Calcolo delle Variazioni

Foglio 1

consegna entro il 28 marzo 2017

Esercizio 1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$. Provare che sono equivalenti:

A) F è semicontinua inferiormente su X.

B) Per ogni $x_0 \in X$ si ha
$$F(x_0) \le \lim_{r \to 0^+} \inf_{x \in B_r(x_0)} F(x).$$

C) F è sequenzialmente semicontinua inferiormente, ovvero per ogni $x_0 \in X$ ed ogni successione $x_h \to x_0$ si ha
$$F(x_0) \le \liminf_{h \to \infty} F(x_h).$$

Esercizio 2. Sia A un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \times \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ una funzione misurabile tale che:

i) $u \mapsto f(x, u)$ è semicontinua inferiormente in $\mathbb{R}$ per q.o. $x \in A$;

ii) esistono $g \in L^1(A)$, $b \in \mathbb{R}$ e $1 \le p < \infty$ tali che
$$f(x, u) \ge g(x) + b|u|^p, \qquad x \in A, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Provare che la funzione $F : L^p(A) \to (-\infty, \infty]$
$$F(u) = \int_A f(x, u(x))dx,$$
è ben definita (ha valori $\neq -\infty$) ed è semicontinua inferiormente in $L^p(A)$ nella topologia forte.

Esercizio 3. Sull'insieme $X = \{u \in C^1([0, 1]) : u(0) = 1, u(1) = 0\}$ si consideri il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$
$$F(u) = \int_0^1 \big(\mathrm{e}^{u'(x)} + u(x)^2\big)dx.$$

i) Derivare l'equazione di Eulero-Lagrange associata al funzionale F.

ii) Integrare l'equazione con le condizioni iniziali $u(0) = 1$ e $u'(0) = \alpha$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

iii) Provare che F non ha minimo su X.