Calculus of Variations
Preliminary program of the course - 2020

(1) Classic functionals of the Calculus of Variations
   (a) Euler-Lagrange's equations
   (b) Du Bois-Reymond's equation
   (c) Indirect methods and convexity methods
   (d) Fermat's principle for the geometrical optics
   (e) Brachistochrone's problem

(2) Semi-direct methods
   (a) Functionals depending on the gradient
   (b) Bounded slope condition

(3) Direct method of the Calculus of Variations

(4) Functional in Sobolev spaces
   (a) Brief review on Sobolev spaces
   (b) Convexity and lower-semicontinuity in $W^{1,p}$
   (c) Existence of minimizers in $W^{1,p}$
   (d) Examples
   (e) Interior Sobolev regularity
   (f) Schauder regularity and De Giorgi-Nash theorem (without proofs)

(5) Plateau's problem
   (a) The parametric formulation of Douglas-Radò
   (b) Brief introductions to BV functions and sets with finite perimeter
   (c) Plateau's problem for sets with finite perimeter

(6) Γ-convergence and applications to phase transition
   (a) Relaxation and Γ-limits
   (b) Convergence of minima and minimizers
   (c) Applications: Modica-Mortola functional and perimeter
   (d) De Giorgi's conjecture on the equation $\Delta u = -u(u^2 - 1)$

(7) The isoperimetric property of the sphere and its applications
   (a) Steiner's rearrangement
   (b) Isoperimetric property of the sphere
   (c) Quantitative version of the isoperimetric inequality
   (d) The best shape of a drum: minimum eigenvalue for $\Delta u = \lambda u$
   (e) Schwarz's rearrangement and sharp Sobolev inequalities
   (f) The Yamabe's equation $\Delta u = -u^{\frac{n+2}{n-2}}$

(8) Introduction into the theory of optimal transportation
   (a) Monge's problem
   (b) Kantorovic's formulation
   (c) Brenier's theorem
   (d) Another proof of the isoperimetric inequality

(9) Introduction to the theory of currents
   (a) Brief review on exterior algebras. Currents, mass and boundary
   (b) The Plateau's problem for rectifiable currents
   (c) Overview on the regularity of minimal surfaces. Simon's cone
   (d) Holomorphic manifolds are area minimizers

EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE PER FUNZIONALI CLASSICI

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con proprietà da discutere.
Usiamo le variabili $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.
La funzione L è detta Lagrangiana.
Posto che sia ben definito, consideriamo il funzionale
$F : C^1(A) \to \mathbb{R}$

$$(*) \qquad F(u) = \int_A L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx ,$$

Bisogna assicurarsi che $x \mapsto L(x, u(x), \nabla u(x))$ sia integrabile.
Un funzionale integrale della forma $(*)$ si dice funzionale classico del Calcolo delle Variazioni.

Supponiamo che $u \in C^1(A)$ sia un minimo per variazioni compatte:

$$F(u) \leq F(u+\varphi) \qquad \forall \varphi \in C^1_c(A) .$$

Fissiamo una $\varphi \in C^1_c(A)$ e consideriamo
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = F(u + t\varphi) , \qquad t \in \mathbb{R} .$$

Allora f ha un minimo in $t=0$ e se è

derivabile in $t=0$ allora deve essere $f'(0)=0$.

Con dei conti da giustificare caso per caso si trova

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\int_A L(x, u(x)+t\varphi(x), \nabla u(x)+t\nabla\varphi(x))\,dx$$

Da giustificare

$$= \int_A \frac{d}{dt}\Big(L(x, u(x)+t\varphi(x), \nabla u(x)+t\nabla\varphi(x))\Big)\,dx$$

Da giust.

$$= \int_A \Big(L_u(\ldots)\,\varphi(x) + \langle \nabla_\xi L(\ldots), \nabla\varphi(x)\rangle\Big)\,dx.$$

Devono esistere le derivate $L_u = \frac{\partial L}{\partial u}$ e $L_{\xi_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i}$, $i=1,\ldots,n$.

Mettendo $t=0$ si trova l'<u>equazione di Eulero-Lagrange in forma debole</u>:

$$(\mathrm{ELd})\quad 0 = \int_A \Big(L_u(x,u(x),\nabla u(x))\,\varphi(x) + \langle \underbrace{\nabla_\xi L(x,u(x),\nabla u(x))}_{=\,G(x)}, \nabla\varphi(x)\rangle\Big)\,dx,$$

che è verificata $\forall \varphi \in C^1_c(A)$.

Se $G : A \to \mathbb{R}^n$, $G(x) = \nabla_\xi L(x,u(x),\nabla u(x))$, è di classe $C^1(A;\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\langle G(x), \nabla\varphi(x)\rangle = \mathrm{div}(\varphi(x)\,G(x)) - \varphi(x)\,\mathrm{div}\,G(x)$$

Ora usiamo il seguente Lemma

<u>Lemma</u> Se $\varphi \in C^1_c(A)$ e $G \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ allora

$$\int_A \operatorname{div}(\varphi(x)\, G(x))\, dx = 0.$$

Segue dal teorema della divergenza o anche – più semplicemente – da Fubini-Tonelli e dal teorema fondamentale del calcolo integrale.

Dunque, l'equazione di Eulero-Lagrange (ELd) diventa

$$0 = \int_A \varphi(x) \left\{ L_u(x, u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div}\left(\nabla_\xi L(x, u(x), \nabla u)\right)\right\} dx$$

per ogni $\varphi \in C^1_c(A)$.

Ora usiamo il seguente Lemma

<u>Lemma</u> Sia $f \in C(A)$. Se $\int_A \varphi(x)\, f(x)\, dx = 0$ per ogni $\varphi \in C^\infty_c(A)$ allora $f = 0$.

Se fosse $f \in L^1_{loc}(A)$ si avrebbe $f = 0$ q.o. su A.

Dunque, se $x \mapsto \{\dots\}$ è continua si trova l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\text{(EL)} \qquad \operatorname{div}\left(\nabla_\xi L(x, u(x), \nabla u(x))\right) = L_u(x, u(x), \nabla u(x)),$$
$$x \in A$$

Qui abbiamo bisogno di $u \in C^2(A)$.

L'equazione (EL) è un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine in forma di divergenza.

Esempi

① Funzioni armoniche. Quando $L(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ si ha $L_u = 0$ e $\nabla_\xi L = \xi$.

Dunque l'equazione di Eulero-Lagrange per

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_A |\nabla u|^2 dx \quad \text{è} \quad \Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = 0 \text{ in } A$$

② p-Laplaciano. Dato $p > 1$:

$$F(u) = \frac{1}{p}\int_A |\nabla u|^p dx \xrightarrow{EL} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$$

(3) Superfici minime. Per il funzionale dell'Area

$$F(u) = \int_A \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx \xrightarrow{EL} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$$

Questa è l'equazione delle superfici minime

In (1) - (2) - (3) F è convesso.
L'equazione in (1) è lineare.
Le equazioni in (2) - (3) sono non lineari.

EQUAZIONE DI DU BOIS-REYMOND

In dimensione $n=1$, l'equazione di Eulero-Lagrange si può integrare esplicitamente una volta, a patto che la Lagrangiana sia "autonoma" ovvero non dipenda dal punto $x \in A$ con $A \subset \mathbb{R}$ intervallo.

Sia $L : \underset{\substack{\Downarrow \\ u}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\Downarrow \\ \xi}}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ almeno di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$

e sia $u \in C^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}$ intervallo, una soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\left(L_\xi(u,u') \right)' - L_u(u,u') = 0 \quad \text{su } A,$$

Consideriamo la funzione ausiliaria $H = H(x)$

$$H(x) = u'(x)\, L_\xi(u(x), u'(x)) - L(u(x), u'(x)).$$

La sua derivata è

$$\begin{aligned} H' &= \cancel{u''\, L_\xi(u,u')} + u' \left(L_\xi(u,u') \right)' \\ &\quad - L_u(u,u')\, u' - \cancel{L_\xi(u,u')\, u''} \\ &= u' \left\{ \left(L_\xi(u,u') \right)' - L_u(u,u') \right\} = 0. \end{aligned}$$

Quindi esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$H = u' L_\xi(u,u') - L(u,u') = C \quad \text{su } A.$$

Questa è l'equazione di Du Bois-Reymond.

$\square$

METODO DI CONVESSITÀ (Metodi indiretti)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera "regolare" (per il Teorema della divergenza), ad esempio localmente grafico di una funzione Lipschitz.

Sia $L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

1) $L \in C^2(\bar{A} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$;

2) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (u, \xi) \longmapsto L(x, u, \xi)$ è convessa per ogni $x \in A$.

Consideriamo il funzionale $F : C^1(\bar{A}) \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx .$$

Sia $\varphi : \partial A \to \mathbb{R}$ una funzione continua assegnata.

Sia $u \in C^1(\bar{A})$ una funzione tale che:

i) $u = \varphi$ su ∂A;

ii) u verifica in senso debole l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$0 = \int_A \left\{ \psi(x)\, L_u(x, u, \nabla u) + \langle \nabla_\xi L(x, u, \nabla u), \nabla \psi \rangle \right\} dx$$

per ogni $\psi \in C^1(\bar{A})$ tale che $\psi = 0$ su ∂A.

TEOREMA Nelle ipotesi precedenti la funzione $u \in C^1(\bar{A})$ è un minimo del problema

$$\min \{ F(v) \ ; \ v \in C^1(\bar{A}), \quad v = \varphi \text{ su } \partial A \}.$$

DIM. Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = F(u + t(v-u)) .$$

Allora $f(1) = F(v)$ ed $f(0) = F(u)$.
Vogliamo provare che $f(1) \geq f(0)$.
Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ esiste $t^* \in [0,1]$ tale che

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(t^*).$$

Calcoliamo

$$f'(t)\Big|_{t=0} = \int_A \frac{d}{dt} L(x, u + t(v-u), \nabla u + t \nabla (v-u))\, dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_A \Big(L_u(\ldots)(v-u) + \langle \nabla_\xi L(\ldots), \nabla(v-u) \rangle \Big) dx \Big|_{t=0}$$

$$= 0,$$

in quanto $\psi = v - u \in C^1(\bar{A})$ è $\equiv 0$ su ∂A.

Quindi usando (ii) si trova $f'(0) = 0$.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(t) = \int_A \Big\langle H_{(u,\xi)} L(\ldots)\,(u-v, \nabla u - \nabla v), (u-v, \nabla u - \nabla v)\Big\rangle$$

dove $H_{(u,\xi)} L$ è la matrice Hessiana di L. La derivata dentro l'integrale è lecita. Per la convessità si ha:

$$\langle H_{(u,\xi)} L(x, u+t(v-u), \nabla u + t\nabla(v-u))\,(u-v, \nabla u - \nabla v), (u-v, \nabla u - \nabla v)\rangle \geq 0$$

in ogni punto $x \in A$ e per ogni $t \in [0,1]$. La tesi segue.

$\square$

<u>ESEMPIO</u> (Legge dell'ottica geometrica)

Sia $f \in L^\infty(0,1)$ una funzione tale che $0 < m \leq f(x)\ (\leq M)$ per ogni $x \in (0,1)$.

Per $u \in \mathrm{Lip}([0,1])$ si consideri

$$F(u) = \int_{[0,1]} f(x) \underbrace{\sqrt{1 + u'(x)^2}}_{\text{elemento di lunghezza}}\, dx$$

$f(x)$: densità ottica che dipende dallo spazio (mezzo)

La funzione $\xi \longmapsto \sqrt{1+\xi^2}$ è strettamente convessa. La sua derivata è $\xi / \sqrt{1+\xi^2}$.

L'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole è

$$\int_{[0,1]} f(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \varphi'(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1).$$

Questo implica che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che (ESERCIZIO!)

$$f(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} = C \quad \text{per q.o. } x \in (0,1).$$

Siccome $f(x) > 0$ deduciamo che $u'(x)$ ha segno costante (q.o.). Inoltre

$$f(x)^2 u'(x)^2 = C^2 (1 + u'(x)^2) \iff$$

$$u'(x)^2 (f(x)^2 - C^2) = C^2$$

Dunque $f(x)^2 > C^2$. (ovvero $|C| < f(x)$).

In definitiva:

$$u'(x) = \pm \sqrt{\frac{C^2}{f(x)^2 - C^2}} \quad \text{per q.o. } x$$

Fissiamo un punto iniziale $(0,u_0) \in \mathbb{R}^2$ e un punto finale $(1,u_1) \in \mathbb{R}^2$. Per fissare le idee supponiamo $u_1 \geq u_0$ e quindi scegliamo il segno $+$ in u'. Integrando

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \sqrt{\frac{c^2}{f(t)^2 - c^2}}\, dt .$$

La condizione finale è

$$(*) \qquad u(1) = u_1 = u_0 + \int_0^1 \sqrt{\frac{c^2}{f(t)^2 - c^2}}\, dt .$$

Sia

$$m := \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} \, ; \, f(x) \geq \lambda \text{ per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } x \in [0,1] \}$$

l'estremo inferiore essenziale di f. Per ipotesi abbiamo $m > 0$. Deve essere

$$c^2 < m^2.$$

La funzione $g : [0, m^2) \longrightarrow [0,\infty)$

$$g(s) = \int_0^1 \sqrt{\frac{s}{f(t)^2 - s}}\, dt$$

è continua e strettamente crescente.

Sia $\Delta = \lim_{s \to m^2} g(s)$. Dunque, se

$$u_1 - u_0 < \Delta$$

esiste una unica $c \in [0, m)$ tale che la condizione di punto finale (*) sia verificata.

<u>TEOREMA</u> Siano $0 \leq u_1 - u_0 < \Delta$ e

$$X = \{ u \in Lip([0,1]) \; ; \; u(0) = u_0 \text{ e } u(1) = u_1 \}.$$

Allora il funzionale $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} f(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} \, dx$$

ha minimo unico su X.

DIM. Abbiamo trovato un unico elemento di X che verifica l'equazione di Eulero-Lagrange e le condizioni al bordo. Per convessità questo elemento è un punto di minimo.

$\square$

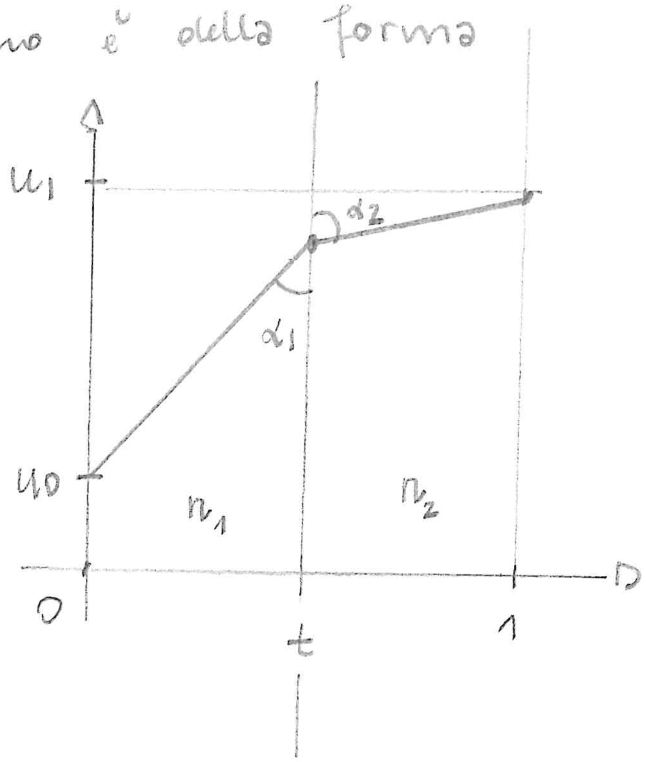
Principio di Fermat

Fissiamo $t \in (0,1)$ e supponiamo che

$$f(x) = \begin{cases} n_1 & x \in (0,t), \\ n_2 & x \in (t,1). \end{cases}$$

con $n_1 > 0$ ed $n_2 > 0$, costanti.

