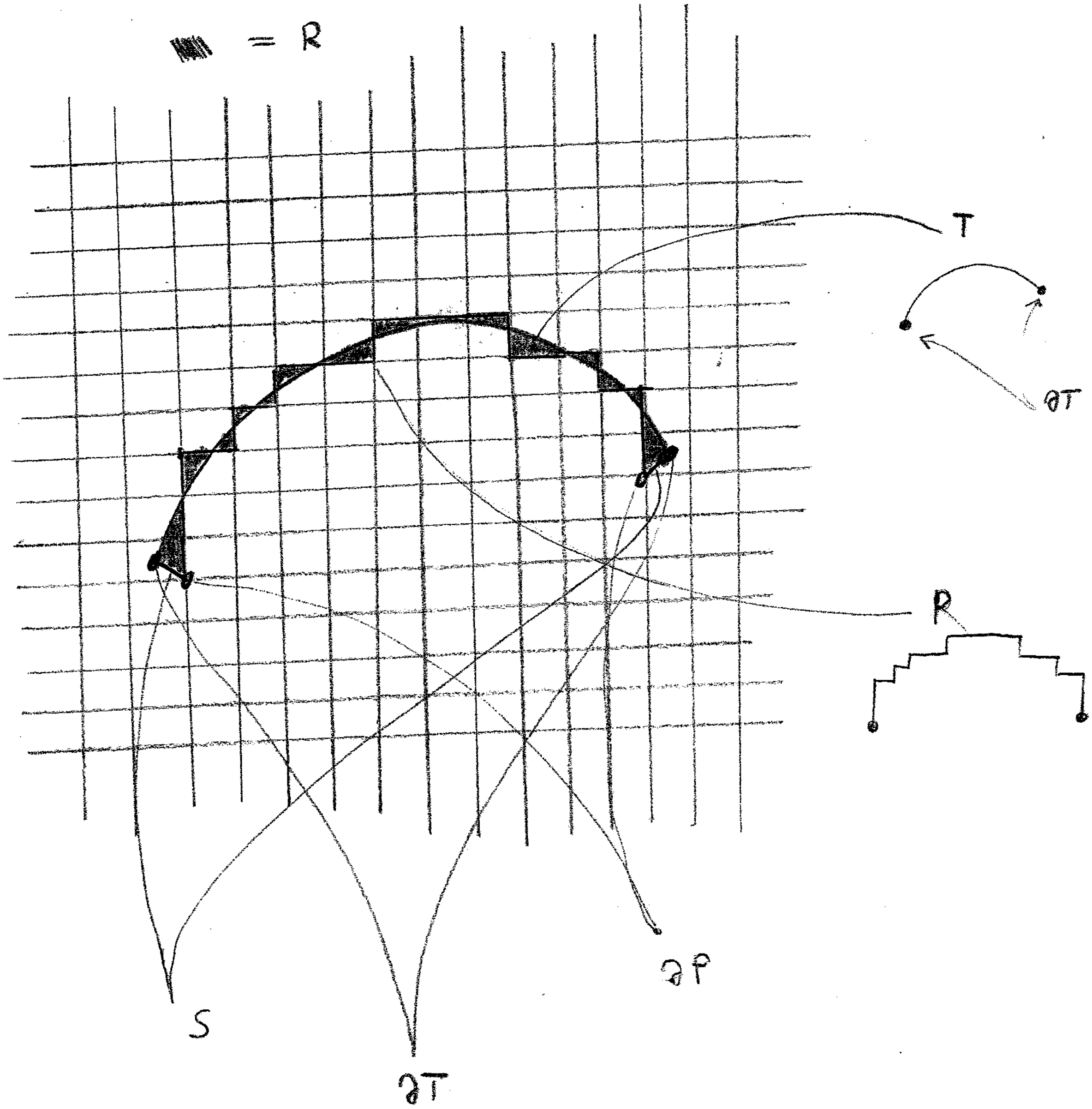
2) $M(P) \leq c\, M(T)$ e $M(\partial P) \leq c\, M(\partial T)$;

3) $M(R) \leq \rho\, c\, M(T)$;

4) $M(S) \leq \rho\, c\, M(\partial T)$.

Sopra, $c = c(m,n) > 0$ dipende da m ed n.

Spieghiamo la situazione con un disegno:



si ha $\partial R = T - P + S$

$$M(P) \leq C\, M(T) \quad e \quad \underset{\underset{2}{\shortparallel}}{M(\partial P)} \leq C\, \underset{\underset{2}{\shortparallel}}{M(\partial T)}$$

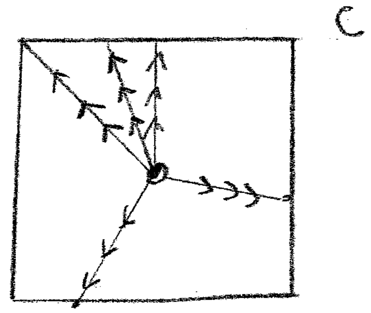
$$M(R) \leq \rho\, C\, M(T) \simeq \rho \cdot \text{lunghezza di } T$$

$$M(S) \leq \rho\, C\, M(\partial T) \simeq \rho \cdot$$

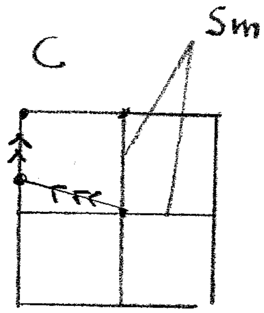
Idea della dimostrazione.

$\rho = 1$

$\psi : C \setminus \{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})\} \to \partial C$ proiezione:



Per composizione si arriva a definire



$$\psi := \psi_m : C \setminus S_m \longrightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}_m} F$$

1° step

$$\int_{[-1/2, 1/2]^n} |\nabla \psi_m|^m \, dx < \infty$$

2° step. Esiste $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi(x+a)|^m \, d\|T\| \leq C \, M(T)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi(x+a)|^m \, d\|\partial T\| \leq C \, M(\partial T)$$

3° Step. Supponiamo $\partial = 0$, si considera la proiezione

$$\psi_{\#} T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$$

è concentrata su $\bigcup_{F \in \mathcal{F}_m(1)} F$.

