Calcolo delle Variazioni Foglio 4

consegna entro il 4 giugno 2018

Esercizio 1. Siano (X, τ) uno spazio topologico, $F, F_h : X \to \mathbb{R}$ funzioni e $\bar{F}, \bar{F}_h$ i loro inviluppi semicontinui inferiori, $h \in \mathbb{N}$. Provare che:

i) Se $F_h \to F$ uniformemente su X allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \bar{F}.$$

ii) Se $(F_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è crescente allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \lim_{h\to\infty} \bar{F}_h.$$

Esercizio 2. (Tripunto) Sia C l'insieme dei vertici $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ di un triangolo equilatero. Calcolare l'insieme $K \subset \mathbb{R}^2$ che risolve il problema di lunghezza minimaminimo

$$\min \big\{ \mathscr{H}^1(K) : K \subset \mathbb{R}^2 \text{ compatto e connesso con } C \subset K \big\}.$$

Esercizio 3. (Calibrazione) Siano $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$, un insieme aperto ed $f \in C^2(A)$ una funzione che risolve la seguente equazione differenziale alle derivate parziali (equazione delle superfici minime)

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla f(x)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}} \Big) = 0 \quad x \in A.$$

Siano poi $E = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in A, x_n < f(x')\}$ il sottografico di f ed $S = \partial E \cap A \times \mathbb{R}$ il suo grafico.

Provare che per ogni insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ tale che $T = \partial F \cap A \times F$ sia un superficie di classe C^∞ e $E \Delta F$ sia un insieme con chiusura compatta in $A \times \mathbb{R}$ si verifica

$$\mathscr{H}^{n-1}(S) \leq \mathscr{H}^{n-1}(T).$$