Il minimo è della forma



Gli angoli α_1 e α_2 sono determinati.

Dedurre la legge di rifrazione:

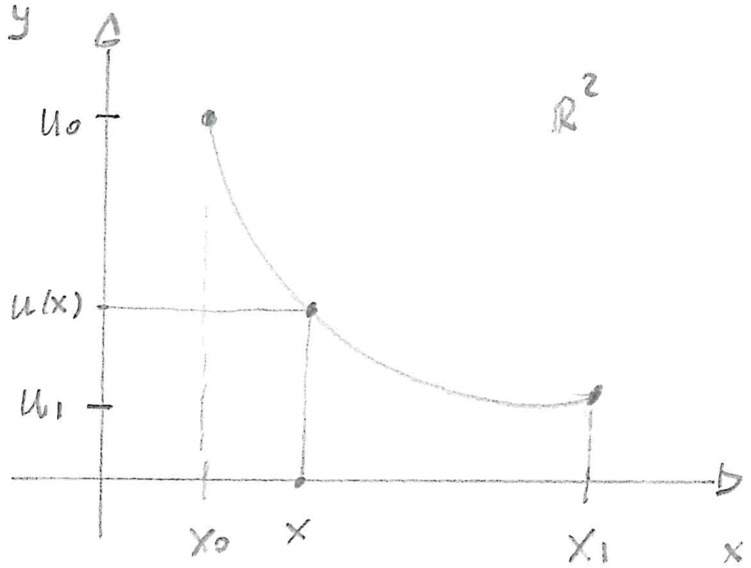
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}.$$

PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRÓNA

Siano $x_0 < x_1$ e $u_0 > u_1$.

Trovare la traiettoria che una particella percorre in tempo minimo cadendo sotto la forza di gravità, partendo dal punto $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ arrivando al punto $(x_1, u_1) \in \mathbb{R}^2$, "senza frizione".

Galileo 1638 : Arco di circonferenza.



m = massa g = costante gravitazionale

v = velocità ($v = 0$ nel punto (x_0, u_0))

$u(x)$ = altezza all'ascissa $x \in [x_0, x_1]$

Conservazione energia:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g u(x) = m g u_0$$

e quindi $v = \sqrt{2g(u_0 - u)}$. La velocità è

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad s = \text{lunghezza curvilinea}$$

e quindi $dt = ds/v$. Il tempo totale è

$$F(u) := T = \left(\int \frac{ds}{v} = \right) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{2g(u_0 - u(x))}} \, dx$$

Possiamo supporre $2g = 1$. La funzione

$$(u, \xi) \longmapsto \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{u_0 - u}}$$

non sembra convessa. Tuttavia prendendo

$$v = \sqrt{u_0 - u} \geq 0$$

con $v^2 = u_0 - u$ e $u' = -2vv'$ si trova

$$G(v) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1}{v(x)^2} + 4v'(x)^2} \, dx .$$

La funzione

$$(v,\xi) \longmapsto \sqrt{\frac{1}{v^2}+4\xi^2} = \sup_{\substack{\alpha^2+\beta^2=1 \\ \alpha>0}} \left(\frac{\alpha}{v} + 2\beta\xi \right)$$

definita per $v>0$ e $\xi \in \mathbb{R}$ è convessa, in quanto sup di funzioni convesse.

Dunque, i punti stazionari (soluzioni di Eulero-Lagrange) del funzionale

$$F(u) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u_0-u(x)}}\, dx$$

con $u(0)=u_0$ e $u(1)=u_1$ sono minimi del problema

$$\min \left\{ F(u) \; ; \; \begin{array}{c} u \in C([x_0,x_1]) \cap C^2(x_0,x_1) \\ u(0)=u_0,\ u(1)=u_1,\ u'<0 \end{array} \right\}.$$

La Lagrangiana $L(u,\xi) = \sqrt{1+\xi^2} / \sqrt{u_0-u}$ ha le derivate

$$L_\xi = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{u_0-u}}, \qquad L_u = +\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{(u_0-u)^{3/2}}.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è:

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u}} \right)' = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+u'^2}}{(u_0-u)^{3/2}} .$$

In realtà l'equazione si può integrare con il metodo di Du Bois-Reymond; esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{u'^2}{\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u}} - \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u_0-u}} = C$$

che diventa

$$-1 = C\,\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u} .$$

Quindi $C<0$ e quadrando:

$$(1+u'^2)(u_0-u) = \frac{1}{C^2} ,$$

ovvero

$$u'\sqrt{\frac{C^2(u_0-u)}{1-C^2(u_0-u)}} = -1$$

Integrando si trova

$$\int_{x_0}^{x} u'(t) \sqrt{\frac{c^2 (u_0 - u(t))}{1 - c^2 (u_0 - u(t))}} \, dt = -(x - x_0)$$

ovvero

$$\int_{u(x)}^{u_0} \sqrt{\frac{c^2 (u_0 - \tau)}{1 - c^2 (u_0 - \tau)}} \, d\tau = x - x_0$$

con $x = x_1$ si trova la condizione

$$(*) \qquad \int_{u_1}^{u_0} \sqrt{\frac{c^2 (u_0 - \tau)}{1 - c^2 (u_0 - \tau)}} \, d\tau = x_1 - x_0 .$$

La costante c deve verificare $1 - c^2 (u_0 - \tau) > 0$ per ogni $\tau \in (u_1, u_0)$ e quindi

$$0 \leq c^2 < \frac{1}{u_0 - u_1} .$$

L'equazione $(*)$ ha soluzione unica c^2 se

$$(**) \qquad x_1 - x_0 < \int_{u_1}^{u_0} \sqrt{\frac{u_0 - \tau}{\tau - u_1}} \, d\tau ,$$

Riassumiamo la discussione precedente nel seguente teorema.

<u>TEOREMA</u> Siano $x_0 \leq x_1$ e $u_0 \geq u_1$ numeri reali che verificano (**). Sia poi

$$X = \left\{ u \in C([x_0,x_1]) \cap C^2(x_0,x_1) \; ; \; \begin{array}{l} u(x_0) = u_0 \\ u(x_1) = u_1 \\ u' < 0 \end{array} \right\}$$

e sia $F : X \to [0,\infty]$

$$F(u) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u_0 - u(x)}} \, dx .$$

Allora F ha minimo unico su X.

La dimostrazione è nelle pagine precedenti. In effetti il grafico del minimo u descrive un arco di cicloide.

BOUNDED SLOPE CONDITION

- $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato,
- $U : \partial A \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione assegnata (Lipschitz continua),
- $\mathcal{A} = \{ u \in Lip(\bar{A}) \; : \; u|_{\partial A} = U \}$

classe di funzioni ammesse,

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione convessa.

Consideriamo il funzionale $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A f(\nabla u(x))\, dx .$$

Dipende dal solo gradiente.
Per il Teorema di Rademacher $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^n$ esiste per q.o. $x \in A$, e inoltre $|\nabla u(x)| \leq Lip(u)$, la costante di Lipschitz di u.
Inoltre, $x \longmapsto f(\nabla u(x))$ e' in $L^\infty(A)$ e quindi l'integrale converge.
Vogliamo studiare l'esistenza del minimo

$$\min \{ F(u) \; : \; \underbrace{u \in Lip(\bar{A}) \text{ e } u|_{\partial A} = U}_{u \in \mathcal{A}} \}.$$

ESEMPIO (Funzionale dell'area) La funzione $f(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$ è strettamente convessa e

$$F(u) = \int_A \sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}\, dx$$

è il funzionale dell'area.
Negli spazi di Sobolev l'ambiente naturale sarebbe $W^{1,1}(A)$ con $p=1$, quindi.

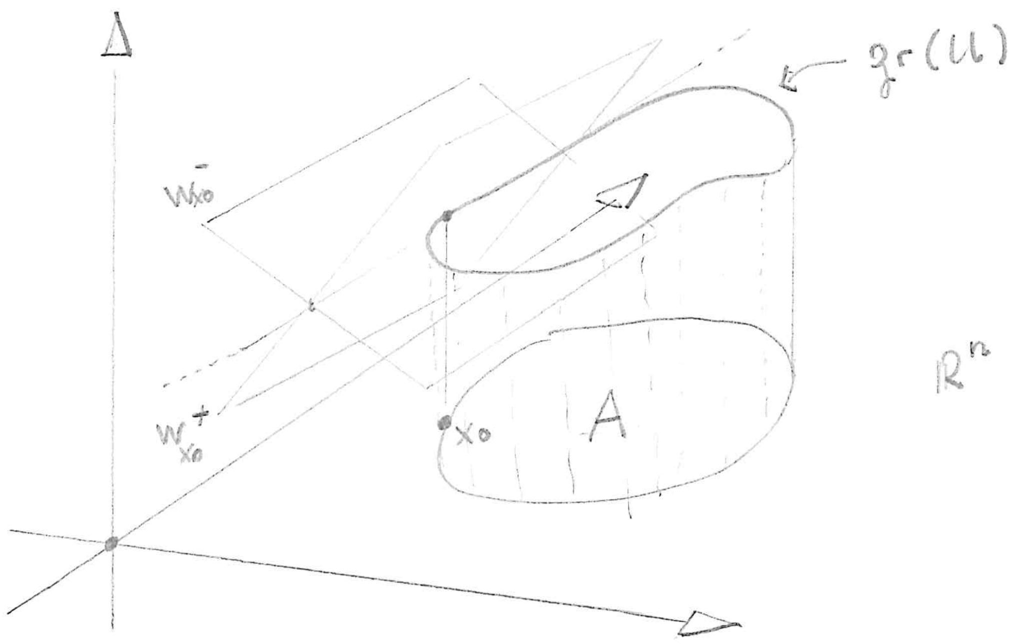
Assegnata $U \in Lip(\partial A)$ vogliamo trovare il grafico di area minima che ha come bordo il grafico di U. Non sempre esiste.

DEFINIZIONE (Bounded slope condition - Pendenza limitata)
La coppia (A, U), con $U : \partial A \to \mathbb{R}$, verifica la bounded slope condition (BSC) se:
Esiste $Q > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \partial A$ esistono $w^-_{x_0}$, $w^+_{x_0}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affini tali che:

i) $w^-_{x_0} \leq U \leq w^+_{x_0}$ su ∂A;

ii) $w^-_{x_0}(x_0) = U(x_0) = w^+_{x_0}(x_0)$;

iii) $Lip(w^{\pm}_{x_0}) \leq Q$.



<u>ESERCIZIO</u> Supponiamo che u non sia affine. Provare che:

$$(A, u) \text{ verifica BSC} \implies A \text{ è convesso.}$$

<u>REMARK</u> Se ∂A è di classe C^2 e le curvature principali di ∂A sono positive (>0) in ogni punto allora (A, u) verifica BSC per ogni $u \in C^2(\partial A)$. Teorema di Miranda, vedi Giusti Metodi Diretti del CdV Sez. 1.2.

Nostro obiettivo è di provare il seguente risultato.

limitato

TEOREMA 1 Supponiamo che $(A, \mathcal{U})$ verifichi BSC, e sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (strettamente) convessa.
Allora il minimo

$$\min \left\{ \int_A f(Du(x))\,dx \ ; \ u \in Lip(\bar{A}) \text{ e } u|_{\partial A} = \mathcal{U} \right\}$$

è raggiunto (in modo unico se c'è "strettamente").

NOTAZIONI

$$Lip(u) = Lip_A(u) = \sup_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|}$$

$$Lip(A) = \{ u : \bar{A} \to \mathbb{R} \ | \ Lip(u) < \infty \}$$

$$Lip_K(A) = \{ u \in Lip(A) \ ; \ Lip(u) \leq K \} , \quad K>0$$

$$Lip(A; \mathcal{U}) = \{ u \in Lip(A) \ ; \ u|_{\partial A} = \mathcal{U} \}$$

$$Lip_K(A; \mathcal{U}) = \{ u \in Lip(A; \mathcal{U}) \ ; \ Lip(u) \leq K \}.$$

Proposizione 2 Siano $K > 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa e $\mathcal{U} \in Lip_K(\partial A)$. Allora il minimo

$$\min \left\{ F(u) = \int_A f(Du(x))\,dx \ ; \ u \in Lip_K(A; \mathcal{U}) \right\}$$

è raggiunto.

DIM. In primo luogo $Lip_k(A;u) \neq \emptyset$, segue dal Teorema di estensione di Mac Shane.

→ Supponiamo per semplicità $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Sia $L = \inf\{ F(u) ; u \in Lip_k(A;u) \}$ e consideriamo una successione minimizzante $u_h \in Lip_k(A;u)$, $h \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{h\to\infty} F(u_h) = L \in [-\infty, \infty).$$
$$(L \in \mathbb{R})$$

Abbiamo :

($x_0 \in \partial A$ a piacere)

i) $Lip(u_h) \leq K \quad \forall h$

ii) $|u_h(x)| \leq |u_h(x) - u_h(x_0)| + |u_h(x_0)|$

$$\leq K|x - x_0| + |u(x_0)|$$

$$\leq K \operatorname{diam}(A) + |u(x_0)| \quad \forall x \in A \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Siamo nelle ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzelà. Quindi esiste una sottosuccessione – chiamata ancora $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ – che converge uniformemente ad una funzione $u \in Lip_k(A;u)$:

$$\lim_{h\to\infty} \max_{x\in\bar{A}} |u_h(x) - u(x)| = 0.$$

Dalla convessità di f:

$$f(\nabla u_h(x)) = f(\nabla u(x) + \nabla(u_h(x) - u(x))) \geq$$

Esiste q.o.

$$\geq f(\nabla u(x)) + \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h(x) - u(x)) \rangle$$

e quindi

$$F(u_h) \geq F(u) + \int_A \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h(x) - u(x)) \rangle \, dx.$$

Vogliamo usare la convergenza uniforme $u_h \rightrightarrows u$: bisogna togliere le derivate.
Siccome $\nabla f(\nabla u(x)) \in L^\infty(A; \mathbb{R}^n)$, $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_A |G(x) - \nabla f(\nabla u(x))| \, dx \leq \varepsilon.$$

Dunque

$$\int_A \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h - u) \rangle \, dx = \int_A \langle G, \nabla(u_h - u) \rangle \, dx +$$

$$+ \int_A \langle \nabla f(\nabla u) - G, \nabla(u_h - u) \rangle \, dx$$

$$\leq \int_A \langle G, \nabla(u_h - u) \rangle \, dx + 2K\varepsilon.$$

Con una integrazione per parti e usando $u_h - u = 0$ su ∂A

$$\int_A \langle G, \nabla(u_h - u)\rangle\, dx = - \underbrace{\int_A \operatorname{div}(G)(u_h - u)\, dx}_{\substack{\downarrow\ h\to\infty \\ 0}}$$

Concludiamo che

$$L = \lim_{h\to\infty} F(u_h) \geq F(u) - 2K\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

e quindi $F(u) \leq L$ e quindi $F(u) = L$.

$\square$

<u>REMARK</u> Sia u il minimo della Proposizione 2.

Se fosse $\mathrm{Lip}(u) < K$ potremmo procedere nel seguente modo.