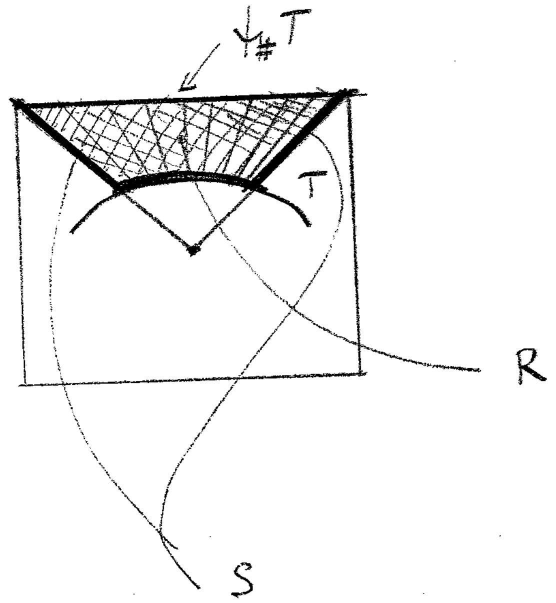
Si usa la <u>formula di omotopia</u> per legare T con $\psi_{\#} T$

$$T = \psi_{\#} T + \partial \left[h_{\#} \left([\![(0,1)]\!] \times T \right) \right] \leftarrow \partial R$$

$$+ \, h_{\#} \left([\![(0,1)]\!] \times \partial T \right) \leftarrow S$$

dove

$$h(t,x) = tx + (1-t)\,\psi(x).$$



La corrente prodotto si definisce in questo modo

$$T_1 \times T_2 \left(g(x,y)\, dx \wedge dy \right) = T_1 \left(T_2 \left(g(x,y)\, dy \right) \cdot dx \right).$$

4° step. La corrente $\psi_\# T$ su F non è del tipo $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{p_F}}$ $[\![F]\!]$. Tuttavia è del tipo $\theta_F\, [\![F]\!]$ con $\theta_F \in BV(F)$. Dalla Disuguaglianza di Poincaré segue che sostituendo θ_F con la sua "media" si ottiene una buona approssimazione.

$\square$

Il teorema di deformazione ha varie applicazioni. Ad esempio:

$$\left.\begin{array}{l} T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n) \text{ intera} \\ M(\partial T) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \partial T \text{ intera}.$$

$\to$ Rettificabilità del bordo

Un altro corollario è il teorema isoperimetrico.

<u>TEOREMA</u> Siano $2 \leq m \leq n$ e $T \in \mathcal{D}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ una corrente intera con $\partial T = 0$ e spt(T) compatto. Allora esiste $R \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ intera tale che

$$T = \partial R \quad \text{e} \quad M(R)^{\frac{m-1}{m}} \leq C(m,n) M(T).$$

Dim. Per il Teorema di Deformazione :

$$T - P = \partial R + S$$

con $S = 0$ in quanto $M(\partial T) = M(0) = 0$,

E inoltre

$$P = \sum_{F \in \mathcal{F}_m(\rho)} p_F [\![F]\!] \qquad \text{con} \qquad p_F \in \mathbb{Z}$$

$$M(P) \leq C(m,n)\, M(T)$$

$$M(R) \leq \rho\, C(m,n)\, M(T),$$

Siccome $M([\![F]\!]) = \rho^{m-1}$ se $F \in \mathcal{F}_m(\rho)$

si ha

$$M(P) = \sum_F |p_F|\, M([\![F]\!])$$

$$= N(\rho)\, \rho^{m-1} \qquad \text{con} \qquad N(\rho) \in \underset{\{0,1,2,..\}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{N}}}$$

Scegliendo $\rho > 0$ tale che

$$\rho^{m-1} > \underset{(\#_0)}{C(m,n)\, M(T)} \qquad \left(\text{ad es: } \rho = 2\,(C\,M(T))^{\frac{1}{m-1}}\right)$$

si deduce che $N(\rho) = 0 \implies P = 0 \implies T = \partial R$.

Inoltre

$$M(R) \leq 2\,(C\, M(T))^{\frac{1}{m-1}} \cdot M(T) = C'\, M(T)^{\frac{m}{m-1}}.$$

$\square$

LE VARIETÀ OLOMORFE SONO MINIME

Sia $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Nelle coordinate $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ questo significa che

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0 \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} = 0 .$$

Consideriamo l'insieme

$$M = \{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 ; F(z,w) = 0 \} .$$

L'insieme $M \cap \{ \nabla F \neq 0 \}$ è una varietà olomorfa di dimensione reale 2 immersa (embedded) in $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$. Dove $\nabla F = 0$ M presenta delle singolarità.

Ad esempio con $F(z,w) = z^2 - w^3$ si ha

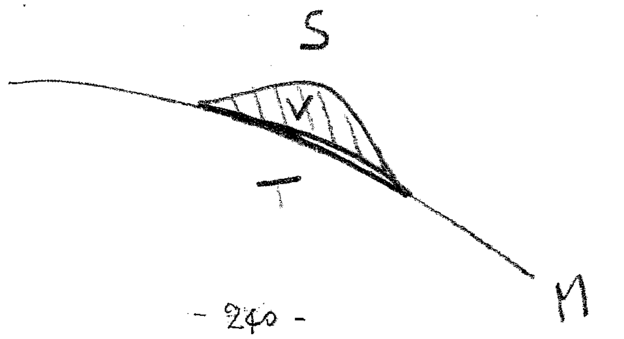
$$M = \{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 ; z^2 = w^3 \}$$

che ha un punto singolare in $(0,0)$.

Sia $T \subset M$ con $\mathcal{H}^2(T) < \infty$.
Sia $S \subset \mathbb{C}^2$ una 2-superficie orientata
sia $V \in D_3(\mathbb{R}^4)$ tale che nel senso delle correnti

$$\partial V = [T] - [S] ,$$

con V di supporto compatto.



TEOREMA Nelle ipotesi precedenti si ha $H^2(T) \leq H^2(S)$.

Osserviamo che il piano tangente di M nella parte regolare è un sottospazio complesso di $\mathbb{C}^2$.

Consideriamo la 2-forma

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

dove $z = x_1 + i x_2$ e $w = x_3 + i x_4$. Chiaramente

$$d\omega = 0$$

avendo ω coefficienti costanti.

Sia $\tau = u \wedge v$ con

$$u = \sum_{i=1}^{4} u_i e_i$$

$$v = \sum_{i=1}^{4} v_i e_i$$

$e_1 - e_4$ base canonica duale di $dx_1 - dx_4$

Dopo pochi conti:

$$\omega(\tau) = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

$$= \langle u, Jv \rangle$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ = standard di $\mathbb{R}^4$

dove $Jv = J(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_2, -v_1, v_4, -v_3)$ è struttura complessa (la moltiplicazione per i).

Dunque, se U e V sono ortonormali (e quindi $|\tau|=1$ nella norma naturale):

$$|\omega(\tau)| = |\langle U, JV\rangle| \leq |U|\,|JV| = |U|\,|V| = 1$$

e si ha $=$ se e solo se $U = \pm JV$, ovvero se e solo se $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{U,V\}$ è un sottospazio complesso di $\mathbb{C}^2$ ("τ è complesso").

