Calcolo delle Variazioni — Foglio 5

Esercizi vari — consegna entro il 7 giugno 2017

Esercizio 1. Siano (X,τ) uno spazio topologico, $F, F_h : X \to \mathbb{R}$ funzioni e $\bar{F}, \bar{F}_h$ i loro inviluppi semicontinui inferiori, $h \in \mathbb{N}$. Provare che:

i) Se $F_h \to F$ uniformemente su X allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \bar{F}.$$

ii) Se $(F_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è crescente allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \lim_{h\to\infty} \bar{F}_h.$$

Esercizio 2. (Correnti e insiemi di perimetro finito) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile (di misura finita) e sia $T \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^n)$ la corrente

$$T(\omega) = \int_E \omega = \int_E f(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_E f(x)dx,$$

per ogni $\omega \in \mathscr{D}^n(\mathbb{R}^n)$ della forma $\omega = f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ con $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Provare che la corrente bordo ∂T ha massa finita se e solo se E ha perimetro finito.

Esercizio 3. Siano $K = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\tau \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$. Provare che

$$T(\omega) = \int_K \omega(\tau) d\mathscr{H}^1, \quad \omega \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}^2),$$

definisce una corrente $T \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}^2)$ di massa finita. Stabilire se ∂T ha massa finita.

Esercizio 4. (Calibrazione) Siano $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un insieme aperto ed $f \in C^2(A)$ una funzione che risolve l'equazione delle superfici minime

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\Big) = 0 \quad \text{in } A.$$

Provare che il grafico $S = \operatorname{gr}(f)$ è un minimo dell'area nel cilindro $A \times \mathbb{R}$. Precisamente, provare che per ogni $(n-1)$-superficie $T \subset A \times \mathbb{R}$ di classe C^1 e con $S\Delta T = S \setminus T \cup T \setminus S$ contenuto in modo compatto in $A \times \mathbb{R}$ si verifica

$$\mathscr{H}^{n-1}(S) \le \mathscr{H}^{n-1}(T).$$