Sia $v \in \mathrm{Lip}(A; u)$ solamente con $\mathrm{Lip}(v) < \infty$.

Per $t \in (0,1)$ piccolo risulta $u + t(v-u) \in \mathrm{Lip}_K(A; u)$ e quindi:

$$F(u) \leq F(tv + (1-t)u) \overset{\text{convessità}}{\leq} tF(v) + (1-t)F(u)$$

$$\Downarrow \quad (t>0)$$

$$F(u) \leq F(v)$$

Dunque, u sarebbe anche minimo per il TEOR. 1.

$\square$

DEFINIZIONE Una funzione $w \in Lip_k(A)$ si dice super-minimo del funzionale F se per ogni $\theta \in Lip_k(A, w)$ si ha

$$w \leq \theta \text{ in } A \implies F(w) \leq F(\theta).$$

Una funzione $v \in Lip_k(A)$ si dice sub-minimo per F se per ogni $\theta \in Lip_k(A, v)$ si ha

$$\theta \leq v \text{ in } A \implies F(v) \leq F(\theta).$$

COMMENTO I minimi di F (con dato al bordo fissato) sono sia super- che sub-minimi

TEOREMA (Principio del Massimo) Siano $k > 0$ ed $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strettamente convessa. Siano $w \in Lip_k(A)$ un superminimo di F e $v \in Lip_k(A)$ un sub-minimo di F. Allora:

$$v \leq w \text{ su } \partial A \implies v \leq w \text{ in } A.$$

DIM. L'insieme $B = \{x \in A ; v(x) > w(x)\}$ è aperto. Per assurdo supponiamo che $B \neq \emptyset$.

La funzione

$$\theta = \max\{v, w\} = \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in B \\ w(x) & \text{se } x \in A \setminus B \end{cases}$$

è in $Lip_K(A)$. Inoltre $\theta = w$ su ∂A e $\theta \geq w$ in A. Poichè w è un superminimo, si ha

$$\int_A f(\nabla w)\, dx = F(w) \leq F(\theta) = \int_A f(\nabla \theta)\, dx .$$

Siccome su $A \setminus B$ si ha $\nabla w = \nabla \theta$, deduciamo che

$$\int_B f(\nabla w)\, dx \leq \int_B f(\nabla v)\, dx .$$

Lavorando con $\hat{\theta} = \min\{v, w\}$ si ottiene la disuguaglianza opposta

$$\int_B f(\nabla v)\, dx \leq \int_B f(\nabla w)\, dx ,$$

e quindi;

$$\int_B f(\nabla v)\, dx = \int_B f(\nabla w)\, dx .$$

Sull'insieme B si deve avere $\nabla v \neq \nabla w$ su un insieme di misura positiva, altrimenti sarebbe $v = w$ in B (esercizio). Dunque, per la stretta convessità di f:

$$\int_B f\left(\nabla\left(\frac{v+w}{2}\right)\right) dx < \underbrace{\frac{1}{2}\int_B f(\nabla v)dx + \frac{1}{2}\int_B f(\nabla w)\,dx}_{\displaystyle \overset{\textstyle \|}{\int_B f(\nabla v)\,dx}} .$$

Dunque la funzione

$$\hat{v} = \begin{cases} \dfrac{v+w}{2} & \text{su } B \\ v & \text{su } A \setminus B \end{cases}$$

contraddice la sub-minimalità di F.

Infatti $\hat{v} \in Lip_k(A)$, $\hat{v} = v$ su ∂A e $\hat{v} \leq v$ in A.

□

<u>COROLLARIO</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strettamente convessa e $k > 0$. Siano $v, w \in Lip_k(A)$ due minimi di F ciascuno nella sua classe di dato al bordo. Allora: $\sup_A |v-w| = \sup_{\partial A} |v-w|$.

Dim. Esercizio.

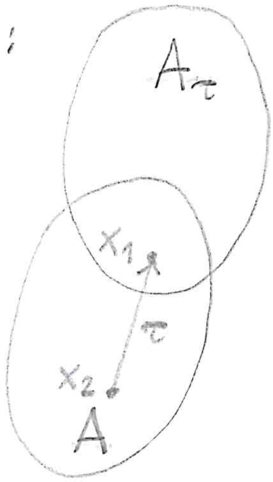
<u>LEMMA</u> (Riduzione alla frontiera) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ strettamente convessa e sia $u \in Lip_K(A)$ un minimo di

$$F(u) = \int_A f(\nabla u(x))\, dx$$

in $Lip_K(A)$. Allora

$$Lip(u, A) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} .$$

Dim. Siano $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ e definiamo $\tau = x_1 - x_2$, $A_\tau = \tau + A$, $u_\tau(x) = u(x - \tau)$ con $u_\tau : A_\tau \to \mathbb{R}$. Si ha:



$$x_1 \in A \cap A_\tau \neq \emptyset .$$

Le due funzioni u e u_τ minimizzano

$$\int_{A \cap A_\tau} f(\nabla u(x))\, dx$$

(ciascuna con il suo dato al bordo).

Dal Principio del massimo (dal suo Corollario) segue:

$$|u(x_1) - u(x_2)| = |u(x_1) - u_\tau(x_1)| \leq$$

$$\leq |u(\bar{x}) - u_\tau(\bar{x})| = |u(\bar{x}) - u(\bar{x}-\tau)|$$

per qualche $\bar{x} \in \partial(A \cap A_\tau)$. Dunque si ha

$$\bar{x} \in \partial A \quad \text{oppure} \quad \bar{x}-\tau \in \partial A .$$

Quindi

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{|u(\bar{x}) - u(\bar{x}-\tau)|}{|\tau|} \leq \sup_{\substack{x \in A \\ y \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|},$$

e siccome x_1, x_2 sono generici, questo conclude la prova.

$\square$

<u>DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1</u>. Sia $Q > 0$ la costante della BSC e fissiamo $K > Q$.
Sia $u \in Lip_K(A;u)$ un (il, per stretta convessità) minimo di:

$$\min \left\{ \int_A f(\nabla u)\, dx \;:\; u \in Lip_K(A;u) \right\}.$$

Sia $x_0 \in \partial A$. Siccome $u(x) = \mathcal{U}(x)$ per $x \in \partial A$, dal Principio del Massimo segue

$$w^-_{x_0} \leq \mathcal{U} \leq w^+_{x_0} \text{ su } \partial A \overset{PM}{\Longrightarrow} w^-_{x_0} \leq u \leq w^+_{x_0} \text{ su } A.$$

Per il Lemma di riduzione alla frontiera:

$$\mathrm{Lip}(u, A) = \sup_{\substack{x \in A \\ x_0 \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|}.$$

D'altra parte,

$$u(x) - u(x_0) \leq w^+_{x_0}(x) - w^+_{x_0}(x_0) \leq Q\,|x - x_0|$$

$$u(x) - u(x_0) \geq w^-_{x_0}(x) - w^-_{x_0}(x_0) \geq -Q\,|x - x_0|$$

e quindi $|u(x) - u(x_0)| \leq Q\,|x - x_0|$, ovvero

$$\mathrm{Lip}(u, A) \leq Q < K.$$

Dall'osservazione fatta in precedenza segue che u è un minimo senza la restrizione $\mathrm{Lip}(u, A) \leq K$.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u>: I piani sono minimi nella loro classe di dato al bordo.

METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Sia X un insieme e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$ una funzione. Vogliamo studiare il problema di minimo

$$\min \{ F(x) \in (-\infty, \infty] : x \in X \}.$$

① Esistenza. Una strategia per dimostrare l'esistenza del minimo è il "metodo diretto del calcolo delle variazioni".

Cerchiamo una topologia τ su X con queste due proprietà:

i) $F : X \to (-\infty, \infty]$ è semicontinua inferiormente ovvero $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{x \in X : F(x) > t\} \in \tau .$$

I sopralivelli stretti (aperti) sono insiemi aperti.

ii) (X, τ) è compatto.

Le due proprietà sono in competizione perchè è più probabile che (X, τ) sia compatto quando ci sono pochi aperti ("τ è debole"). In questo caso però è più difficile che F sia s.c.i.

TEOREMA Sia (X,τ) compatto e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$ s.c.i. su X rispetto a τ. Allora F assume minimo su X.

Dim. Sia

$$m = \inf \{ F(x) \in (-\infty, \infty] : x \in X \}.$$

Stiamo supponendo $F \not\equiv \infty$ e quindi $m \in [-\infty, \infty)$.
Sia $(\lambda_h)_{h \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\lambda_{h+1} < \lambda_h \quad e \quad \lim_{h \to \infty} \lambda_h = m.$$

Gli insiemi

$$A_h = \{ x \in X ; \ F(x) > \lambda_h \}$$

sono aperti e $A_{h+1} \supset A_h$.
Per assurdo sia $F(x) \neq m \quad \forall x \in X$. Allora

$$X = \bigcup_{h=1}^{\infty} A_h .$$

Per compattezza esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$X = \bigcup_{h=1}^{N} A_h = A_N .$$

Quindi $F(x) > \lambda_N > m \quad \forall x \in X$ contro la definizione di m.

$\square$

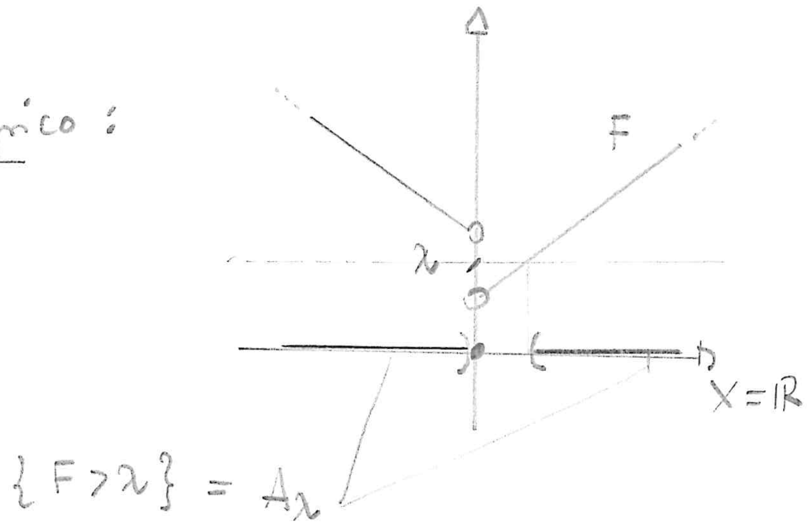
Esercizio Siano (X,d) uno spazio metrico ed $F : X \to (-\infty, \infty]$. Mostrare che sono equivalenti:

A) F è s.c.i. su X,

B) Per ogni $x_0 \in X$ si ha:

$$F(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} F(x) := \lim_{r \to 0^+} \inf_{\substack{x \in B_r(x_0) \\ x \neq x_0}} F(x).$$

Esempio tipico:



② Condizioni necessarie. Se $x_0 \in X$ è un punto di minimo di F, allora è spesso possibile trovare delle condizioni necessarie di minimalità che si ottengono "derivando" F in qualche modo. Con notazione classica (che lasceremo indefinita) dovrà essere verificata un'equazione del tipo

(*) $$\delta F(x_0) = 0.$$

Se $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione è semplicemente $F'(x_0) = 0$.

Talvolta è possibile trovare anche condizioni necessarie del secondo ordine sotto forma di disequazioni del tipo

$$\delta^2 F(x_0) \geq 0 .$$

Quando X è uno spazio funzionale, l'equazione $*)$ si chiama equazione di Eulero-Lagrange

③ Condizioni sufficienti. Se $x_0 \in X$ è un punto stazionario, cioè verifica l'equazione variazionale $*)$, è interessante capire se è un minimo. Trovare condizioni sufficienti è tipicamente difficile.

④ Unicità. Sia X (un sottoinsieme convesso di) uno spazio lineare reale. Se $F: X \to (-\infty, \infty]$ è strettamente convessa:

$$F(tx + (1-t)y) < t\,F(x) + (1-t)\,F(y)$$

per $x \neq y$ in X e $t \in (0,1)$, allora il (punto di) minimo è unico (se esiste).

Inoltre con la convessità anche non stretta i punti stazionari sono minimi.

⑤ Regolarità. Se non si riesce a dimostrare l'esistenza di minimi per F su X si può tentare questa strada.

Siano $\hat{X} \supset X$ ed $\hat{F} : \hat{X} \to (-\infty, \infty]$ tali che $\hat{F}_{|X} = F$.

Ora è più facile trovare una topologia (debole) su $\hat{X}$ che faccia funzionare il metodo diretto.

Se troviamo un minimo $\hat{x} \in \hat{X}$ per $\hat{F}$ possiamo sperare che sia in realtà $\hat{x} \in X$.

Questa strategia porta al <u>problema della regolarità</u>: il minimo trovato in uno spazio di funzioni poco regolari è in realtà in uno spazio di funzioni più regolari.

ELEMENTI ESSENZIALI SUGLI SPAZI DI SOBOLEV

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un aperto limitato e $1 \leq p \leq \infty$.
Diciamo che $f \in W^{1,p}(A)$ – f appartiene allo spazio di Sobolev $W^{1,p}(A)$ – se:

1) $f \in L^p(A)$;

2) Esistono funzioni $g_1, \dots, g_n \in L^p(A)$ tali che

$$\int_A f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_A g_i(x)\, \varphi(x)\, dx$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ e $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Chiameremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := g_i \in L^p(A), \qquad i = 1, \dots, n,$$

le derivate parziali deboli di f.
Indicheremo con

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

il gradiente (debole) di f.

con la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(A)} = \|f\|_{L^p(A)} + \|\nabla f\|_{L^p(A)}$$

$W^{1,p}(A)$ è uno spazio di Banach.

Lo spazio $W_0^{1,p}(A) \subset W^{1,p}(A)$ è formato dalle funzioni $f \in W^{1,p}(A)$ "che sono 0 su ∂A". Precisamente:

$$W_0^{1,p}(A) = \overline{C_c^\infty(A)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(A)}}.$$

<u>Notazione</u> Quando $p=2$ si incontrano le notazioni

$$H^1(A) = W^{1,2}(A), \qquad H_0^1(A) = W_0^{1,2}(A).$$

In dimensione $n=1$ gli spazi di Sobolev si descrivono in modo più concreto. Ad esempio, per l'intervallo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ si ha:

$$W^{1,p}(0,1) = \{ f \in AC([0,1]) \; ; \; f' \in L^p(0,1) \},$$

$$W_0^{1,p}(0,1) = \{ f \in AC([0,1]) \; ; \; f' \in L^p(0,1), \; f(0) = f(1) = 0 \}.$$

TOPOLOGIA FORTE E DEBOLE Su $W^{1,p}(A)$ ci sono la topologia forte e la topologia debole.

