Calcolo delle Variazioni

Foglio 4

Insiemi di perimetro finito — consegna entro il 12 maggio 2017

Esercizio 1. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile di perimetro finito, ovvero

$$P(E) = \sup \Big\{ \int_E \varphi'(x)dx : \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \Big\} < \infty.$$

Provare che, a meno di un insieme di misura nulla, E è un'unione finita di intervalli.

Esercizio 2. (Problema con peso, come in Frank Morgan) Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione strettamente convessa e pari. Per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$ definiamo il perimetro con peso

$$P(E) = \sup \Big\{ \int_E (\varphi(x)\mathrm{e}^{g(x)})'dx : \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \Big\},$$

ed il volume

$$V(E) = \int_E \mathrm{e}^{g(x)}dx.$$

1) Provare che il seguente problema ha minimo unico:

$$\min\{P(E) : E \subset \mathbb{R} \text{ intervallo con } V(E) = 1 \ \}.$$

2) Studiare il seguente problema di minimo:

$$\min\{P(E) : E \subset \mathbb{R} \text{ insieme misurabile con } V(E) = 1 \ \}.$$

Esercizio 3. (Problema geodetico) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un insieme chiuso e connesso per archi rettificabili. Provare che ogni coppia di punti in K si collega con almeno una curva di lunghezza minima contenuta in K.