Dunque

$$[\![T]\!](\omega) = \int_T \omega = H^2(T)$$

$$[\![S]\!](\omega) = \int_S \omega \leq H^2(S)$$

mentre

$$\underset{\underset{d\omega=0}{\uparrow}}{0} = V(d\omega) = \partial V(\omega) = [\![T]\!](\omega) - [\![S]\!](\omega)$$

da cui segue che

$$H^2(S) \leq H^2(T).$$

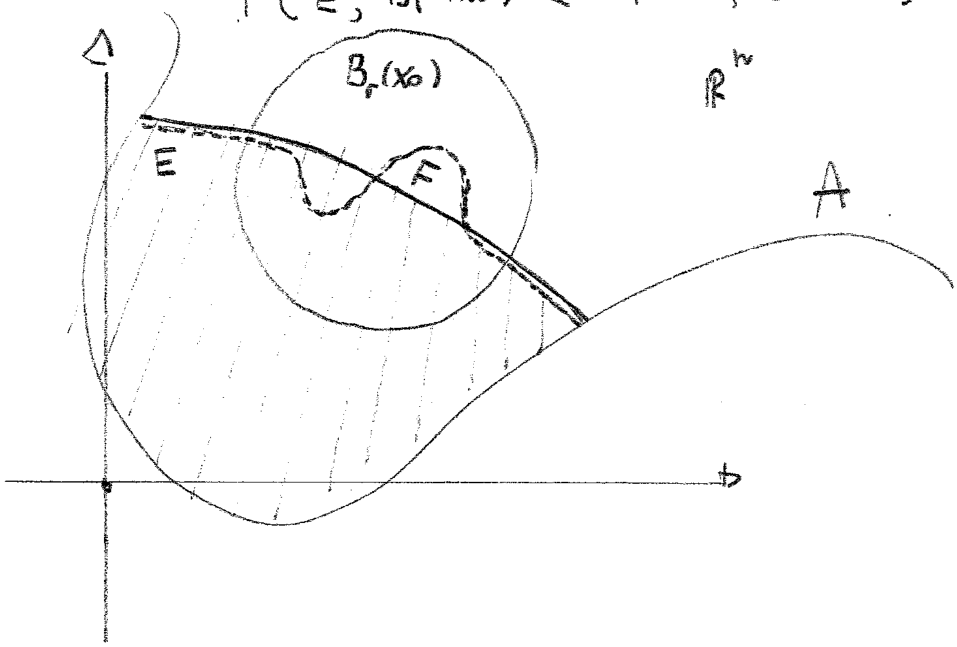
$\square$

CONI DI SIMON

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme con perimetro localmente finito in A.

Diciamo che E è un minimo locale (del perimetro) in A se per ogni $x_0 \in A$, per ogni $r>0$ tale che $B_r(x_0) \subset A$ e per ogni $F \subset \mathbb{R}^n$ tale che $E \Delta F = E\setminus F \cup F \setminus E \subset\subset B_r(x_0)$ si ha

$$P(E, B_r(x_0)) \leqslant P(F, B_r(x_0)).$$



Come provare che un insieme E è un minimo locale?

Una possibilità è attraverso la <u>tecnica di (sub)calibrazione.</u>

Subcalibrazione

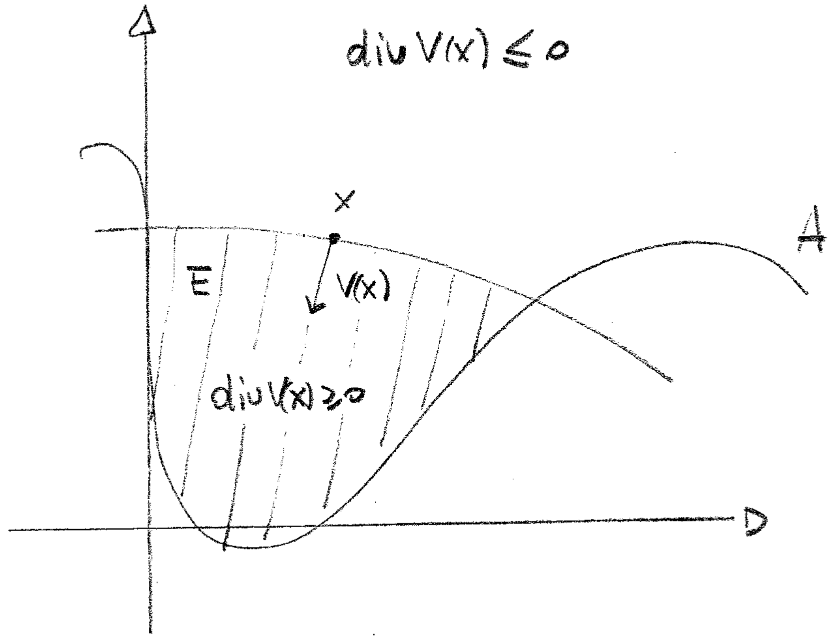
Supponiamo che ∂E sia "regolare" e supponiamo che esista un campo vettoriale $V \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ che verifica le seguenti proprietà:

(1) $|V(x)| = 1$ per ogni $x \in A$,

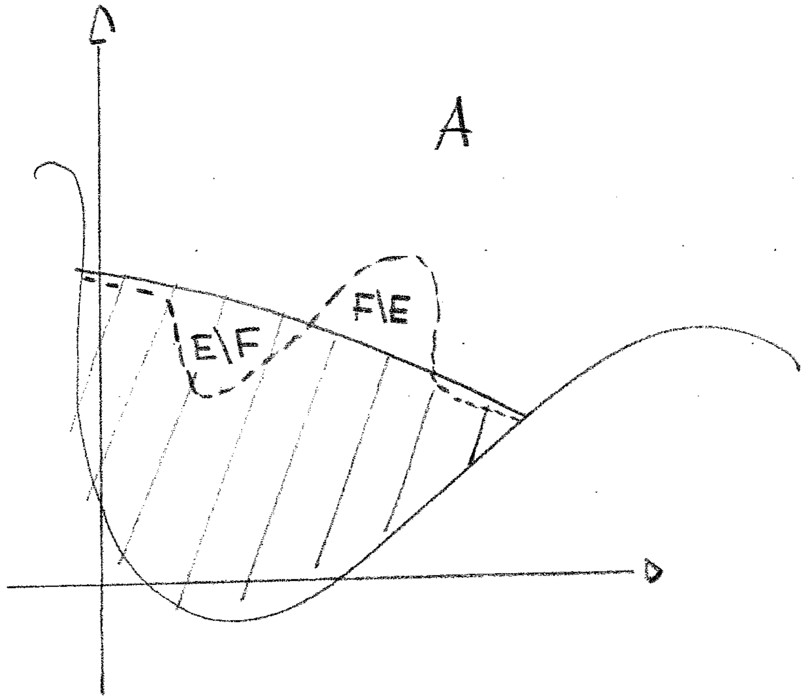
(2) $V(x) = \nu_E(x)$ normale interna di ∂E nel punto $x \in \partial E$ $(\forall x \in \partial E \cap A)$

(3) $\operatorname{div} V(x) \geq 0$ per $x \in E \cap A$.

(4) $\operatorname{div} V(x) \leq 0$ per $x \in A \setminus E$.



Sia poi $F \subset \mathbb{R}^n$ un insieme tale che $\partial F \cap A$ sia regolare (ad es. di classe C^1) ed $E \Delta F \subset\subset A$.



A meno di sostituire A con una palla possiamo supporre che $P(E,A)<\infty$ e $P(F,A)<\infty$.