Quando $1 \leq p < \infty$ la topologia debole si descrive sequenzialmente nel seguente modo,

Siano $f, f_h \in W^{1,p}(A)$, $h \in \mathbb{N}$. Diciamo che

$$f_h \xrightarrow[h \to \infty]{W^{1,p}(A)} f$$

(convergenza debole in $W^{1,p}(A)$) sequenziale

se:

① $\displaystyle\int_A f_h \varphi \, dx \xrightarrow[h \to \infty]{} \int_A f \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in L^q(A)$

② $\displaystyle\int_A \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \varphi \, dx \xrightarrow[h \to \infty]{} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in L^q(A)$

$\forall i = 1, \dots, n$,

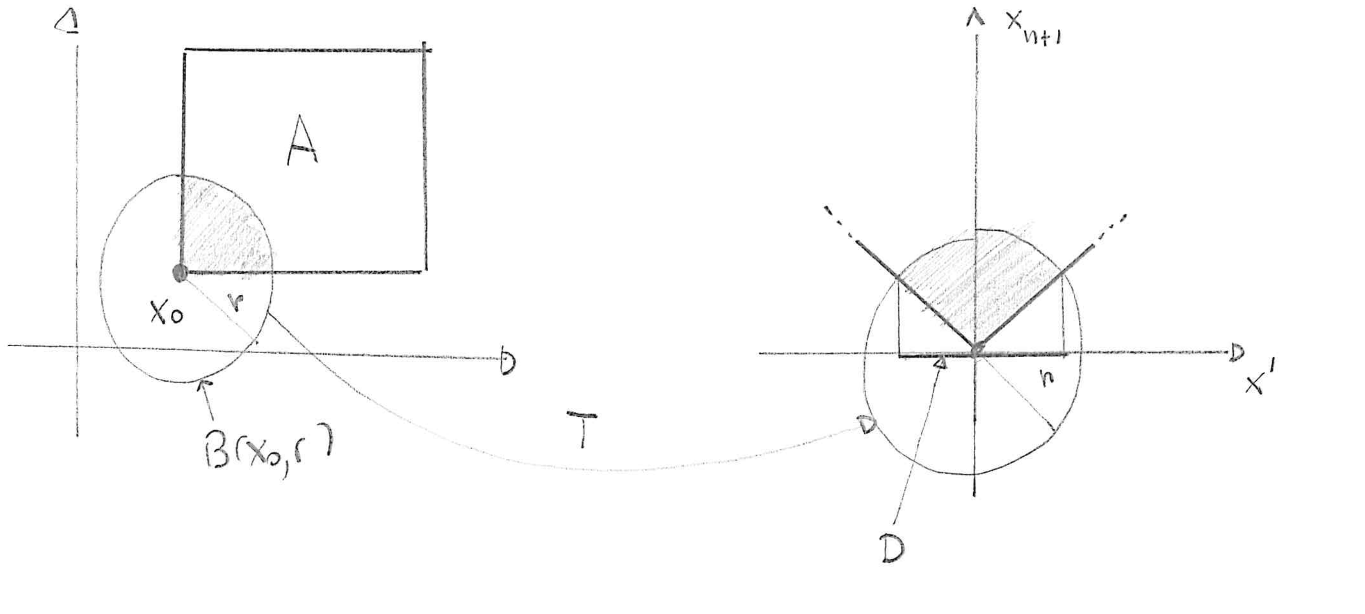
dove $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Quando $1 < p < \infty$, lo spazio $L^p(A)$ è riflessivo. Quindi per il Teorema di Banach-Alaoglu i sottoinsiemi limitati di $L^p(A)$ sono precompatti per la topologia debole.

Quindi gli insiemi limitati di $W^{1,p}(A)$ sono precompatti per la topologia debole di $W^{1,p}(A)$.

<u>DEFINIZIONE</u> Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ ha frontiera Lipschitziana se per ogni $x_0 \in \partial A$ esistono $r>0$, un'isometria $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ed una funzione Lipschitziana $\psi: D \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tali che

$$T(\partial A \cap B(x_0,r)) = \{(x', \psi(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in D\}.$$



TEOREMA (Rellich - Kondrachov) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato con frontiera Lipschitziana. Sia $1 \leq p \leq \infty$. Allora l'immersione

$$W^{1,p}(A) \subset\subset L^p(A)$$

è compatta. Ovvero: i sottoinsiemi limitati di $W^{1,p}(A)$ sono precompatti in $L^p(A)$.

Quando $p = \infty$ è una variante del Teorema di Ascoli - Arzelà. Vedremo in seguito la dimostrazione nel caso $p = 1$ per le funzioni BV.

Sia ora $1 \leq p < n$ e definiamo l'esponente di Sobolev coniugato:

$$p^* = \frac{pn}{n - p}$$

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera Lipschitz, $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$. Allora l'immersione $W^{1,p}(A) \subset\subset L^q(A)$ è compatta.

COMMENTO Per $W_0^{1,p}(A)$ si ha:

$$W_0^{1,p}(A) \subset\subset L^p(A) \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

$$W_0^{1,p}(A) \subset\subset L^q(A) \qquad \begin{array}{l} 1 \leq p < n \\ 1 \leq q < p^* \end{array}$$

con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato (senza ∂A Lipschitz).

DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato ed $f \in L^1(A)$. La media è

$$f_A = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A f(x)\,dx .$$

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, connesso con frontiera Lipschitz. Per ogni $1 \leq p < \infty$ esiste una costante $C = C(n, p, A)$ tale che

$$\int_A |f - f_A|^p\,dx \leq C \int_A |\nabla f|^p\,dx$$

per ogni $f \in W^{1,p}(A)$.

La dimostrazione segue da Rellich-Kondrachov.
Una variante è questa:

<u>TEOREMA</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $1 \leq p < \infty$. Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_A |f|^p dx \leq C \int_A |\nabla f|^p dx$$

per ogni $f \in W_0^{1,p}(A)$.

SEMICONTINUITÀ INFERIORE DELLA NORMA

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato con duale $(X^*, \|\cdot\|_*)$ dove

$$\|x^*\|_* := \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, x^* \rangle$$

Dal Teorema di Hahn-Banach segue che

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|_* \leq 1} \langle x, x^* \rangle$$

Supponiamo che $x_h \xrightarrow[h \to \infty]{X} x$, ovvero:

$$\langle x_h, x^* \rangle \xrightarrow[h \to \infty]{} \langle x, x^* \rangle \quad \forall x^* \in X^*$$

Dunque, se $\|x^*\|_* \leq 1$ si ha:

$$\langle x, x^* \rangle = \lim_{h \to \infty} (\inf) \langle x_h, x^* \rangle \leq \liminf_{h \to \infty} \|x_h\|$$

e passando a sup si trova la semicontinuità inferiore della norma per la convergenza debole

$$\|x\| \leq \liminf_{h \to \infty} \|x_h\|$$

se $x_h \rightharpoonup x$.

TEOREMA DI BANACH - ALAOGLU

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach con duale $(X^*, \|\cdot\|_*)$.
La topologia debole-* su X^* è la più piccola topologia che rende continui tutti i funzionali lineari $T_x : X^* \to R$, $x \in X$, della forma

$$T_x(x^*) = \langle x, x^* \rangle, \qquad x^* \in X^*$$

ovvero x^* che agisce su x.

TEOREMA La palla unitaria

$$B = \{ x^* \in X^* \ ; \ \|x^*\|_* \leq 1 \}$$

è compatta nella topologia debole-$*$ di X^*.

Il teorema si basa sul Teorema di Tychonov: il prodotto di spazi topologici compatti è compatto. (E quindi sull'assioma della scelta).

In casi concreti ci sono però dimostrazioni dirette.

Sia X^{**} il duale di X^*. In generale $X \subsetneqq X^{**}$. Se $(X, \|\cdot\|)$ e $(X^{**}, \|\cdot\|_{**})$ sono isomorfi allora X si dice riflessivo.

ESEMPIO L^p con $1<p<$ è riflessivo.

L^1 NON è riflessivo.

COROLLARIO Sia X uno spazio di Banach riflessivo. Gli insiemi chiusi (topologia forte) e limitati di X sono compatti per la topologia debole.

CONVESSITÀ E SEMICONTINUITÀ INFERIORE IN $W^{1,p}$

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di Carathéodory se:

i) $x \longmapsto f(x,u,\xi)$ è ($\mathcal{L}^n$-)misurabile $\forall u \in \mathbb{R}$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$;

ii) Per ($\mathcal{L}^n$-)q.o. $x \in A$, la funzione $(u,\xi) \longmapsto f(x,u,\xi)$ è continua.

<u>ESERCIZIO</u> Se f è di Carathéodory e $u : A \to \mathbb{R}$ e $v : A \to \mathbb{R}^n$ sono misurabili allora la funzione $x \longmapsto f(x, u(x), v(x))$ è misurabile.

Supponiamo d'ora in poi che sia anche $f \geq 0$.
Per $1 \leq p \leq \infty$ consideriamo il funzionale
$F : W^{1,p}(A) \to [0,\infty]$

$$F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

<u>TEOREMA</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ continua. Supponiamo che valga una delle due ipotesi:

1) F è sequenzialmente sci in $W^{1,p}(A)$-debole per qualche $1 \leq p < \infty$. Oppure:
2) F è seq. sci in $W^{1,\infty}(A)$-debole*.

Allora $\xi \longmapsto f(x,u,\xi)$ è convessa $\forall x \in A$ e $\forall u \in \mathbb{R}$.

DIM. In realtà 1) ⟹ 2). Quindi supponiamo 2).
Presentiamo la dimostrazione nel seguente caso:

$$n=1\,,\quad A=(0,1),\quad f=f(\xi)\ \text{con}\ f: \mathbb{R}\to[0,\infty).$$

L'ipotesi è che:

$$u_h \xrightarrow{W^{1,\infty}\text{-debole}*} u \quad\Longrightarrow\quad F(u)\le \liminf_{h\to\infty} F(u_h).$$

L'antecedente significa che

$$\lim_{h\to\infty}\int_{[0,1]} u_h\,\phi\,dx = \int_{[0,1]} u\,\phi\,dx\,, \qquad \forall \phi\in W^{1,1}(0,1)$$

$$\lim_{h\to\infty}\int_{[0,1]} u_h'\,\phi'\,dx = \int_{[0,1]} u'\phi'\,dx\,.$$

Dobbiamo provare che $\forall\, \xi_0,\xi_1\in\mathbb{R}$ e $\forall t\in[0,1]$
si ha:

$$f(t\xi_1+(1-t)\xi_0)\le t f(\xi_1)+(1-t)f(\xi_0)\,.$$

Definiamo $v:[0,1)\to\mathbb{R}$

$$v(x)=\begin{cases}\xi_1 & \text{se } x\in[0,t)\\ \xi_0 & \text{se } x\in[t,1)\end{cases}$$

estesa su $\mathbb{R}$ per 1-periodicità. Poi sia
$v_h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$v_h(x)=v(hx)\,,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Per h grande le oscillazioni sono frequenti.

Ora integriamo e definiamo $u_h : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$u_h(x) = \int_0^x v_h(s)\, ds.$$

Si ha $u_h \in W^{1,\infty}(0,1)$, $u_h' = v_h$ e inoltre per ogni $\psi \in L^1(0,1)$ si ha

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} v_h \psi \, dx \overset{\text{Esercizio}}{=} \left(\int_{[0,1]} v(x)\, dx\right)\left(\int_{[0,1]} \psi(x)\, dx\right)$$

$$= (t\delta_1 + (1-t)\delta_0) \int_{[0,1]} \psi(x)\, dx.$$

In altri termini:

$$u_h' = v_h \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty(0,1)\text{-debole}^*} t\delta_1 + (1-t)\delta_0 \quad \text{costante}.$$

Analogamente: $u_h \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty\text{-d}*} x(t\delta_1 + (1-t)\delta_0) =: u.$

Dall'ipotesi si ricava che

$$\int_{[0,1]} f(t\delta_1+(1-t)\delta_0)\, dx = F(u) \leq \liminf_{h\to\infty} F(u_h) =$$

$$= \liminf_{h\to\infty} \int_{[0,1]} f(v_h)\, dx$$

Ma con gli argomenti precedenti si vede che

$$f(v_h) \xrightarrow[h \to \infty]{L^\infty(0,1)\text{-debole}*} t\, f(\xi_1) + (1-t)\, f(\xi_0)$$

e concludiamo che

$$f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \leq t\, f(\xi_1) + (1-t)\, f(\xi_0).$$

$\square$

Ora invertiamo il teorema precedente: mostriamo che la convessità implica la semicontinuità inferiore in $W^{1,p}(A)$-debole.

<u>TEOREMA (Tonelli)</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f: A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty]$ di Carathéodory. Supponiamo che $\xi \longmapsto f(x,u,\xi)$ sia convessa per q.o. $x \in A$ ed $u \in \mathbb{R}$. Allora il funzionale $F: W^{1,p}(A) \longrightarrow [0,\infty]$, $1 \leq p < \infty$,

$$F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

è s.c.i. in $W^{1,p}(A)$-debole.
(sequenzialmente)

Dim. Vediamo la dimostrazione in un caso modello. Sia $f = f(\xi)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo inoltre che esista una costante $C > 0$ tale che

$$|\nabla f(\xi)| \leq C\,|\xi|^{p-1} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Siano dunque $u, u_h \in W^{1,p}(A)$ tali che

$$u_h \xrightarrow[h\to\infty]{} u \quad \text{in } W^{1,p}(A)\text{-debole}.$$

Usando la convessità di f si trova

$$F(u_h) = \int_A f(\nabla u_h)\,dx \geq \int_A \big(f(\nabla u) + \langle \nabla f(\nabla u), \nabla u_h - \nabla u\rangle\big)\,dx.$$

Osserviamo che

$$|\nabla f(\nabla u)| \leq C\,|\nabla u|^{p-1} \in L^q(A)$$

con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Infatti $(p-1)q = p$ e $|\nabla u| \in L^p(A)$.

Dunque si ha

$$\lim_{h\to\infty} \int_A \langle \nabla f(\nabla u), \nabla u_h - \nabla u\rangle\,dx = 0.$$

Concludiamo che

$$\liminf_{h\to\infty} F(u_h) \geq \int_A f(\nabla u)\,dx = F(u).$$

$\square$

ESISTENZA DI MINIMI IN $W^{1,p}$

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz. Fissiamo una funzione $u_0 \in W^{1,p}(A)$ che svolge il ruolo di dato al bordo, con $1 \leq p < \infty$, e consideriamo la classe di funzioni ammissibili

$$\mathcal{A} = u_0 + W_0^{1,p}(A).$$

Data una funzione di Carathéodory $f : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ consideriamo il funzionale $F : \mathcal{A} \longrightarrow [-\infty, \infty]$

$$F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx .$$

Supponiamo che esista $\bar{u} \in \mathcal{A}$ tale che $F(\bar{u}) < \infty$.

TEOREMA Oltre alle ipotesi precedenti supponiamo che:

i) Sia $1 < p < \infty$;

ii) $\xi \longmapsto f(x, u, \xi)$ sia convessa $\forall u \in \mathbb{R}$ e per q.o. $x \in A$;

iii) Esistano $g \in L^1(A)$ e $C > 0$ tali che [[Coercività]]

$$f(x, u, \xi) \geq g(x) + C|\xi|^p \quad \forall \xi \text{ e per q.o. } x,$$

Allora F ha minimo su $\mathcal{A}$.

Dim. Sia $K = \{ u \in \mathcal{A} \ ; \ F(u) \leq F(\bar{u}) \} \subset W^{1,p}(A)$.
Finiamo su K la topologia debole di $W^{1,p}(A)$.
Dalla ii) (convessità di $\xi \mapsto f(\cdot,\cdot,\xi)$) segue che
$F : K \to \mathbb{R}$ è semicontinuo inferiormente.
Inoltre, se $u \in K$ dalla condizione di coercività iii) segue che

$$F(\bar{u}) \geq F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))dx \geq$$

$$\geq \int_A g(x)\,dx + c\int_A |\nabla u(x)|^p dx$$

e quindi

$$\int_A |\nabla u|^p dx \leq \frac{1}{c}\left(\|g\|_1 + F(\bar{u}) \right).$$

Dalla Disuguaglianza di Poincaré:

$$\|u\|_{L^p(A)} \leq \|u - u_0\|_{L^p(A)} + \|u_0\|_{L^p(A)}$$

$$\leq C_1 \left(\int_A |\nabla u - \nabla u_0|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \|u_0\|_{L^p(A)}$$

$$\leq C_1 \|\nabla u\|_{L^p(A)} + C_2 \|u_0\|_{W^{1,p}(A)}.$$

Quindi K è limitato in $W^{1,p}(A)$.

