Calcolo delle Variazioni

Foglio 3

consegna entro il 21 aprile 2017

Esercizio 1. Sia X l'insieme delle funzioni $\chi \in H^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ tali che $\chi(0) = 1/2$ e tali che esistano i limiti

$$\chi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \chi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \chi(\infty) = \lim_{x\to\infty} \chi(x) = 1,$$

e si consideri il funzionale $F : X \to [0, \infty]$

$$F(\chi) = \int_{\mathbb{R}} \big(\chi'^2 + \chi^2(1-\chi)^2\big)dx.$$

Provare che F ha minimo su X e calcolarlo.

Suggerimenti. Sia $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzate. Si può supporre $0 \le \chi_n \le 1$. Estrarre una sottosuccessione che converge debolmente in $H^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$. Si potrà anche avere convergenza puntuale quasi ovunque. Semicontinuità inferiore. Dedurre l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole. Il minimo χ è più regolare. Integrare l'equazione ed arrivare alla soluzione esplicita.

Esercizio 2. Per $n \ge 1$ ed $R > 1$ consideriamo l'insieme di funzioni

$$\mathscr{A}_R = \big\{u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n) : u(x) \ge 1 \text{ per } |x| \le 1 \text{ e } u(x) = 0 \text{ per } |x| \ge R\big\}.$$

Provare che il funzionale $F : \mathscr{A}_R \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

ha minimo su $\mathscr{A}_R$.

Suggerimenti. Provare l'esistenza in $H^1_0(B_R)$. Provare l'unicità per stretta convessità. Dedurre la simmetria radiale del minimo dall'unicità. Derivare l'equazione di Eulero-Lagrange nel caso simmetrico. Calcolare il minimo risolvendo l'equazione differenziale ordinaria. Constatare a posteriori che il minimo u è Lipschitz.

Esercizio 3. Sia μ una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ si abbia

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}\varphi \, d\mu\Big| \le \|\varphi\|_\infty.$$

Provare che esiste una funzione $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mu = f\,\mathscr{L}^n$.

Suggerimenti: regolarizzazioni, compattezza.