Su $E\setminus F$:

$$0 \overset{(3)}{\leq} \int_{E\setminus F} \operatorname{div} V(x)\,dx \overset{\text{Teorema divergenza}}{=} \int_{\partial E\setminus F} \underbrace{\langle V, -\nu_E\rangle}_{=-1} dH^{n-1} +$$

$$+ \int_{\partial F\cap E} \underbrace{\langle V, \nu_F\rangle}_{\leq 1} dH^{n-1} \leq$$

normale interna ad F

$$\overset{(1)+(2)}{\leq} H^{n-1}(\partial F\cap E) - H^{n-1}(\partial E\setminus F)$$

In modo analogo:

$$0 \overset{(4)}{\geq} \int_{F\setminus E} \operatorname{div} V(x)\, dx = \int_{\partial F\setminus E} \overbrace{\langle V, -\nu_F\rangle}^{\geq -1} dH^{n-1} +$$

$$+ \int_{\partial E\cap F} \overbrace{\langle V, \nu_E\rangle}^{=1} dH^{n-1} \geq$$

$$\geq H^{n-1}(\partial E\cap F) - H^{n-1}(\partial F\setminus E)$$

Riordinando e sommando si ottiene:

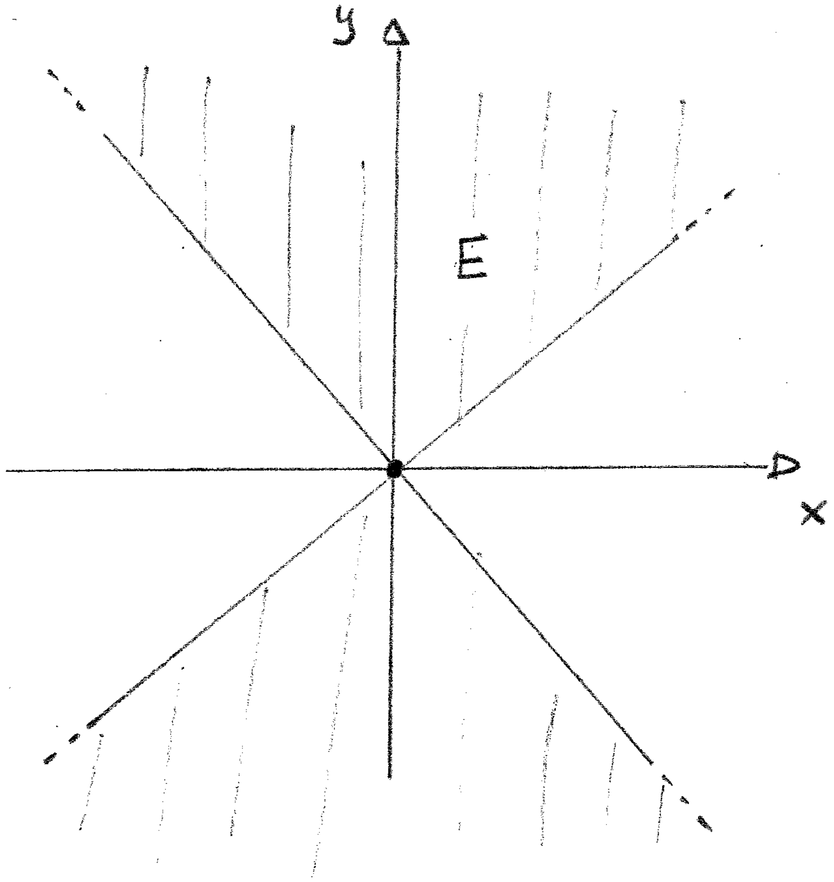
$$P(E,A) = H^{n-1}(\partial E\cap A) \leq H^{n-1}(\partial F\cap A) = P(F,A).$$

<u>Coni di Simon</u>

In $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ con coordinate $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ consideriamo il cono

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \;:\; |x|<|y|\}$$

Nel punto $(0,0)\in\partial E$ la frontiera non è regolare.



TEOREMA Se $n \geq 4$ il cono E è un minimo del perimetro in $\mathbb{R}^{2n}$.

Dim. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(|x|^4 - |y|^4\right).$$

Allora $E = \{ f(x,y) < 0 \}$. Suo gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \left(|x|^2 x, -|y|^2 y\right).$$

Per $(x,y) \neq (0,0)$ è definito:

$$V(x,y) = \frac{-\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|} = \frac{(-|x|^2 x, +|y|^2 y)}{\sqrt{|x|^6 + |y|^6}}.$$

Chiaramente si ha $|\nu| = 1$ su $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0,0)\}$.

Inoltre
$$\nu(x,y) = \nu_E(x,y) \quad \text{normale interna}$$

per $(x,y) \in \partial E \setminus \{(0,0)\}$.

Conti:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{|x|^2 x_i}{\sqrt{|x|^6+|y|^6}}\right) = -\frac{(|x|^2+2x_i^2)\sqrt{|x|^6+|y|^6} - \frac{|x|^2 x_i \, 3|x|^4 x_i}{\sqrt{|x|^6+|y|^6}}}{|x|^6+|y|^6}$$

$$= -\frac{(|x|^2+2x_i^2)(|x|^6+|y|^6) - 3|x|^6 x_i^2}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}.$$

Quindi

$$\operatorname{div} \nu(x,y) = -\frac{(n|x|^2+2|x|^2)(|x|^6+|y|^6) - 3|x|^8}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}$$

$$+ \frac{(n+2)|y|^2(|x|^6+|y|^6) - 3|y|^8}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}$$

$$= \frac{(n+2)(|y|^2-|x|^2)(|x|^6+|y|^6) - 3(|y|^8-|x|^8)}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}$$

Usando $|x|^6 + |y|^6 = (|x|^2 + |y|^2)(|x|^4 - |x|^2|y|^2 + |y|^4)$
si trova

$$\operatorname{div} V(x,y) = (|y|^4 - |x|^4) \cdot \frac{(n+2)(|x|^4 - |x|^2|y|^2 + |y|^4) - 3(|x|^4 + |y|^4)}{(|x|^6 + |y|^6)^{3/2}}$$

$$= (|y|^4 - |x|^4) \frac{(n-1)|x|^4 - (n+2)|x|^2|y|^2 + (n-1)|y|^4}{(|x|^6 + |y|^6)^{3/2}} .$$

Il discriminante del polinomio omogeneo al numeratore verifica

$$\Delta = (n+2)^2 - 4(n-1)^2 \leq 0 \iff n \geq 4 .$$

quindi per $n \geq 4$ si ha

$$\operatorname{div} V(x,y) \geq 0 \iff |y|^4 - |x|^4 \geq 0$$

$$\iff (x,y) \in E$$

Questo verifica i punti (3) e (4).
Il fatto che V non è definito in $(0,0)$ si sistema in questo modo.
Per omogeneità esiste $c > 0$ tale che

$$|\operatorname{div} V(x,y)| \leq \frac{c}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2}} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0,0)\},$$

/7

Dunque si può usare il Teorema della divergenza su $\mathbb{R}^{2n} \setminus B_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, usando il fatto che

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \overbrace{|\langle V, \nu_{B_\varepsilon} \rangle|}^{\leq 1} \, dH^{2n-1} \leq \underbrace{\varepsilon^{2n-1} H^{2n-1}(\partial B_1)}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0}$$

e

$$\int_{B_\varepsilon} |\operatorname{div} V(x,y)| \, dx dy \leq \underbrace{\varepsilon^{2n-2} H^{2n-1}(\partial B_1)}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0}$$

$\square$

1. Esercizi

1.1. Semicontinuità inferiore.

ESERCIZIO 1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$. Provare che sono equivalenti:

A) F è semicontinua inferiormente su X.