Siccome K è chiuso per la topologia debole $W^{1,p}(A)$

e siccome $p > 1$ (caso riflessivo)

dal Teorema di Banach - Alaoglu segue che K

è compatto nella topologia debole di $W^{1,p}(A)$.

L'esistenza del minimo segue dal Teorema di Weierstraß.

$\square$

<u>ESEMPIO 1</u> Sia $\mathcal{A} = \left\{ u \in W^{1,1}([0,1]) = AC([0,1]) \; : \; \begin{matrix} u(0)=0 \\ u(1)=1 \end{matrix} \right\}$

e sia $F : \mathcal{A} \to [0, \infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \sqrt{u^2 + u'^2} \, dx .$$

Le ipotesi ii) e iii) sono verificate. Non la (i): qui abbiamo $p = 1$.

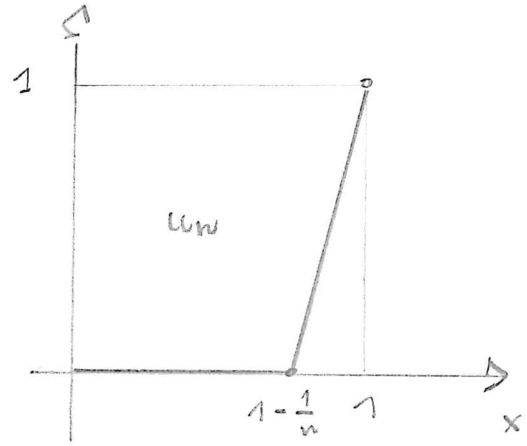
Verifichiamo che il minimo non è raggiunto.

Se $u \in \mathcal{A}$ allora

$$(*) \qquad F(u) \geq \int_{[0,1]} |u'| \, dx \geq \int_{[0,1]} u'(x) \, dx \overset{u \in AC}{=} u(1) - u(0) = 1$$

Quindi $\inf \{ F(u) \; : \; u \in \mathcal{A} \} \geq 1$.

Dato $n \in \mathbb{N}$ si consideri $u_n \in AC([0,1])$ fatta in questo modo



Allora

$$F(u_n) = \int_{[1-\frac{1}{n},1]} \sqrt{u^2 + u'^2}\, dx \leq \int_{[1-\frac{1}{n},1]} \sqrt{1+n^2}\, dx = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$$

e quindi

$$\inf \{ F(u) \,;\, u \in \mathcal{A} \} = 1 .$$

Se $u \in \mathcal{A}$ fosse un minimo, allora in $(*)$ dovremmo avere tutte uguaglianze, cosa che implicherebbe $u(x) = 0$ per (quasi) ogni $x \in [0,1]$, contro le condizioni al bordo.

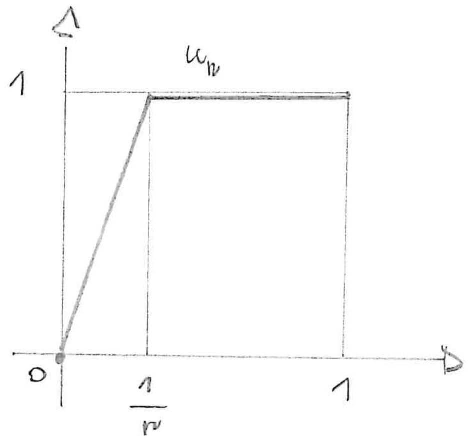
$\square$

ESEMPIO 2 (Weierstrass) Sia $\mathcal{A} = \left\{ u \in W^{1,2}(0,1) : \begin{array}{l} u(0)=0 \\ u(1)=1 \end{array} \right\}$

e sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} x^2 u'(x)^2 \, dx .$$

Le condizioni i) e ii) sono verificate, ma non la coercività iii). Verifichiamo che il minimo non viene raggiunto. Basta considerare $u_n \in W^{1,2}(0,1)$ fatta nel seguente modo



$$F(u_n) = \int_{[0,\frac{1}{n}]} x^2 n^2 \, dx = \frac{1}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

quindi $\inf \{ F(u) : u \in \mathcal{A} \} = 0$, Ma $F(u) = 0$ implica $u' = 0$ q.o. e quindi $u =$ costante (perché $u \in AC$). Questo è incompatibile con i dati al bordo.

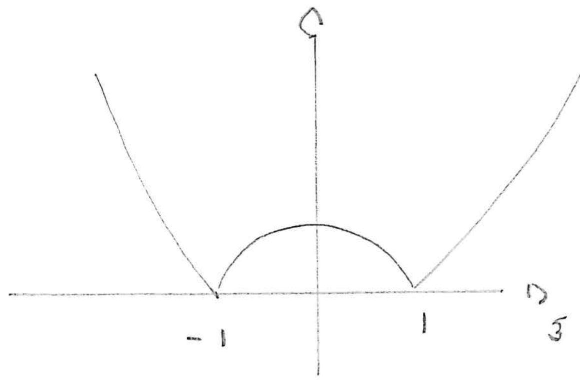
$\square$

ESEMPIO 3 (Bolza) Sia $\mathcal{A} = \{ u \in W^{1,2}(0,1) ; u(0) = u(1) = 0 \}$

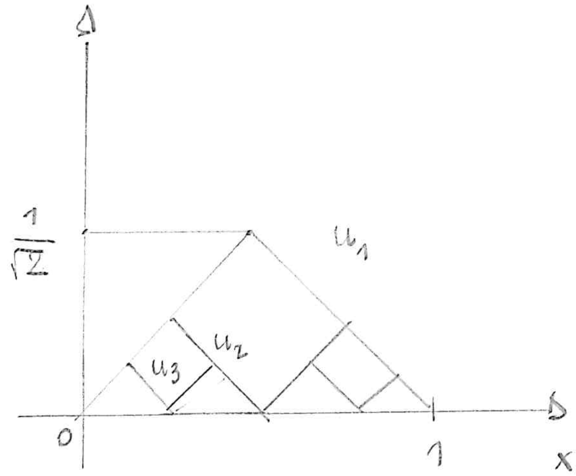
e sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \left(|u'^2 - 1| + u^2 \right) dx .$$

La i) e la iii) sono verificate, ma non la ii) perché $\xi \mapsto |\xi^2 - 1|$ non è convessa



Per $h \in \mathbb{N}$ sia $u_h \in W^{1,2}(0,1)$ come in figura:



Chiaramente $|u_h'(x)| = 1$ q.o. e inoltre $\|u_h\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}h}$

Quindi $\lim_{h \to \infty} F(u_h) = 0$ e dunque $\inf \{ F(u) ; u \in \mathcal{A} \} = 0$. Ma $F(u) = 0$ implica $|u'(x)| = 1$ q.o. e $u = 0$, che sono incompatibili.

$\square$

ESEMPIO 4 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz, $n \geq 1$. Sia

$$X = \left\{ u \in H^1(A) \; ; \; \int_A u \, dx = 0 \right\}.$$

Si tratta di un sottospazio chiuso di $H^1(A)$.
É il complemento ortogonale della funzione $1 \in H^1(A)$.

Sia $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ il funzionale

$$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right\} dx$$

dove $f \in L^2(A)$ è una funzione fissata.

Studiamo il problema di minimo

$$\min \left\{ F(u) \; ; \; u \in X \right\}.$$

Sia $u_h \in X$, $h \in \mathbb{N}$, una successione minimizzante:

$$\lim_{h \to \infty} F(u_h) = \inf \left\{ F(u) \; ; \; u \in X \right\}.$$

Esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che $\forall h \in \mathbb{N}$

$$\int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 + f u_h \right\} dx \leq C.$$

Dato un parametro $\varepsilon > 0$, avremo

$$\int_A f u_h \, dx \geq - \frac{1}{2} \int_A \left(\frac{1}{\varepsilon} f^2 + \varepsilon \, u_h^2 \right) dx$$

e per la disuguaglianza di Poincaré esiste una costante $C_A > 0$ tale che

$$\int_A |u_h|^2 dx = \int_A |u_h - \underbrace{(u_h)_A}_{\text{Media} = 0}|^2 dx \leq C_A \int_A |\nabla u_h|^2 dx$$

e dunque

$$\int_A f u_h \, dx \geq -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|f\|^2_{L^2} + \varepsilon C_A \int_A |\nabla u_h|^2 dx \right\}.$$

In definitiva si trova

$$\frac{1}{2} (1 - \varepsilon C_A) \int_A |\nabla u_h|^2 dx \leq C + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|^2_{L^2(A)},$$

e scegliendo $1 - \varepsilon C_A \geq \frac{1}{2}$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2 C_A} \right)$

si vede che esiste una costante $0 < C_1 < \infty$ tale che

$$\int_A |\nabla u_h|^2 dx \leq C_1 \qquad \forall h \in \mathbb{N}$$

e quindi anche

$$\int_A u_h^2 dx \leq C_A \cdot C_1 \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema di compattezza debole esiste $u \in H^1(A)$ ed esiste una sottosuccessione di $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ - chiamata ancora $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ - tale che

$$u_h \xrightarrow[h \to \infty]{H^1(A)} u$$

ovvero:

$$u_h \xrightarrow{L^2} u \, ,$$

$$\nabla u_h \xrightarrow{L^2} \nabla u \, .$$

(Dal Teorema di Rellich-Kondrachov segue che $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ è (pre)compatta in $L^2(A)$ e quindi - a meno di ulteriore s.s. - si ha in effetti $u_h \xrightarrow{L^2} u$ fortemente. Non useremo questo fatto.)

Per semicontinuità inferiore si ha

$$\int_A |\nabla u|^2 \, dx \leq \liminf_{h \to \infty} \int_A |\nabla u_h|^2 \, dx \, ,$$

Inoltre

$$\lim_{h \to \infty} \int_A u_h f \, dx = \int_A u f \, dx$$

e

$$0 = \lim_{h \to \infty} \int_A u_h \, dx = \int_A u \, dx \, ,$$

In particolare $u \in X$. Infine

$$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right\} dx \leq$$

$$\leq \liminf_{h \to \infty} \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 + f u_h \right\} =$$

$$= \lim_{h \to \infty} F(u_h) .$$

Quindi u è il minimo di F su X.

Supponiamo che u e $\bar{u}$ siano due minimi. Siccome $u \mapsto F(u)$ è convesso si ha

$$F\left(\frac{u+\bar{u}}{2} \right) \leq \frac{1}{2} F(u) + \frac{1}{2} F(\bar{u})$$

e per la minimalità si ha $=$, cosa che implica

$$\int_A \left| \nabla \frac{u+\bar{u}}{2} \right|^2 dx = \frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_A |\nabla \bar{u}|^2 dx$$

Dalla stretta convessità di $\xi \mapsto |\xi|^2$ si deduce che deve essere $\nabla u = \nabla \bar{u}$ q.o. su A, ovvero $\nabla (u - \bar{u}) = 0$. La disuguaglianza di Poincaré

$$\int_A (u-\bar{u})^2 dx \leq c_A \int_A |\nabla (u-\bar{u})|^2 dx = 0$$

implica $u = \bar{u}$.

Questo prova l'unicità del minimo.

Deriviamo l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole. Sia $\varphi \in C_c^\infty(A)$, allora

$$\psi := \varphi - \varphi_A = \varphi - \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A \varphi \, dx \in X.$$

Per $\varepsilon \in \mathbb{R}$ si consideri

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= F(u + \varepsilon\psi) \\ &= \int_A \Big\{ \frac{1}{2} |\nabla u + \varepsilon \nabla \psi|^2 + f(u + \varepsilon\psi) \Big\} dx \\ &= \int_A \Big\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 |\nabla \psi|^2 + \varepsilon \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle \\ &\qquad + f(u + \varepsilon\psi) \Big\} dx \end{aligned}$$

e dunque

$$g'(0) = \int_A \{ \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle + f\psi \} dx.$$

Se u è un minimo si trova

$$0 = g'(0) = \int_A \{ \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + f(\varphi - \varphi_A) \} dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Osserviamo che $\int_A f\,\varphi_A\,dx = \int_A f_A\,\varphi\,dx$

e quindi l'equazione è

$$\int_A \{\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle + (f - f_A)\varphi\}\,dx \overset{\forall\varphi}{=} 0 .$$

Per la teoria della regolarità (che noi non vedremo) si ha $u \in H^2(A)$, ovvero u possiede le derivate seconde in $L^2(A)$ in senso debole. Inoltre

$$\circledast \qquad \int_A \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle\,dx \overset{\varphi\in C_c^\infty(A)}{=} -\int_A \Delta u\,\varphi\,dx$$

e l'equazione diventa

$$\int_A \{-\Delta u + f - f_A\}\,\varphi\,dx \overset{\forall\varphi}{=} 0$$

Quindi si trova l'equazione in $L^2(A)$

$$(\square) \qquad \Delta u = f - f_A \quad \text{in } L^2(A)$$

(Equazione di Poisson).

I conti precedenti si possono ripetere anche a partire da $\varphi \in C^\infty(\overline{A})$. L'unica differenza è in ⊛. Ora si ha

$$\int_A \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_A \{ \operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \varphi \Delta u \} \, dx .$$

In modo "formale" si trova col teorema della divergenza

$$\int_A \operatorname{div}(\varphi \nabla u) \, dx = \int_{\partial A} \varphi \langle \nabla u, \nu \rangle \, dH^{n-1} .$$

Bisogna che ∇u sia definito H^{n-1}-q.o. su ∂A.

Tenuto conto di (□), l'equazione di Eulero-Lagrange diventa ora

$$\int_{\partial A} \varphi \langle \nabla u, \nu \rangle \, dH^{n-1} = 0 \qquad \forall \varphi \in C(\partial A)$$

Questo implica che

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle = 0 \qquad \text{su } \partial A .$$

Questa è la condizione di Neumann.

□

INTERIOR SOBOLEV REGULARITY

$A \subset \mathbb{R}^n$ open bounded, $n \geq 2$

$M : A \to M_n(\mathbb{R}) = \{$ real $n \times n$ matrices $\}$

Assume that:

1) $M = M^T$ is symmetric

2) $M \in L^\infty(A; M_n(\mathbb{R}))$, bounded measurable entries

3) Ellipticity: there is $\lambda > 0$ such that

(1) $$\langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2 \qquad \forall x \in A \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Fix a function $f \in L^2(A)$ and consider the functional

$F : H^1(A) \to \mathbb{R}$

(2) $$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} \langle M(x) \nabla u, \nabla u \rangle + f u \right\} dx.$$

With the constraint

(3) $$\int_A u \, dx = 0$$

there exists a unique minimizer $u \in H^1(A)$.
The Euler-Lagrange equation satisfied by this minimizer is

(4) $$\operatorname{div}(M(x) \nabla u) = f \qquad \text{in } A$$

in the weak sense. This means that

$$(5) \qquad -\int_A \langle M(x)\nabla u, \nabla \varphi\rangle \, dx = \int_A f\varphi \, dx$$

for all $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Our goal in this section is to prove the following regularity result.

