Calcolo delle Variazioni

Foglio 2

consegna entro il 7 aprile 2017

Esercizio 1. Dati $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ ed $\alpha \in (0,1]$, si consideri $F_\alpha : X \to \mathbb{R}$

$$F_\alpha(u) = \int_{[0,1]} \big(|u'|^\alpha + 3|u-1|\big)dx.$$

Provare che:

i) $\inf_X F_\alpha = 0$ se $0 < \alpha < 1$, e $\inf_X F_1 \le 2$ se $\alpha = 1$.

ii) F_α non ha minimo su X.

Esercizio 2. (Moltiplicatori di Lagrange) Si considerino lo spazio funzionale $X = \{u \in C^1(-1,1) \cap C([-1,1]) : u(\pm 1) = 0\}$ ed $F, G : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + u'(x)^2}dx, \qquad G(u) = \int_{-1}^{1} u(x)\,dx.$$

i) Date $\varphi, \psi \in C_c^\infty(-1,1)$ definiamo $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(\varepsilon, \tau) = G(u + \varepsilon\varphi + \tau\psi)$. Provare che esiste una funzione di classe C^1, $\varepsilon \mapsto \tau(\varepsilon)$, tale che $H(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) = v$ per ogni $|\varepsilon| < \delta$.

ii) Supponiamo che $u \in X$ sia un minimo di F soggetta al vincolo $G(u) = v$ per qualche costante $v > 0$. Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (il "moltiplicatore di Lagrange", in questo caso la curvatura) tale che

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\Big) = \lambda.$$

iii) Integrare l'equazione precedente.

Abbiamo risolto (in parte) il "Problema di Didone". È facile generalizzare l'esempio ad F e G più generali.

Esercizio 3. Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ ed $M \ge 0$. Sull'insieme di funzioni

$$\mathcal{A}_M = \big\{u \in C(\bar{A}) \cap C^1(A) : u = 0 \text{ su } |x| = 2 \text{ ed } u = M \text{ su } |x| = 1\big\}$$

consideriamo il problema di minimo $\min\{F(u) : u \in \mathcal{A}_M\}$ dove $F : \mathcal{A}_M \to [0, \infty]$ è il funzionale dell'area

$$F(u) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}dx.$$

Provare le seguenti affermazioni:

i) Se il minimo esiste allora è unico.

ii) Se il minimo esiste allora è della forma $u(x) = \varphi(|x|)$ con $\varphi \in C([1,2]) \cap C^1(1,2)$.

iii) Per una funzione u come nel punto precedente ("u radiale") si ha

$$F(u) = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+\varphi'(r)^2} r dr.$$

iv) Per un minimo radiale $u(x) = \varphi(|x|)$ si ha

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{r\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\Big) = 0, \quad r \in (1,2).$$

v) Provare che esiste $M_0 > 0$ tale che per $M > M_0$ il problema di minimo in esame non ha soluzione.