B) Per ogni $x_0 \in X$ si ha

$$F(x_0) \le \lim_{r\to 0^+} \inf_{x\in B_r(x_0)} F(x).$$

C) F è sequenzialmente semicontinua inferiormente, ovvero per ogni $x_0 \in X$ ed ogni successione $x_h \to x_0$ si ha

$$F(x_0) \le \liminf_{h\to\infty} F(x_h).$$

ESERCIZIO 2. Sia (X, τ) uno spazio topologico e data $F : X \to \mathbb{R}$ sia

$$\bar{F}(x) = \sup_{U\in\mathscr{I}(x)} \inf_{y\in U} F(y), \qquad x \in X,$$

l'inviluppo semicontinuo inferiore di F. Provare che per ogni $x \in X$ si ha

$$\bar{F}(x) = \sup\{G(x) : G \le F,\ G \text{ isc su } X\}.$$

ESERCIZIO 3. Sia A un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \times \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ una funzione misurabile tale che:

i) $u \mapsto f(x, u)$ è semicontinua inferiormente in $\mathbb{R}$ per q.o. $x \in A$;

ii) esistono $g \in L^1(A)$, $b \in \mathbb{R}$ e $1 \le p < \infty$ tali che

$$f(x, u) \ge g(x) + b|u|^p, \qquad x \in A, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Provare che la funzione $F : L^p(A) \to (-\infty, \infty]$

$$F(u) = \int_A f(x, u(x))dx,$$

è ben definita (ha valori $\neq -\infty$) ed è semicontinua inferiormente in $L^p(A)$ nella topologia forte.

1.2. Funzionali su AC, Lip, C^1 di un intervallo.

ESERCIZIO 4. Sull'insieme $X = \{u \in C^1([0, 1]) : u(0) = 1,\ u(1) = 0\}$ si consideri il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_0^1 \big(\mathrm{e}^{u'(x)} + u(x)^2\big)dx.$$

i) Derivare l'equazione di Eulero-Lagrange associata al funzionale F.

ii) Integrare l'equazione con le condizioni iniziali $u(0) = 1$ e $u'(0) = \alpha$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

iii) Provare che F non ha minimo su X.

Esercizio 5. Siano $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ e $t \in (0,1)$. Sia poi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = n_1$ se $0 \le x \le t$ e $f(x) = n_2$ se $t < x \le 1$. Sia $u \in \mathrm{Lip}([0,1])$ il minimo del funzionale $F : \mathrm{Lip}([0,1]) \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} f(x)\sqrt{1+u'(x)^2}dx, \qquad u(0) = u_1,\ u(1) = u(1).$$

Calcolare u ed in particolare descrivere gli angoli di incidenza nel punto $x = t$ (principio di Fermat).

Esercizio 6. Sull'insieme $X = \{u \in \mathrm{Lip}([0,1]) : u(0) = u(1) = 0,\ u \neq 0\}$ si consideri il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \frac{1}{\|u\|_\infty} \int_{[0,1]} |u'|dx.$$

Calcolare il minimo di F su X.

Esercizio 7. Dati $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ ed $\alpha \in (0,1]$, si consideri $F_\alpha : X \to \mathbb{R}$

$$F_\alpha(u) = \int_{[0,1]} \big(|u'|^\alpha + 3|u-1|\big)dx.$$

Provare che:

i) $\inf_X F_\alpha = 0$ se $0 < \alpha < 1$, e $\inf_X F_1 \le 2$ se $\alpha = 1$.
ii) F_α non ha minimo su X.

Esercizio 8. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione continua e positiva ($f(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$). Provare che il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_0^1 f(u'(x))dx$$

non ha minimo sullo spazio di funzioni $X = \big\{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\big\}$.

Esercizio 9 (Moltiplicatori di Lagrange). Dato $v > 0$ si considerino lo spazio funzionale $X = \{u \in C^1([-1,1]) : u(\pm 1) = 0\big\}$ ed $F, G : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+u'(x)^2}dx, \qquad G(u) = \int_{-1}^1 u(x)\,dx.$$

i) Date $\varphi, \psi \in C_c^\infty(-1,1)$ definiamo $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(\varepsilon,\tau) = G(u + \varepsilon\varphi + \tau\psi)$. Provare che esiste una funzione di classe C^1, $\varepsilon \mapsto \tau(\varepsilon)$, tale che $H(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) = v$ per ogni $|\varepsilon| < \delta$.
ii) Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (il "moltiplicatore di Lagrange", in questo caso la curvatura) tale che

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\Big) = \lambda.$$

iii) Integrare l'equazione precedente. Abbiamo risolto (in parte) il "Problema di Didone".

È facile generalizzare l'esempio ad F e G più generali.

1.3. Bounded slope condition e funzioni Lipschitz.

Esercizio 10. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $U : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione che non sia affine. Provare che se (Ω, U) verifica la bounded slope condition, allora Ω deve essere convesso.

Esercizio 11. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$, I un insieme di indici ed $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I$, funzioni Lipschitziane tali che $\mathrm{Lip}(f_i) \le M$ e $|f_i(x_0)| \le M$ per ogni $i \in I$, con $0 \le L, M < \infty$. Dimostrare che le funzioni

$$f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x), \qquad g(x) = \inf_{i\in I} f_i(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

sono ben definite e Lipschitziane su $\mathbb{R}^n$ con $\mathrm{Lip}(f), \mathrm{Lip}(g) \le L$.

Esercizio 12. Siano $k > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato ed $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strettamente convessa. Provare che due minimi $u, v \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ del funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))dx,$$

verificano

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x) - v(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |u(x) - v(x)|.$$

Esercizio 13. Dimostrare che se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è Lipschitz, allora

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} u(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial u}{\partial v}(x)dx,$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 14. Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \mathrm{dist}(x; C)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che $|\nabla f(x)| = 1$ per $\mathscr{L}^n$-q.o. $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$.

1.4. Funzionali su spazi di Sobolev in dimensione 1.

Esercizio 15. Calcolare – se esiste – la più piccola costante $C > 0$ che rende vera la disuguaglianza

$$\Big(\int_{[0,1]} u(x)dx\Big)^2 \le C \int_{[0,1]} u'(x)^2 dx,$$

per tutte le funzioni $u \in H_0^1(0,1)$ e calcolare – se esistono – tutte le funzioni che realizzano l'uguaglianza (relativamente alla costante ottimale).

Esercizio 16. Dati $X = H^1_0(0,1)$ ed $\varepsilon \in \mathbb{R}$, si consideri $F_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$

$$F_\varepsilon(u) = \int_{[0,1]} \big(\sin(u') + \varepsilon u^2\big) dx.$$

Provare che:

i) se $\varepsilon \neq 0$ allora F_ε non ha minimo su X;

ii) se $\varepsilon = 0$ allora F_0 ha un'infinità di minimi su X, ma nessuno in $C^1([0,1])$.