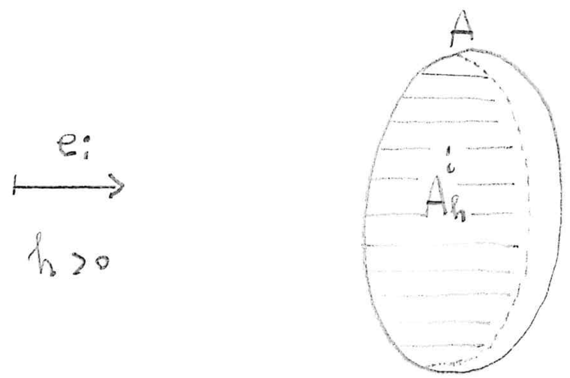
<u>THEOREM 1</u> Let $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, be open and bounded. Let $M \in \mathrm{Lip}(A; M_n(\mathbb{R}))$ be symmetric and elliptic. Let $f \in L^2(A)$. Then any solution $u \in H^1(A)$ of (4) in the weak sense satisfies $u \in H^2_{loc}(A)$. Moreover, for any $A_0 \subset\subset A$ there exists $C > 0$ such that

$$(6) \qquad \|\nabla^2 u\|_{L^2(A_0)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(A)} + \|f\|_{L^2(A)}\right).$$

1. <u>Difference quotients</u>.

Let $i \in \{1 \dots n\}$ and $h \in \mathbb{R}$. Define the set

$$(7) \qquad A_h^i = \{x \in A : x + he_i \in A\}$$



Given $u : A \to R$ define

$$(8) \qquad u_h^i(x) = u(x+he_i), \quad x \in A_h^i$$

$$(9) \qquad \tau_h^i u(x) = \frac{u_h^i(x) - u(x)}{h} = \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}, \quad x \in A_h^i, \ h \neq 0.$$

We have the following elementary Leibnitz rule:

$$(10) \qquad \tau_h^i(uv) = u_h^i \tau_h^i v + v \tau_h^i u \ .$$

<u>PROPOSITION 2</u> Let $A_0 \subset\subset A$ with $\delta := \mathrm{dist}(A_0; \partial A)$.

(1) For any $u \in H^1(A)$ we have

$$(11) \qquad \| \tau_h^i u \|_{L^2(A_0)} \leq \| \nabla u \|_{L^2(A)}$$

for all $i = 1, \dots, n$ and $0 < |h| < \delta$

(2) Assume that for a given $u \in L^2(A)$ there exists $C_0 > 0$ such that

$$(12) \qquad \| \tau_h^i u \|_{L^2(A_0)} \leq C_0$$

for $i = 1 \dots n$ and for all $0 < h < \delta$. Then $u \in H^1(A_0)$ with $\| \nabla u \|_{L^2(A_0)} \leq C_0 \cdot n$. Moreover

$$(13) \qquad \lim_{h \to 0^+} \tau_h^i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{strongly in } L^2(A_0).$$

Given $\varepsilon > 0$ let $v \in H^1(A) \cap C^\infty(A)$ be such that

$$\int_A |\nabla u - \nabla v|^2 dx < \varepsilon .$$

Then we have

$$\tau_h^i u - \frac{\partial u}{\partial x_i} = \underbrace{\tau_h^i (u - v)}_{\substack{\wedge\!\!| \; L^2 \\ \nabla u - \nabla v \\ \wedge\!\!| \; L^2(A) \\ \varepsilon}} + \underbrace{\tau_h^i (v) - \frac{\partial v}{\partial x_i'}}_{\substack{\wedge\!\!| \\ \varepsilon \\ \text{for } 0 < h < \bar{h}(\varepsilon) \\ \text{uniformely on } A_0}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\substack{\wedge\!\!| \; L^2(A) \\ \varepsilon}} .$$

□

2. Proof of Theorem 1 Let $u \in H^1(A)$ be a solution of (4) in the weak sense:

$$(14) \qquad \int_A \langle M \nabla u , \nabla \varphi \rangle \, dx = - \int_A f \varphi \, dx$$

for $\varphi \in C_c^\infty(A)$. After a change of variable, (14) implies that

$$(15) \qquad \int_A \langle M_h^i \nabla u_h^i , \nabla \varphi \rangle dx = - \int_A f_h^i \varphi \, dx$$

for all $\varphi \in C_c^\infty(A)$, suitable. Subtracting (15)-(14) and dividing by $h \neq 0$:

(2) By weak compactness, there exists a <u>sequence</u> $h \downarrow 0$ and $v \in L^2(A_0)$ such that

$$\tau_h^i u \xrightarrow[h \downarrow 0]{w-L^2(A_0)} v.$$

Then for any $\varphi \in C_c^\infty(A_0)$ we have

$$= \int_{A_0} \tau_h^i u(x) \cdot \varphi(x)\, dx \xrightarrow[h \downarrow 0]{} \int_{A_0} v(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow \qquad \qquad \|$$

$$= - \int_{h e_i + A_0} u(x) \underbrace{\tau_{-h}^i \varphi(x)}\, dx \xrightarrow[h \downarrow 0]{} - \int_{A_0} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx,$$

$$\Big\downarrow \text{ uniformly}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

This means that $v = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ in the weak-sense.

This proves that $u \in H^1(A_0)$.

By lower semicontinuity of the L^2-norm:

$$\int_{A_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq \liminf_{h \downarrow 0} \int_{A_0} |\tau_h^i u|^2 dx \leq C_0.$$

The strong convergence follows by an approximation argument.

Proof. (1) Assume first $u \in H^1(A) \cap C^\infty(A)$. Then we have for $x \in A_0$

$$u(x+he_i) - u(x) = \int_0^h \frac{d}{dt} u(x+te_i)\, dt =$$

$$= \int_0^h \langle \nabla u(x+te_i), e_i \rangle\, dt = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+te_i)\, dt$$

and thus for small h:

$$\int_{A_0} \frac{1}{h^2} | u(x+he_i) - u(x) |^2 dx = \int_{A_0} \left| \fint_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+te_i)\, dt \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_{A_0} \fint_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+te_i) \right|^2 dt\, dx \leq$$

$$\leq \fint_0^h \int_{A_0} |\nabla u(x+te_i)|^2 dx\, dt \leq \int_A |\nabla u(x)|^2 dx.$$

The general case follows by approximation.
Given $u \in H^1(A)$ there exists a sequence $u_m \in H^1(A) \cap C^\infty(A)$ such that

i) $u_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} u$ in $L^2(A)$ and a.e. in A;

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_A |\nabla u_m|^2 dx = \int_A |\nabla u|^2 dx.$

By Fatou lemma:

$$\int_{A_0} |\tau_h^i u|^2 dx \leq \liminf_{m \to \infty} \int_{A_0} |\tau_h^i u_m|^2 dx \leq$$

$$\leq \lim_{m \to \infty} (\inf) \int_A |\nabla u_m|^2 dx = \int_A |\nabla u|^2 dx.$$

we get

$$\text{LHS} = \int_A \langle \tau_h^i (M \nabla u), \nabla \varphi \rangle \, dx = - \int_A (\tau_h^i f) \, \varphi \, dx$$

(16) (by parts)

$$= \int_A f \, (\tau_{-h}^i \varphi) \, dx.$$

$$= \text{RHS}$$

By Leibniz rule:

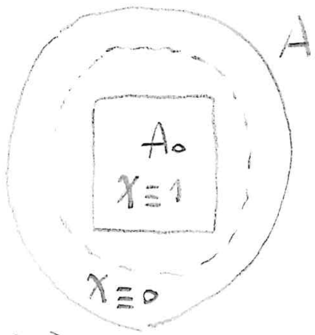
$$(17) \qquad \tau_h^i (M \nabla u) = M_h^i \underbrace{\tau_h^i (\nabla u)}_{} + \tau_h^i (M) \nabla u .$$

We want to estimate this

We choose the test function φ in the following way.

Let $\chi \in C_c^\infty(A)$ be a cut-off function such that

$$\chi \equiv 1 \text{ on } A_0$$



We choose

$$(18) \qquad \varphi = \chi^2 \tau_h^i u \in H^1(A),$$

with

$$\nabla \varphi = 2 \chi \nabla \chi \, \tau_h^i u + \chi^2 \tau_h^i (\nabla u).$$

Also using (17), the left-hand side of (16) is

$$LHS = \int_A \langle M_h^i \tau_h^i(\nabla u) + \tau_h^i(M)\nabla u,\ \chi^2\tau_h^i(\nabla u) + 2\chi\nabla\chi\,\tau_h^i u\rangle\,dx$$

Using the ellipticity $\langle M(x)\xi,\xi\rangle \geq \lambda|\xi|^2\ \forall x\in A$ with $\lambda>0$,

$$(19)\quad LHS \geq \lambda\int_A \chi^2|\tau_h^i(\nabla u)|^2\,dx + I_1 + I_2 + I_3$$

where

$$I_1 = \int_A \langle M_h^i\,\tau_h^i(\nabla u),\ 2\chi\,\tau_h^i(u)\,\nabla\chi\rangle\,dx,$$

$$I_2 = \int_A \chi^2\langle \tau_h^i(M)\nabla u,\ \tau_h^i(\nabla u)\rangle\,dx,$$

$$I_3 = \int_A 2\chi\,\tau_h^i(u)\,\langle \tau_h^i(M)\nabla u,\nabla\chi\rangle\,dx.$$

We estimate I_1, I_2, and I_3 from below:

$$I_1 \geq -2\int_A \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\chi}\,|M_h^i\,\tau_h^i(\nabla u)|\,|\tau_h^i(u)|\,|\nabla\chi|\,dx$$

$$(20)\qquad \geq -\int_A \varepsilon\chi^2|M_h^i\,\tau_h^i(\nabla u)|^2 + \frac{1}{\varepsilon}|\tau_h^i(u)|^2|\nabla\chi|^2\,dx$$

$$\geq -\varepsilon\|M\|^2_{L^\infty(A)}\int_A |\tau_h^i(\nabla u)|^2\,dx - \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\chi\|^2_{L^\infty(A)}\int_{A_1}|\tau_h^i(u)|^2 d\ ,$$

where $A_1 \subset\subset A$ for small h. Then we have

$$(21) \qquad \int_{A_1} |\tau_h^i(u)|^2 dx \leq \int_A |\nabla u|^2 dx .$$

We will choose $\varepsilon > 0$ such that

$$(22) \qquad \varepsilon \, \|M\|^2_{L^2(A)} < \frac{\lambda}{8} .$$

So (20) is

$$(23) \qquad I_1 \geq -\frac{\lambda}{8} \int_A x^2 |\tau_h^i(\nabla u)|^2 dx - C_1 \int_A |\nabla u|^2 dx$$

for a constant $C_1 > 0$.

For I_2 we have

$$I_2 \geq - \int_A x \, |\tau_h^i(M) \nabla u| \cdot x \, |\tau_h^i(\nabla u)| \, dx$$

$$(24) \qquad \geq -\frac{\varepsilon}{2} \int_A x^2 |\tau_h^i(\nabla u)|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_A x^2 |\tau_h^i(M) \nabla u|^2 dx .$$

Since $M \in Lip(A; M_n(\mathbb{R}))$ we have $\|\tau_h^i(M)\| \leq L < \infty$ for a constant L. We choose $\varepsilon > 0$ such that

$$(25) \qquad \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\lambda}{8} .$$

So (24) yields:

$$(26)\qquad I_2 \geq -\frac{\lambda}{8}\int_A |\tau_h^i(\nabla u)|^2\,dx - C_2\int_A |\nabla u|^2\,dx$$

where $C_2 > 0$ is a constant.

Finally, for I_3 we have

$$(27)\qquad \begin{aligned} I_3 &\geq -2\,\|\nabla\chi\|_{L^\infty(A)}\cdot L\cdot\int_{A_1} |\tau_h^i(u)|\,|\nabla u|\,dx \\ &\geq -C_3\int_A |\nabla u|^2\,dx, \end{aligned}$$

where we used again Proposition 2 and Hölder inequality.

Eventually the LHS of (16) satisfies

$$(28)\qquad \text{LHS} \geq \frac{3}{4}\lambda\int_A \chi^2|\tau_h^i(\nabla u)|^2\,dx - C_4\int_A |\nabla u|^2\,dx$$

for a constant $0 < C_4 < \infty$.

The RHS of (16) is:

$$(29)\qquad \text{RHS} = \int_A f\,\tau_{-h}^i\left(\chi^2\,\tau_h^i(u)\right)\,dx$$

and therefore

$$\text{(30)} \qquad RHS \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_A |\tau^i_{-h}(\chi^2 \tau^i_h(u))|^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_A f^2 dx \leq$$

Prop. 2

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_A |\underbrace{\nabla(\chi^2 \tau^i_h(u))}_{\substack{\parallel \\ 2\chi\nabla\chi\, \tau^i_h(u) + \chi^2 \tau^i_h(\nabla u)}}|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_A f^2 dx$$

$$\leq \varepsilon \int_A \chi^2 |\tau^i_h(\nabla u)|^2 + \varepsilon C_5 \int_{A_1} |\tau^i_h(u)|^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_A f^2 dx.$$

We choose

$$\text{(31)} \qquad \varepsilon < \frac{\lambda}{4},$$

and we get

$$RHS \leq \frac{\lambda}{4} \int_A \chi^2 |\tau^i_h(\nabla u)|^2 dx + C_6 \int_A |\nabla u|^2 dx$$

$$\text{(32)}. \qquad + C_7 \int_A f^2 dx$$

By (28) and (32), inequality (16) reads:

$$\frac{\lambda}{2} \int_A x^2 |\tau_h^i (\nabla u)|^2 dx \leq C_8 \int_A |\nabla u|^2 dx + C_9 \int_A f^2 dx \tag{33}$$

for all small $0 < \lambda < \lambda_0$ and for all $i = 1, \ldots, n$.

Proposition 2 implies that $\nabla u \in H^1_{loc}(A)$.

The claims of Theorem 1 now follow easily.

$\square$

PLATEAU PROBLEM. Parametric formulation (Douglas-Radó)

$D = \{ z = u + iv \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ unit disk

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ fixed dimension, support of a C^1-regular simple curve. Namely, there is $\gamma : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injective of class C^1 with $\dot{\gamma} \neq 0$ such that

$$\boxed{\Gamma = \gamma(\partial D)}$$

We call γ a Jordan curve (of class C^1).

Let $F \in C^2(D; \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D}; \mathbb{R}^n)$ be such that $F(\partial D) = \Gamma$.
We call

$$\boxed{\Sigma = F(D)}$$

a parametric 2-surface of class C^2 with $\partial \Sigma = \Gamma$.

For any $z = u + iv \in D$ we have

$$F_u := \frac{\partial F}{\partial u} \in T\Sigma ,$$

$$F_v := \frac{\partial F}{\partial v} \in T\Sigma .$$

Notation: $\langle \cdot , \cdot \rangle$ = standard scalar product in $\mathbb{R}^n$

$|\cdot|$ = standard norm in $\mathbb{R}^n$.

We denote the <u>energy</u> of F

$$\mathscr{E}(F) = \frac{1}{2}\int_D \left(|F_u|^2 + |F_v|^2\right) du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_D |\nabla F^i| \,du\,dv$$

where $F = (F^1, \dots, F^n)$. This is a Dirichlet integral.
It could be $\mathscr{E}(F) = +\infty$.

On $T\Sigma$ we define the bilinear form g setting

$$g_{ij} = \langle F_i, F_j \rangle \quad \text{with} \quad i,j \in \{u,v\}$$

Then we have $\mathrm{tr}\left(g(F(z))\right) = |F_u(z)|^2 + |F_v(z)|^2$.

We denote the area of F

$$\mathscr{A}(F) = \int_D \sqrt{\det(g)}\, du\,dv$$

$$= \int_D \sqrt{|F_u|^2|F_v|^2 - \langle F_u, F_v\rangle^2}\, du\,dv$$

<u>Comment</u> If F is injective, by the area formula we have

$$\mathscr{A}(F) = \mathcal{H}^2(F(D))$$

the standard area measure,

DEF We say that F is <u>weakly conformal</u> if on D we have:

1) $|F_u| = |F_v|$,
2) $\langle F_u, F_v \rangle = 0$.

It could be $F_u(z) = F_v(z) = 0$ at some $z \in D$.
If $|F_u| = |F_v| = 1$ then F is <u>conformal</u>.

LEMMA We always have $\mathcal{A}(F) \leq \mathcal{E}(F)$. Equality holds if and only if F is weakly conformal.

Proof. The proof is the geometric-arithmetic mean inequality.
Indeed,

$$\det(g) = \underbrace{|F_u|^2|F_v|^2 - \langle F_u, F_v\rangle^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{Cauchy-Schwarz}}} \overset{?}{\leq} \left[\frac{1}{2}\left(|F_u|^2 + |F_v|^2\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(g)\right]^2$$

if and only if

$$\circledast \qquad -4\langle F_u, F_v\rangle^2 \leq \left(|F_u|^2 - |F_v|^2\right)^2.$$

Inequality $\circledast$ is clearly satisfied. It follows that

$$\mathcal{A}(F) = \int_D \sqrt{\det(g)}\,du\,dv \leq \frac{1}{2}\int_D \mathrm{tr}(g)\,du\,dv = \mathcal{E}(F).$$

The equality case $\mathcal{A}(F) = \mathcal{E}(F)$ implies that we have

$$\sqrt{\det(g)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(g) \quad \text{on } D.$$

By $\circledast$, this in turn implies that $\langle F_u, F_v \rangle = 0$ and $|F_u| = |F_v|$, i.e., F is weakly conformal.

$\square$

We want to study the following minimum problems.
Let $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ be a Jordan curve (of class C^1). Let

$$\mathscr{C}(\Gamma) = \left\{ F \in C^2(D; \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D}; \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} F : \partial D \to \Gamma \\ \text{is a homeomorphism} \end{array} \right\}.$$

The parametric Plateau problem consists in finding a minimizer of

$$(1) \qquad \inf \{ \mathscr{A}(F) \; ; \; F \in \mathscr{C}(\Gamma) \}.$$

This problem is difficult because $\mathscr{C}(\Gamma)$ is not compact and for any diffeomorphism $\phi : \bar{D} \to \bar{D}$ we have

$$\mathscr{A}(F \circ \phi) = \mathscr{A}(F).$$

In fact, the area does not depend on the parameterization (Exercise).
So there is no hope that a minimizing sequence is compact.

Douglas' idea was to solve the minimum problem for the Dirichlet integral and using the lemma $\mathscr{A} = \mathscr{E}$

for conformal F, obtaining a solution to the Plateau problem. So we consider the problem

$$(2) \qquad \inf \{ \mathcal{E}(F) : F \in \mathcal{C}(\Gamma) \}.$$

Here the situation is still noncompact but it is more favourable because $\mathcal{E}$ is invariant under a smaller class of diffeomorphisms of D.

The Moebius group is the group of diffeomorphisms $\phi : D \to D$ of the form

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \qquad z \in D,$$

for some $\theta \in [0, 2\pi)$ and $z_0 \in D$. These are the biholomorphic maps of D. The group loses compactness when $|z_0| \to 1$. Notice that $\phi : \partial D \to \partial D$.

<u>EXERCISE</u> Show that $\mathcal{E}(F \circ \phi) = \mathcal{E}(F)$ precisely when ϕ is a Moebius transformation.

Problems (1) and (2) are linked by an ε-conformality result due to Morrey, 1948:

<u>THEOREM</u> We have $\inf\limits_{F \in \mathcal{C}(\Gamma)} \mathcal{A}(F) = \inf\limits_{F \in \mathcal{C}(\Gamma)} \mathcal{E}(F)$.

Morrey shows that for any F and for any $\varepsilon > 0$ there exists a diffeomorphism $\phi : D \longrightarrow D$ such that $\mathcal{E}(F) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{A}(F)$. We will not prove Morrey's theorem here.

<u>DEF</u> Let $F \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$ be weakly conformal.

The set

$$\operatorname{Sing}(F) = \{ z \in D : |F_u(z)| = |F_v(z)| = 0 \}$$

is the <u>singular set</u> of F.

If $z \in D \setminus \operatorname{Sing}(F)$, the set $\Sigma = F(D_r(z)) = \{F(w) : |w - z| < r\}$ is a C^1-embedded 2-surface, for some $r > 0$.

If $z \in \operatorname{Sing}(F)$, then $\Sigma = F(D)$ may have a singularity at the point $F(z) \in \Sigma$.

We are ready to state the main theorem concerning the parametric Plateau problem.

THEOREM Let $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, be a Jordan curve of class C^1. Then there exists $F \in \mathcal{C}(\Gamma)$ realizing the minimum

$$\min\{\mathcal{A}(F) \; ; \; F \in \mathcal{C}(\Gamma)\}.$$

Moreover:

1) $F \in C^\infty(D;\mathbb{R}^n)$ and $\Delta F = 0$, i.e., each coordinate of F is harmonic.

2) $F : \partial D \to \Gamma$ is a homeomorphism ($F \in \mathcal{C}(\Gamma)$).

3) F is weakly conformal.

4) Sing(D) consists of isolated points of D.

* * *

We start the proof by first showing the existence of a minimizer for the problem

$$\min\{\mathcal{E}(F) \; ; \; F \in \mathcal{C}(\Gamma)\}.$$

We first fix a parameterization of Γ. Let $\gamma : \partial D \to \Gamma$ be continuous. By the PDEs theory we know that the Dirichlet problem

$$(3) \qquad \begin{cases} \Delta F = 0 & \text{in } D \\ F_{|\partial D} = \gamma \end{cases}$$

has a unique solution $F \in C^\infty(D;\mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D};\mathbb{R}^n)$.

In general it is $\mathcal{E}(F) = +\infty$, see the Hadamard's example. However, if γ is of class C^1 then we have $\mathcal{E}(F) < \infty$.

Since $\mathcal{E}$ is a convex functional we know that the critical point F is a minimizer for $\mathcal{E}$. Indeed, let $G \in C_c^\infty(D; \mathbb{R}^n)$. Then we have

$$\mathcal{E}(F+G) = \frac{1}{2}\int_D |\nabla F + \nabla G|^2 \, du dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_D \left\{ |\nabla F|^2 + |\nabla G|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla F^i, \nabla G^i \rangle \right\} du dv$$

where

$$\langle \nabla F^i, \nabla G^i \rangle = \operatorname{div}(G^i \nabla F^i) - G^i \underbrace{\Delta F^i}_{=0}$$

and

$$\int_D \operatorname{div}(G^i \nabla F^i) \, du dv = 0$$

by the divergence theorem. So we get

$$\mathcal{E}(F+G) = \frac{1}{2}\int_D \left\{ |\nabla F|^2 + |\nabla G|^2 \right\} du dv \geq \mathcal{E}(F),$$

Now we must get rid of the specific parameterization of Γ.

For $\gamma \in C^1(\partial D; \Gamma)$ homeomorphism, let F^γ the solution of the Dirichlet problem (3). Let $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ be a sequence such that

$$\lim_{j \to \infty} \mathcal{E}(F^{\gamma_j}) = \overline{\mathcal{E}} := \inf \{ \mathcal{E}(F) : F \in \mathcal{C}(\Gamma) \}.$$

We are sure that $\overline{\mathcal{E}} < \infty$ because $\Gamma \in C^1$.

<u>Assume that</u> $\gamma_j \xrightarrow[j \to \infty]{\partial D} \gamma \in C(\partial D; \Gamma)$. The limit curve γ is only continuous and it may lose injectivity.

By the Maximum Principle for harmonic functions:

$$\max_{z \in \overline{D}} |F^{\gamma_j}(z) - F^{\gamma_k}(z)| = \max_{z \in \partial D} |\gamma_j(z) - \gamma_k(z)|.$$

It follows that $F^{\gamma_j} \xrightarrow[j \to \infty]{\overline{D}} F \in C(\overline{D}; \mathbb{R}^n)$. But harmonicity is preserved by the uniform convergence and so $F \in C^\infty(D; \mathbb{R}^n)$ with $\Delta F = 0$ in D

By weak compactness in $H^1(D; \mathbb{R}^n)$ we can also assume that $\nabla F^{\gamma_j} \xrightarrow[j \to \infty]{L^2} \nabla F$ and from this we deduce that

$$\mathcal{E}(F) \leq \liminf_{j \to \infty} \mathcal{E}(F^{\gamma_j}) = \overline{\mathcal{E}}$$

If $F \in \mathscr{C}(\Gamma)$, i.e., if $F : \partial D \to \Gamma$ is a homeomorfism it follows that $\mathscr{E}(F) = \overline{\mathscr{E}}$. We will prove this later.

* * *

Our next task is to show that we can choose a minimizing sequence $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ that converges uniformly. In this crucial point (compactness) we need the Courant-Lebesgue Lemma.

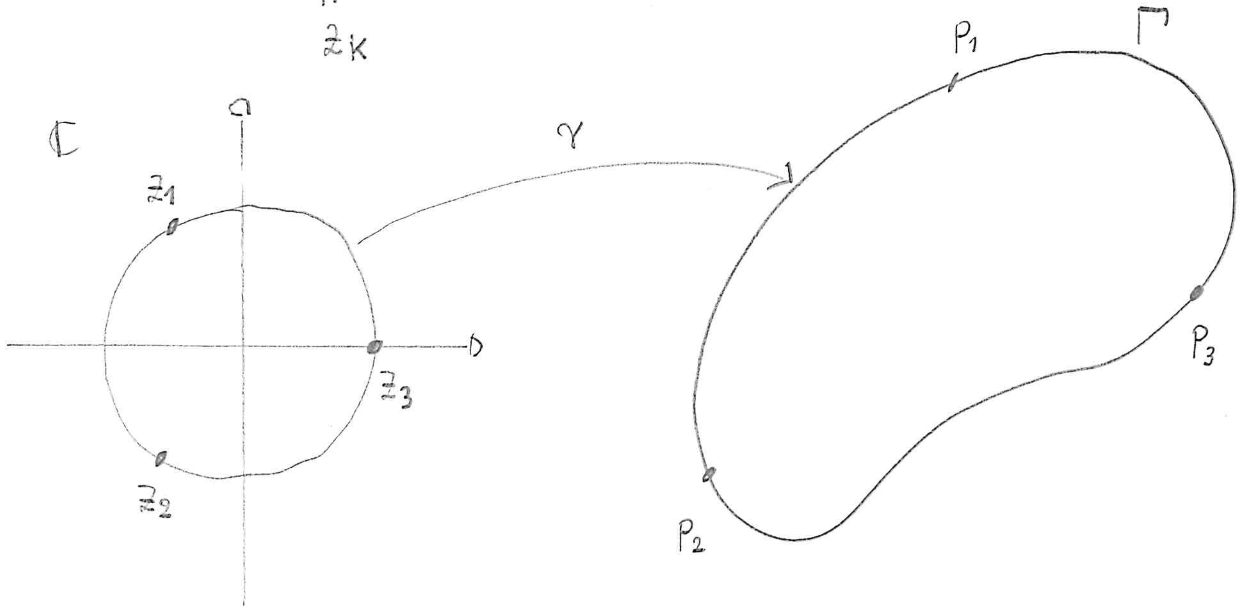
The compactness is achieved by a three point normalization of the curves γ^j.

<u>LEMMA</u> Let $z_1, z_2, z_3 \in \partial D$ and $w_1, w_2, w_3 \in \partial D$ be two triples of distinct points in ∂D, taken with the same order. Then there exists a (unique) Möbius transformation $\phi : D \to D$ such that $\phi(z_k) = w_k$ for $k = 1, 2, 3$.

The proof is left as an exercise.

Fix three distinct points $p_1, p_2, p_3 \in \Gamma$. Since $\mathscr{E}(F \circ \phi) = \mathscr{E}(F)$ for ϕ Möbius, we can assume that each curve γ^j of the minimizing sequence satisfies

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ z_K}}{\gamma^j\left(e^{i\frac{2K}{3}\pi}\right)} = P_K \quad \text{for } K = 1,2,3 .$$



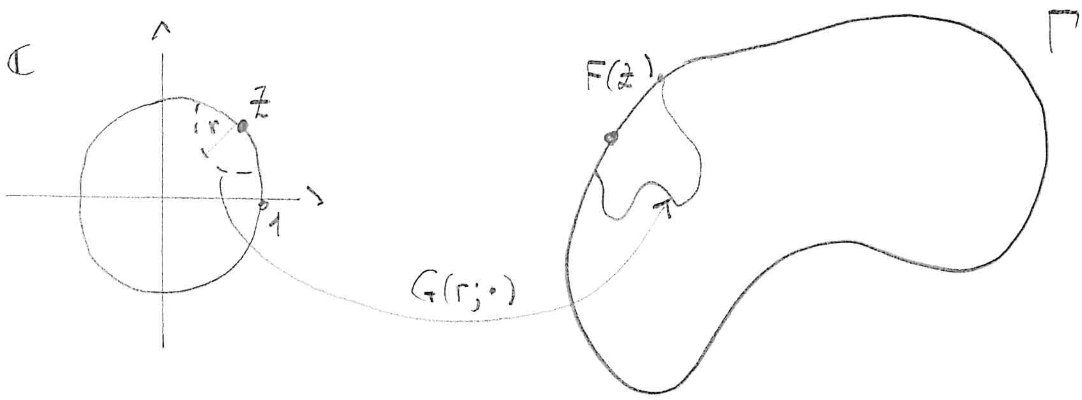
The following lemma is known as Courant - Lebesgue lemma. It does not use the three points normalization.

Fix a point $z \in \partial D$ and use polar coordinates centered at z. We let

$$G(r;\vartheta) = F(z + re^{i\vartheta})$$

with $r \in (0,2)$ and $\vartheta \in \Theta_r = (\vartheta^-(r), \vartheta^+(r))$.

For fixed r we consider the curve $\vartheta \mapsto G(r;\vartheta)$.



LEMMA For any $\delta \in (0,1)$ there exists $r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ such that

$$\mathrm{Length}(G(r;\cdot)) \leq \sqrt{\frac{4\pi\, \mathcal{E}(F)}{-\log(\delta)}} .$$

Proof. The energy $\mathcal{E}(F)$ in polar coordinates is

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla F|^2 \, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{\Theta_r} \left\{ |G_r|^2 + \frac{1}{r^2} |G_\theta|^2 \right\} d\theta \, r\, dr$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{|\Theta_r|}{r} ⨍_{\Theta_r} |G_\theta|^2 \, d\theta \, dr .$$

By Hölder or Jensen inequality:

$$⨍_{\Theta_r} |G_\theta| \, d\theta \leq \left(⨍_{\Theta_r} |G_\theta|^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} .$$

So we find

$$2\mathcal{E}(F) \geq \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{|\Theta_r|}{r} \left(⨍_{\Theta_r} |G_\theta| \, d\theta \right)^2 dr =$$

$$= \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r|\Theta_r|} \left(\int_{\Theta_r} |G_\theta| \, d\theta \right)^2 dr$$

$$\geq \frac{1}{\pi} \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r} \left(\int_{\Theta_r} |G_\theta| \, d\theta \right)^2 dr$$

because $|\Theta_r| \leq \pi$. Choosing $r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ where $\int_{\Theta_r} |G_\theta| d\theta$ = Length $(G(r;\cdot))$ is minimum:

$$2\pi\, \mathcal{E}(F) \geq \text{Length}(G(r;\cdot))^2 \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r}\, dr =$$

$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right) \text{Length}(G(r;\cdot))^2 .$$

The claim follows.