Esercizio 17. Sia X l'insieme delle funzioni $u \in AC([\delta,1])$ per ogni $0 < \delta < 1$ e tali che

$$\int_{[0,1]} xu'(x)^2 dx < \infty,$$

e sia $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{[0,1]} (xu'^2 + u^2) dx + \int_{[0,1]} uf\, dx,$$

dove $f \in C([0,1])$ è una funzione assegnata. Provare che:

i) X con il prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle = \int_{[0,1]} (xu'v' + uv) dx$$

è uno spazio di Hilbert.

ii) F ha minimo unico su X.

iii) Il minimo verifica $u \in C^2((0,1])$ e

$$-\frac{d}{dx}(xu') + u = f \quad \text{su } (0,1].$$

iv) Il minimo verifica

$$\lim_{x\to 0^+} xu'(x) = 0.$$

Esercizio 18. Su $X = \big\{u \in H^1(0,1) : u(0) = 0,\, u(1) = 1\big\}$ si consideri $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \sqrt{1 + (x+\varepsilon)u'(x)^2} dx,$$

dove $\varepsilon \geq 0$ è un parametro. Provare che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ il funzionale F non ha minimo su X.

Esercizio 19. Su $X = \big\{u \in H^1(0,1) : u(0) = \alpha,\, u(1) = \beta\big\}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} (1 + |u|)u'^2 dx.$$

Studiare il minimo di F su X.

Esercizio 20. Sull'insieme $X = \big\{\chi \in C^\infty(\mathbb{R}) : 0 \le \chi \le 1,\, \chi(-\infty) = 0,\, \chi(\infty) = 1\big\}$ si consideri $F : X \to [0, \infty]$

$$F(\chi) = \int_{\mathbb{R}} \big(\chi'^2 + \chi^2(1-\chi)^2\big)dx.$$

Provare che F ha minimo su X e calcolarlo.

1.5. Funzionali su spazi di Sobolev in dimensione maggiore.

Esercizio 21. Dato un aperto limitato $A \subset \mathbb{R}^n$ con $n \ge 1$, si considerino una funzione $f \in L^2(A)$, lo spazio $X = H^1_0(A)$ e il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A \Big\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu\Big\}dx.$$

i) Provare che F ha minimo unico su X.
ii) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole verificata dal minimo.
iii) Supponendo la necessaria regolarità, scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange in forma forte.

Esercizio 22. Dato un aperto limitato e con frontiera Lipschitz $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, si considerino una funzione $f \in L^2(A)$, lo spazio

$$X = \Big\{u \in H^1(A) : \int_A u\, dx = 0\Big\},$$

e il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A \Big\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu\Big\}dx.$$

i) Provare che F ha minimo unico su X.
ii) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole verificata dal minimo.
iii) Supponendo la necessaria regolarità, dedurre le equazioni per il minimo

$$\Delta u = f - f_A \quad \text{in } A \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial A,$$

dove f_A è la media di f su A e ν è la normale (esterna) a ∂A.

Esercizio 23. Dato $\gamma \in (0, 1]$, si consideri $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y^\gamma,\ 0 < y < 1\}$. Provare che se $1 \le p < 1 + \gamma$ e

$$q > \frac{(1+\gamma)p}{1+\gamma-p},$$

allora non esiste alcuna costante $C_{pq\gamma}$ tale che

$$\Big(\int_A |u - u_A|^q dxdy\Big)^{1/p} \le C_{pq\gamma}\Big(\int_A |\nabla u|^p dxdy\Big)^{1/p}.$$

Esercizio 24. Per $n \geq 1$ ed $R > 1$ consideriamo l'insieme di funzioni

$$\mathscr{A}_R = \big\{u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n) : u(x) \geq 1 \text{ per } |x| \leq 1 \text{ e } u(x) = 0 \text{ per } |x| \geq R\big\}.$$

Provare che il funzionale $F : \mathscr{A}_R \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

ha minimo su $\mathscr{A}_R$.

Linea concettuale da seguire: Provare l'esistenza in $H^1_0(B_R)$. Provare l'unicità per stretta convessità. Dedurre la simmetria radiale del minimo dall'unicità. Derivare l'equazione di Eulero-Lagrange nel caso simmetrico. Calcolare il minimo risolvendo l'equazione differenziale ordinaria. Constatare a posteriori che è il minimo u è Lipschitz.

Esercizio 25. Per $n \geq 1$ ed $R > 1$ consideriamo l'insieme di funzioni

$$\mathscr{A}_R = \big\{u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n) : u(x) \geq 1 \text{ per } |x| \leq 1 \text{ e } u(x) = 0 \text{ per } |x| \geq R\big\}.$$

Si consideri il funzionale $G : \mathscr{A}_R \to \mathbb{R}$

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)| dx.$$

Discutere l'esistenza del minimo di G su $\mathscr{A}_R$.

1.6. Funzioni BV.

Esercizio 26. Sia $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Provare che $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\mu^1_s = \ldots = \mu^n_s = 0$, dove μ^i è la misura derivata distribuzionale i-esima di f e μ^i_s è la sua parte singolare rispetto alla misura di Lebesgue.

Esercizio 27. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ y & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Calcolare la misura vettoriale $[Df]$, il gradiente distribuzionale di f.

Esercizio 28. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Provare che $f \in BV(\mathbb{R}^n)$, calcolare la misura μ e la funzione σ tali che $[Df] = \sigma\mu$. Provare che $f \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 29. Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Verificare la regola per il prodotto della derivata distribuzionale (nel senso delle misure)

$$[D(fg)] = g\nabla f \mathscr{L}^n + f[Dg].$$

Esercizio 30. Sia $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ una funzione a supporto compatto. Dimostrare che $[Du](\mathbb{R}^n) = 0$.

Esercizio 31. 1) Provare che $\|f\|_\infty \leq |Df|(\mathbb{R})$ per ogni funzione $f \in BV(\mathbb{R})$. 2) Costruire una funzione $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ tale che $f \notin L^\infty(A)$ per un quasiasi aperto non vuoto $A \subset \mathbb{R}^n$.

Esercizio 32. Sia μ una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ si abbia

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}\varphi \, d\mu \Big| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Provare che esiste una funzione $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mu = f \mathscr{L}^n$.

Esercizio 33. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ una aperto limitato con frontiera Lipschitz. Provare che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_A |f - f_A| dx \leq C \|Df\|(A)$$

per ogni $f \in BV(A)$.

Esercizio 34. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $f \in BV(A)$ una funzione tale che $\|Df\|(A) = 0$. Provare che f è costante.

1.7. Insiemi di perimetro finito.

Esercizio 35. Dati $\gamma \in (0,1]$ ed $n \geq 2$, si consideri $A = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < x_n^\gamma,\ 0 < x_n < 1\}$. Al variare di γ, discutere la validità della disuguaglianza isoperimetrica relativa

$$\mathscr{L}^n(E)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_{n,\gamma} P(E; A),$$

per insiemi $E \subset A$ tali che $\mathscr{L}^n(E) \leq \frac{1}{2} \mathscr{L}^n(A)$.

Esercizio 36. Sia $E \subset (0,1)$ un insieme di perimetro finito. Dimostrare che a meno di insiemi trascurabili E è unione finita di intervalli.