$\square$

<u>LEMMA (Equicontinuity)</u>: Let $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ be a Jordan curve of class C^1 and let $\gamma : \partial D \to \Gamma$ be a parameterization normalized by three points. Assume that $\mathcal{E}(F^\gamma) \leq \hat{\mathcal{E}} < \infty$. Then for any $\varepsilon > 0$ there is $\delta = \delta(\hat{\mathcal{E}}) > 0$ such that

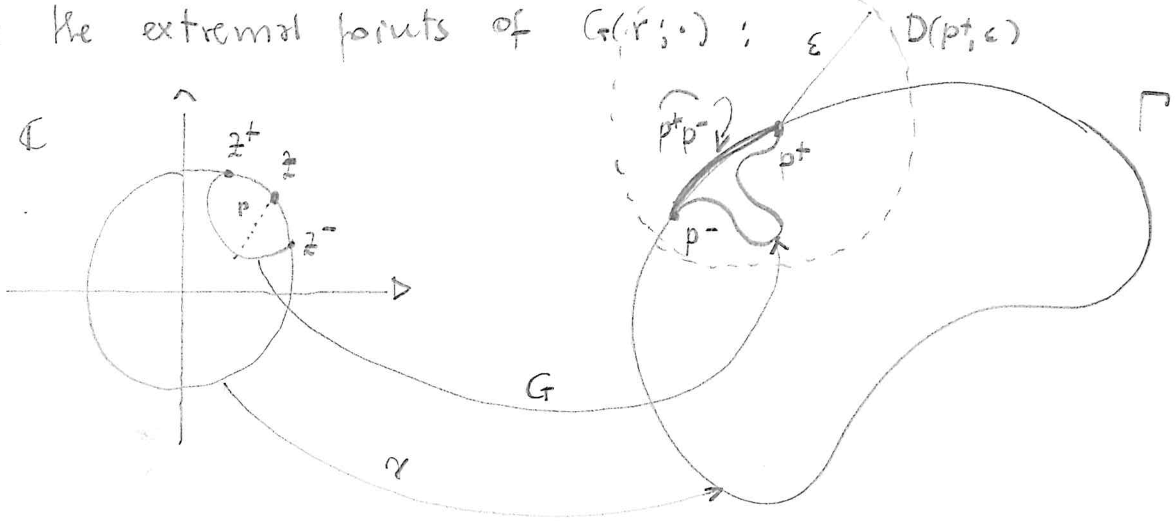
$$\underset{z, w \in \partial D}{|z - w| < \delta} \quad \Rightarrow \quad |\gamma(z) - \gamma(w)| < \varepsilon .$$

Proof. Let $p_1, p_2, p_3 \in \Gamma$ the points of the normalization. We can choose $\varepsilon > 0$ such that $2\varepsilon < \min\{|p_1 - p_2|, |p_1 - p_3|, |p_2 - p_3|\}$. From $\Gamma \in C^1$ it follows that $\exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall p \in \Gamma$ the set $\Gamma \cap D(p, \varepsilon)$ is connected for all $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

For $z \in \partial D$ let $\theta \mapsto G(r;\theta) = F(z + re^{i\theta})$ as above. By the Lemma there is $r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ such that

$$\text{Length}(G(r;\cdot)) \leq \sqrt{\frac{4\pi\,\mathcal{E}(F)}{-\log\delta}} \leq \sqrt{\frac{4\pi\,\hat{\mathcal{E}}}{-\log\delta}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{upon choice of } \delta.}}{<} \varepsilon .$$

Let $z^+, z^- \in \partial D$ as in the picture and $p^+ = \gamma(z^+)$, $p^- = \gamma(z^-)$ be the extremal points of $G(r;\cdot)$:



Let $\widehat{z^+z^-} = \partial D \cap D(z,r)$ and $\widehat{p^+p^-} \subset \Gamma$ be the arc from p^- to p^+ that is contained in $D(p^+,\varepsilon)$.

Notice that:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \cap D(p^+,\varepsilon) \text{ connected} \\ p^- \in \Gamma \cap D(p^+,\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{p^+p^-} \subset D(p^+,\varepsilon).$$

The definition is well-posed.

Now there are two cases:

1) $\gamma(\widehat{z^+z^-}) = \widehat{p^+p^-}$;

2) $\gamma(\widehat{z^+z^-}) = \Gamma \setminus \widehat{p^+p^-}$.

But $D(z,r)$ contains at most one of $z_K = e^{i\frac{2K\pi}{3}}$, $K = 1,2,3$, while $\Gamma \setminus D(p^+,\varepsilon)$ contains at least two of p_1, p_2, p_3.

It follows that $\gamma(\widehat{z^+z^-}) = \widehat{p^+p^-}$.

Finally, take $w \in D(z,\delta) \subset \widehat{z^+z^-}$. Then

$$|\gamma(z) - \gamma(w)| \leq |\gamma(z) - p^+| + |p^- - \gamma(w)| < 2\varepsilon$$

because $\gamma(z), \gamma(w) \in \gamma(\widehat{z^+z^-}) \subset \widehat{p^+p^-} \subset D(p^-,\varepsilon)$.

$\square$

We come back to the minimizing problem.
Let $(\gamma^j)_{j\in\mathbb{N}}$ be a minimizing sequence for

$$\inf\{\mathcal{E}(F^\gamma) \mid \gamma : \partial D \to \Gamma \text{ homeomorphism}\}.$$

Then we have $\mathcal{E}(F^{\gamma_j}) \leq \hat{\mathcal{E}} < \infty$ for all $j \in \mathbb{N}$.
We can assume that each γ_j is normalized by the same three points. Then the sequence is equicontinuous.
By Ascoli-Arzelà theorem there is a sub-sequence

converging uniformly. We obtained the compactness.

* * *

Let $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ the mapping obtained by compactness from the problem (4). We know that

1) $F \in C^\infty(D; \mathbb{R}^n)$ and $\Delta F = 0$

2) $F \in C(\overline{D}; \mathbb{R}^n)$ and $F(\partial D) = \Gamma$. It is still to show that $F : \partial D \to \Gamma$ is a homeomorphism

3) For any diffeomorphism $\varphi : \overline{D} \to \overline{D}$ we have the minimality

$$\mathcal{E}(F) \leq \mathcal{E}(F \circ \varphi). \tag{5}$$

Using this property, in this section we prove that F is weakly conformal.

<u>LEMMA</u> Let $F \in C^\infty(D; \mathbb{R}^n)$ be harmonic. Then the mapping $\Phi : D \to \mathbb{C}$

$$\Phi(z) = |F_u(z)|^2 - |F_v(z)|^2 - 2i\langle F_u, F_v \rangle$$

is holomorphic.

Proof. We use the standard notation

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)$$

$$\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v).$$

Then we have

$$(F_z)^2 := \langle F_z, F_z \rangle = \frac{1}{4}\langle F_u - iF_v, F_u - iF_v\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ |F_u|^2 - |F_v|^2 - 2i\langle F_u, F_v\rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\Phi$$

and thus

$$\Phi_{\bar z} = 4\frac{\partial}{\partial \bar z}(F_z)^2 = 8\langle F_z, F_{z\bar z}\rangle = 2\langle F_z, \Delta F\rangle$$

$$= 0$$

$\square$

The mapping F is weakly conformal precisely when $\Phi = 0$.

Let $\tau : \bar D \to \mathbb{C}$ be a vector field such that

$$\tau(z) \in T_z \partial D \quad \text{for all } z \in \partial D$$

For $\varepsilon \in \mathbb{R}$ we denote by $\phi(z;\varepsilon)$ its flow.

Namely, we have $\phi(z;0) = z$ and

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(z;\varepsilon) = \tau\left(\phi(z;\varepsilon)\right).$$

Notation: $\phi(z;\varepsilon) = \phi_\varepsilon(z)$. Then for any ε we have $\phi_\varepsilon : \overline{D} \to \overline{D}$ and $\phi_\varepsilon : \partial D \to \partial D$.

<u>LEMMA</u> We have $\displaystyle \frac{d\,\mathcal{E}(F\circ\phi_\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_D \mathrm{Re}\left(\overline{\Phi}\cdot\tau_{\overline{z}}\right) du\,dv.$

If F has the minimizing property (5) then the lemma implies that:

$$0 = \frac{d\,\mathcal{E}(F\circ\phi_\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_D \mathrm{Re}\left(\overline{\Phi}\cdot\tau_{\overline{z}}\right) du\,dv$$

Taking $\tau \in C_c^\infty(D;\mathbb{C})$ we can integrate by parts obtaining

$$\mathrm{Re}\left(\int_D \overline{\Phi}_{\overline{z}}\cdot\tau \; du\,dv\right) = 0$$

This implies that $\Phi_{\overline{z}} = 0$. We already knew this.

Now let τ be general again. Using $\bar{\Phi}_{\bar{z}} = 0$ and the divergence theorem we get

$$\int_D \bar{\Phi}_{\bar{z}} \cdot \tau \, du dv = \int_D (\bar{\Phi} \cdot \tau)_{\bar{z}} = [\text{Exercise}]$$

$$= \int_{\partial D} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Exterior Normal}}}{z} \cdot \bar{\Phi}(z) \cdot \tau(z) \, dH^1$$

However, this is not permitted because $\bar{\Phi}$ is not defined on ∂D (we do not know if $F \in C^1(\bar{D}; \mathbb{R}^n)$).

So we proceed as follows

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Minimality}}}{=} Re\left(\int_D \bar{\Phi} \cdot \tau_{\bar{z}} \, du dv\right) \overset{\bar{\Phi} \cdot \tau_{\bar{z}} \in L^1(D)}{=} \lim_{r \uparrow 1} Re\left(\int_{D_r} \bar{\Phi} \cdot \tau_{\bar{z}} \, du dv\right)$$

$$= Re\left(\lim_{r \uparrow 1} \int_{D_r} (\bar{\Phi} \cdot \tau)_{\bar{z}} \, du dv\right)$$

$$= Re\left(\lim_{r \uparrow 1} \int_{\partial D_r} \frac{z}{|z|} \cdot \bar{\Phi}(z) \cdot \tau(z) \, dH^1\right).$$

Now we choose a "smart" τ. We recall the representation kernel for harmonic functions in the disk. If $h : D \to \mathbb{R}$ is harmonic and $|w| < r < 1$ then

$$h(w) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r} \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z-w|^2} \, h(z) \, dH^1(z)$$

$$= \int_{\partial D_r} K(w,z) \, h(z) \, dH^1(z)$$

with $K(w,z) = \dfrac{|z|^2 - |w|^2}{2\pi |z| \, |z-w|^2}$.

We choose

$$\tau(z) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Real}}}{K(w,z)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tangent to } \partial D}}{(iz)}$$

The singularity at w can be cut off. So τ is admissible.

We get

$$0 = \mathrm{Re}\left(\lim_{r \uparrow 1} \int_{\partial D_r} i \, z^2 \Phi(z) \, K(w,z) \, dH^1 \right)$$

$$= - \lim_{r \uparrow 1} \int_{\partial D_r} \mathrm{Im}\,(z^2 \Phi(z)) \, K(w,z) \, dH^1 = - \mathrm{Im}\,(w^2 \Phi(w)).$$

We conclude that:

$$\operatorname{Im}(z^2 \Phi(z)) = 0 \quad \text{on } D \quad \Rightarrow \quad z^2 \Phi(z) = \underset{\text{on } D}{\text{Constant}} = 0$$

That gives $\Phi(z) = 0$ on D.

$\square$

* * *

Even though the minimizing curves $\gamma_j : \partial D \to \Gamma$ are homeomorphisms, the uniform limit $\gamma : \partial D \to \Gamma$ may lose injectivity.
We show that this is not the case

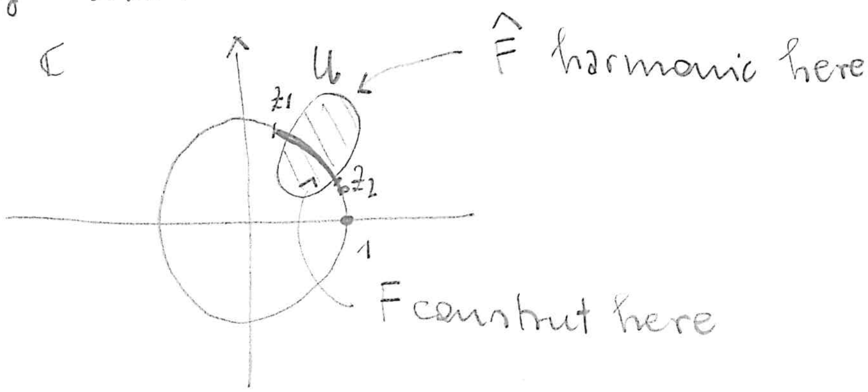
<u>LEMMA</u> The minimizing F is a homeomorphism from ∂D to Γ.

Proof. By contradiction, assume there exists $z_1, z_2 \in \partial D$ such that $F(z_1) = F(z_2)$. Then F is constant on the arc $\widehat{z_1 z_2}$ (in one of the two).
This follows from the fact that the limiting γ_j are homeomorphisms.

Define $\hat{F} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ by a spherical reflection:

$$\hat{F}(z) = \begin{cases} F(z) & \text{for } z \in \overline{D} \\ F\left(\dfrac{z}{|z|^2}\right) & \text{for } |z| > 1 \end{cases}$$

Being constant on $\widehat{z_1 z_2}$, by Schwarz Reflection Principle, $\hat{F}$ is harmonic in a small open set $\mathcal{U}$ crossing $\widehat{z_1 z_2}$:



The map $\hat{F}_z : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^n$ is thus holomorphic and constant on $\widehat{z_1 z_2}$. Then it is constant.

Assuming $F(z_1) = F(z_2) = 0$ we deduce that:

$$\hat{F}_z = 0 \text{ on } \mathcal{U} \implies F = \text{const. on } D \cap \mathcal{U}$$
$$\implies F = \text{const. on } D.$$

This is not possible because $F : \partial D \to \Gamma$ is surjective.

$\square$

Now we can conclude the proof of the Douglas-Radó theorem. Let $F \in C^\infty(D; \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D}; \mathbb{R}^n)$ be a solution to the minimizing for the energy. Then we have;

$$\mathcal{A}(F) \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ conforme}}}{=} \mathcal{E}(F) = \inf_{F \in \mathcal{C}(\Gamma)} \mathcal{E}(F) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Morrey.}}}{=} \inf_{F \in \mathcal{C}(\Gamma)} \mathcal{A}(F)$$

Moreover, $F \in \mathcal{C}(\Gamma)$ because $F : \partial D \to \Gamma$ is a homeomorphism.

Finally, the singular set is

$$\operatorname{Sing}(F) = \{ z \in D \,;\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{holomorphic}}}{F_z} = 0 \}$$

with $F_z \neq 0$. So $\operatorname{Sing}(F)$ consists of isolated points.