1.8. Superfici minime.

Esercizio 37. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto. Determinare tutte le funzioni $u \in C^\infty(A)$ della forma

$$u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y), \quad (x,y) \in A,$$

i cui grafici siano superfici minime.

Esercizio 38. Sia $S = F(\mathbb{R} \times [0, 2\pi]) \subset \mathbb{R}^3$ dove

$$F(x, \vartheta) = (x, f(x)\cos\vartheta, f(x)\sin\vartheta),$$

ed $f \in C^2(\mathbb{R})$ è una funzione che verifica $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 0$.

i) Supponendo che $S \subset \mathbb{R}^3$ sia una superficie minima, derivare l'equazione differenziale per f

$$(1+f'^2)f - f^2 f'' = 0.$$

ii) Provare che f è una catenoide.

Esercizio 39. Sia $r > 0$ e per $f \in C^2([-r,r])$ si consideri la superficie $S = \big\{(x, f(x)\cos\vartheta, f(x)\sin\vartheta) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0, 2\pi],\ |x| \le r,\ f(\pm r) = 1\big\}$.

Provare che esiste un $r_0 > 0$ tale che:

i) Se $r > r_0$ allora S non può essere una superficie minima.
ii) Se $r = r_0$ allora c'è un'unica superficie minima della forma data.
iir) Se $0 < r < r_0$ esistono 2 superfici minime della forma data.

Esercizio 40. Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ ed $M \ge 0$. Sull'insieme di funzioni

$$\mathscr{A}_M = \big\{u \in C(\bar{A}) \cap C^1(A) : u = 0 \text{ su } |x| = 2 \text{ ed } u = M \text{ su } |x| = 1\big\}$$

consideriamo il problema di minimo $\min\{F(u) : u \in \mathscr{A}_M\big\}$ dove $F : \mathscr{A}_M \to [0, \infty]$ è il funzionale dell'area

$$F(u) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}dx.$$

Provare le seguenti affermazioni:

i) Se il minimo esiste allora è unico.
ii) Se il minimo esiste allora è della forma $u(x) = \varphi(|x|)$ con $\varphi \in C([1,2]) \cap C^1(1,2)$.
iii) Per una funzione u come nel punto precedente ("u radiale") si ha

$$F(u) = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1 + \varphi'(r)^2}rdr.$$

iv) Per un minimo radiale $u(x) = \varphi(|x|)$ si ha

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{r\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\Big) = 0, \quad r \in (1,2).$$

v) Provare che esiste $M_0 > 0$ tale che per $M > M_0$ il problema di minimo in esame non ha soluzione.

Esercizio 41. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione

$$f(x,y) = \left(x + xy^2 - \frac{1}{3}x^3, -y - x^2y + \frac{1}{3}y^3, x^2 - y^2\right).$$

Verificare che $S = f(\mathbb{R}^2)$ è una superficie minima (superficie di Enneper) data tramite una parametrizzazione conforme.

Sia poi $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$,

$$F(z) = \left(\frac{1}{2} h(z)(1 - g(z)^2), \frac{i}{2} h(z)(1 + g(z)^2), h(z)g(z) \right),$$

con $h(z) = 2$ e $g(z) = z$. Verificare che tramite la formula di rappresentazione di Weierstrass

$$f(z) = \mathrm{Re} \int_0^z F(\zeta) d\zeta$$

parametrizza la superficie di Enneper.

Esercizio 42. Provare che non esistono superfici minime compatte.

Esercizio 43. Sia $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un insieme aperto e sia $f \in C^\infty(A)$ una funzione che risolve l'equazione

$$\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \Big) = 0 \quad \text{in } A.$$

Provare che il grafico $S = \mathrm{gr}(f)$ è un minimo dell'area nel cilindro $A \times \mathbb{R}$. Precisamente, provare che per ogni $(n-1)$-superficie $T \subset \mathbb{R}^n$ tale che $S \Delta T = S \setminus T \cup T \setminus S$ è contenuto in modo compatto in $A \times \mathbb{R}$ si verifica

$$\mathscr{H}^{n-1}(S) \leq \mathscr{H}^{n-1}(T).$$

Esercizio 44. Sia $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una ipersuperficie (embedded) di classe C^2 e indichiamo con H la sua curvatura media (la traccia del differenziale della mappa di Gauss divisa per n).

1) Supponiamo che $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\}$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\nabla f \neq 0$. Verificare che

$$H = \frac{1}{n} \mathrm{div}\Big(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \Big).$$

2) Supponiamo che $S = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}$ con $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Verificare che

$$H = \frac{1}{n} \mathrm{div}\Big(\frac{\nabla g}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \Big).$$

3) Supponiamo che esista una funzione (continua) $\bar{H} : S \to \mathbb{R}$ tale che

$$\int_S \mathrm{div}_S V \, d\mathscr{H}^n = \int_S \bar{H} \langle V, \nu_S \rangle d\mathscr{H}^n$$

per ogni $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^{n+1})$, dove $\mathrm{div}_S V = \mathrm{div} V - \langle \nu_E, (\nabla V) \nu_S \rangle$ e ν_S è la normale ad S. Provare che $H = \bar{H}$.

1.9. Correnti.

Esercizio 45. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso a sia $T \in \mathscr{D}_n(A)$ una corrente tale che $\partial T = 0$. Provare che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $T = c[\![A]\!]$.

Esercizio 46. Per $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ si considerino gli anelli

$$A_n = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n+1} < |x| \leq \frac{1}{n}\Big\},$$

con A_n orientato positivamente per n dispari, orientato negativamente per n pari. La corrente $T \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}^2)$ associata è

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [\![A_n]\!].$$

Descrivere il bordo $\partial T \in \mathscr{D}_1(\mathbb{R}^2)$ e provare che $M(\partial T) = \infty$.

Esercizio 47. Siano $K = [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\tau \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$. Provare che

$$T(\omega) = \int_K \omega(\tau) d\mathscr{H}^1, \quad \omega \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}^2),$$

definisce una corrente $T \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}^2)$ di massa finita. Stabilire se ∂T ha massa finita.

1.10. Rilassamento e Γ-convergenza.

Esercizio 48. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $1 \leq p < \infty$ ed $F : L^p(A) \to [0, \infty]$

$$F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_A |Du|^p dx + \int_A |u|^p dx & u \in C^1(A) \cap L^p(A) \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Su $L^p(A)$ fissiamo la topologia ("convergenza") di $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ e sia $\bar{F}$ l'inviluppo semicontinuo inferiore di F. Determinare l'insieme $X = \{u \in L^p(A) : \bar{F}(u) < \infty\}$.

Esercizio 49. Siano (X, τ) uno spazio topologico, $F, F_h : X \to \mathbb{R}$ funzioni e $\bar{F}, \bar{F}_h$ i loro inviluppi semicontinui inferiori, $h \in \mathbb{N}$. Provare che:

i) Se $F_h \to F$ uniformemente su X allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \bar{F}.$$

ii) Se $F_h \to F$ puntualmente ed $(F_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è decrescente allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \bar{F}.$$

iii) Se $(F_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è crescente allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \lim_{h\to\infty} \bar{F}_h.$$

ESERCIZIO 50. Costruire funzioni $F, F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h(x) \neq \lim_{h\to\infty} F_h(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1.11. Vari.

ESERCIZIO 51. Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ e $u_h : A \to \mathbb{R}^2$, $h \in \mathbb{N}$,

$$u_h(x) = \frac{x}{|x| + 1/h}.$$

Provare che $\det \nabla u_h \rightharpoonup \pi\delta$ nel senso delle distribuzioni,

ESERCIZIO 52 (Lagrangiane nulle). Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz e $u, v \in C^2(\bar{A}; \mathbb{R}^2)$ due funzioni tali che $u = v$ su ∂A. Provare che

$$\int_A \det \nabla u \, dx = \int_A \det \nabla v \, dx.$$

ESERCIZIO 53. Costruire una funzione u in $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ tale che $\Delta u \in C(A)$ ma $u \notin C^2(A)$.

ESERCIZIO 54. La lunghezza di una curva continua $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ è

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1, \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto e siano $x, y \in K$ due punti che possono essere collegati da una curva in K di lunghezza finita. Provare che allora sono collegati da una curva in K di lunghezza minima.

ESERCIZIO 55. Dimostrare che la simmetrizzazione di Steiner in $\mathbb{R}^n$ non aumenta il diametro di un insieme.

ESERCIZIO 56. Sia $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una enumerazione di $\mathbb{Q}^2$ e sia $S_k \subset \mathbb{R}^2$ un segmento con punto medio q_k e lunghezza $1/k^2$. Dimostrare che $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$ è 1-rettificabile.

ESERCIZIO 57. Sia E l'unione di tutte le rette che passano per due punti di $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Dimostrare che E è numerabilmente 1-rettificabile e che $\mathscr{H}^1 \llcorner E$ è σ-finita ma non localmente finita.

ESERCIZIO 58. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e chiuso e sia $\pi : \mathbb{R}^n \to K$ la proiezione definita dalla condizione $\pi(x) = y \in K$ se e solo se $|x - y| = \min_{z\in K} |x - z|$. Provare che $\mathscr{H}^s(\pi(E)) \leq \mathscr{H}^s(E)$ per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s \leq n$.

ESERCIZIO 59. Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ il grafico di $u \in C^1([0, 1])$ provare che

$$\mathscr{H}^1(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + u'(x)^2} dx.$$

Esercizio 60. Siano μ, ν due misure vettoriali su $\mathbb{R}^n$ conentrate su insiemi disgiunti, oovero esiste un insieme A tale che $|\mu|(A) = \nu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$. Dimostrare che $|\mu + \nu| = |\mu| + |\nu|$.

Esercizio 61. Sia $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi k-rettificabili. Dimostrare che $\mathrm{Tan}(A_1, x) = \mathrm{Tan}(A_2, x)$ per $\mathscr{H}^k$-q.o. $x \in A_1 \cap A_2$.

Esercizio 62. Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, be the function defined by $f(x) = 1$ if $|x| < 1$ and $f(x) = 0$ if $|x| \geq 1$, with $x \in \mathbb{R}^n$. Prove that $f \in BV(\mathbb{R}^n)$, compute the measure μ and the vector σ given by the structure theorem of BV-functions. Show that $f \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 63. Let $T : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ be the functional

$$T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \quad f \in C_c(\mathbb{R}),$$

where the integral is the Riemann-integral. Show that T il linear and bounded (for the sup-norm, when the support of the functions is contained in a fixed compact set). Compute the measure μ given by Riesz theorem, (i.e., prove that μ must be the Lebesgue measure).

Esercizio 64. Let $\mathscr{A}$ be a σ-algebra on X, let $\mathscr{B}$ be a σ-algebra on Y and let $f : X \to Y$ be measurable (that is, $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ for all $B \in \mathscr{B}$). Let $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ be a measure. Show that $f_\sharp\mu = \nu$ defined by

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B},$$

is a measure, called the *push-forward measure of* μ. Prove the following change-of-variable formula

$$\int_Y g(y)d\nu(y) = \int_X g(f(x))d\mu(x),$$

for any $g \in L^1(Y; \nu)$.

Esercizio 65. Let μ be the Lebesgue measure on $[0, 1]$. Write $[0, 1] = A \cup B$ where $\mu(A) = 0$ and

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

with $K_n \subset [0, 1]$ compact sets containing no open intervals.

Bibliografia

[1] L. Ambrosio & N. Fusco & D. Pallara, Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems, Oxford University Press.

[2] G. Buttazzo & M. Giaquinta & S. Hildebrandt, One-dimensional Variational Problems, Oxford University Press 2008.

[3] B. Dacorogna, Introduction to the Calculus of Variations, Imperial College Press 2015.

[4] B. Dacorogna, Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer 2007.

[5] G. Dal Maso, An Introduction to Γ-Convergence, Birkhäuser 1993.

[6] L. C. Evans & R. F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC press.

[7] H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer.

[8] E. Giusti, Metodi diretti nel calcolo delle variazioni, UMI

[9] J. Jost & X. Li-Jost, Calculus of Variations, Cambridge 2008

[10] S. G. Krantz & H. R. Parks, Geometric Integration Theory, Birkhäuser 2008. È un'introduzione ragionevole alla teoria delle correnti.

[11] F. Maggi, Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems: An Introduction to Geometric Measure Theory, Cambridge 2012.

[12] F. Morgan, Geometric Measure Theory, Academic Press 2008. È un'introduzione al libro di Federer.

[13] C. Villani, Topics in Optimal Transportation, Graduate Studies in Mathematics Vol. 58, Springer

Riferimenti generali

1. Calcolo delle variazioni. Il volume [**3**] di Dacorogna è un'introduzione eccellente che copre il programma fino alle superfici minime. Ci sono moltissimi esercizi con le soluzioni. Un'alternativa è [**9**].

2. Funzionali in dimensione 1. Il libro di Buttazzo, Giaquinta e Hildebrandt [**2**] è interamente dedicato ai funzionali in dimensione 1.

3. Bounded slope condition. Abbiamo seguito il classico libro di Giusti [**8**], che contiene anche la teoria della regolarità.

4. Funzionali negli spazi di Sobolev. Abbiamo semplificato la presentazione fatta in [**4**], un libro avanzato che contiene anche il caso vettoriale.

5. Funzioni BV. Abbiamo seguito l'introduzione agile che si trova in [**6**]. In [**1**] si trova una trattazione più completa, dove c'è una discussione dettagliata del funzional di Mumford-Shah.

6. Insiemi di perimetro finito. Abbiamo di nuovo seguito l'introduzione che si trova in [**6**]. Tuttavia è molto migliore la presentazione in [**11**] che contiene anche la regolarità dei minimi.

7. Teoria geometrica della misura e correnti. Il riferimento obbligatorio è il libro di Federer [**7**], che è di lettura impegnativa. Un'introduzione ragionevole è [**12**]. Noi abbiamo seguito parte della presentazione di [**10**].

8. Γ-convergenza. Un testo di riferimento è [**5**]

9. Trasporto ottimo. Abbiamo seguito il libro di Villani [**13**].