EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE PER FUNZIONALI CLASSICI

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con proprietà da discutere.
Usiamo le variabili $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.
La funzione L è detta Lagrangiana.
Posto che sia ben definito, consideriamo il funzionale $F : C^1(A) \to \mathbb{R}$

$$(*) \qquad F(u) = \int_A L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \, .$$

Bisogna assicurarsi che $x \mapsto L(x, u(x), \nabla u(x))$ sia integrabile.
Un funzionale integrale della forma (*) si dice funzionale classico del Calcolo delle Variazioni.

Supponiamo che $u \in C^1(A)$ sia un minimo per variazioni compatte:

$$F(u) \leq F(u+\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in C^1_c(A) \, .$$

Fissiamo una $\varphi \in C^1_c(A)$ e consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = F(u + t\varphi) \, , \qquad t \in \mathbb{R} \, .$$

Allora f ha un minimo in $t=0$ e se è

derivabile in $t=0$ allora deve essere $f'(0)=0$.

Con dei conti da giustificare caso per caso si trova

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \int_A L(x, u(x)+t\varphi(x), \nabla u(x)+t\nabla\varphi(x))\, dx$$

Da giustificare

$$= \int_A \frac{d}{dt} \Big(L(x, u(x)+t\varphi(x), \nabla u(x)+t\nabla\varphi(x)) \Big)\, dx$$

Da giust.

$$= \int_A \Big(L_u(\ldots)\, \varphi(x) + \langle \nabla_\xi L(\ldots), \nabla\varphi(x) \rangle \Big)\, dx .$$

Devono esistere le derivate $L_u = \frac{\partial L}{\partial u}$ e $L_{\xi_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i}$, $i=1,\ldots,n$

Mettendo $t=0$ si trova l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole:

$$\text{(ELd)}\quad 0 = \int_A \Big(L_u(x, u(x), \nabla u(x))\, \varphi(x) + \langle \underbrace{\nabla_\xi L(x, u(x), \nabla u(x))}_{=\,G(x)}, \nabla\varphi(x) \rangle \Big)\, dx$$

che è verificata $\forall \varphi \in C^1_c(A)$.

Se $G : A \to \mathbb{R}^n$, $G(x) := \nabla_\xi L(x, u(x), \nabla u(x))$, è di classe $C^1(A; \mathbb{R}^n)$ si ha

$$\langle G(x), \nabla\varphi(x) \rangle = \mathrm{div}\,(\varphi(x)\, G(x)) - \varphi(x)\, \mathrm{div}\, G(x)$$

Ora usiamo il seguente Lemma

<u>Lemma</u> Se $\varphi \in C_c^1(A)$ e $G \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ allora

$$\int_A \operatorname{div}(\varphi(x)\, G(x))\, dx = 0 .$$

Segue dal teorema della divergenza o anche - più semplicemente - da Fubini-Tonelli e dal teorema fondamentale del calcolo integrale.

Dunque, l'equazione di Eulero-Lagrange (ELd) diventa

$$0 = \int_A \varphi(x) \left\{ L_u(x, u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div}\left(\nabla_\xi L(x, u(x), \nabla u\right) \right\} d$$

per ogni $\varphi \in C_c^1(A)$.

Ora usiamo il seguente Lemma

<u>Lemma</u> Sia $f \in C(A)$. Se $\int_A \varphi(x) f(x)\, dx = 0$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(A)$ allora $f = 0$.

Se fosse $f \in L^1_{loc}(A)$ si avrebbe $f = 0$ q.o. su A.

Dunque, se $x \mapsto \{\ldots\}$ è continua si trova l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\text{(EL)} \qquad \operatorname{div}\left(\nabla_{\xi} L\,(x, u(x), \nabla u(x))\right) = L_u\,(x, u(x), \nabla u(x)) \,.$$
$$x \in A$$

Qui abbiamo bisogno di $u \in C^2(A)$.

L'equazione (EL) è un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine in forma di divergenza.

Examples

1) Harmonic functions, Consider the Lagrangian

$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$L(\xi) = \frac{1}{2} |\xi|^2 .$$

The corresponding functional $F : C^1(A) \longrightarrow [0,\infty]$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_A |\nabla u(x)|^2 dx ,$$

with $A \subset \mathbb{R}^n$ open set, is the Dirichlet energy.

The natural domain is the Sobolev space $H^1(A)$.

We have $L_u = 0$ and $\nabla_\xi L(\xi) = \xi$. The corresponding Euler equation is

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = 0$$

where

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

is the Laplacian. A function $u \in C^2(A)$ solving $\Delta u = 0$ is called harmonic function.

2) Poisson equation. For $A \subset \mathbb{R}^n$ open, let

$L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$L(x, u, \xi) = \frac{1}{2} |\xi|^2 + f(x)\, u$$

with $f \in L^2(A)$.

The corresponding energy is $F : H^1(A) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + f(x)\, u(x) \right\} dx .$$

Here, we have $L_u = f$ and $\nabla_\xi L = \xi$.

The Lagrange equation is

$$(*) \qquad \Delta u(x) = f(x) , \qquad x \in A .$$

Here, we have the physical interpretation:

u = electrostatic potential,

f = charge density.

Equation (*) is known as Poisson equation.

3) <u>Dirichlet eigenvalues for the Laplacian.</u> Fix $\lambda \in \mathbb{R}$ and consider $L = \frac{1}{2} |\xi|^2 + \lambda \frac{1}{2} u^2$. The corresponding Lagrange equation is

$$\Delta u(x) = \lambda u(x) , \qquad x \in \underset{\text{fixed.}}{\underset{\uparrow}{A}} \subset \mathbb{R}^n$$

We may fix the boundary value $u = 0$ on ∂A.

Then λ is called an eigenvalue for the Dirichlet Laplacian. Solutions u do exist only for eigenvalues.

4) p-Laplacian. Fix $p > 1$ and consider the functional $F : W^{1,p}(A) \longrightarrow \mathbb{R}$
(Sobolev space)

$$F(u) = \frac{1}{p} \int_A |\nabla u(x)|^p \, dx .$$

The corresponding Euler-Lagrange equation is the p-Laplacian equation:

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) = 0 \quad \text{in } A .$$

This is a non-linear equation.

5) Minimal-Surface Equation. Let $u \in C^1(A)$, with $A \subset \mathbb{R}^n$ bounded open set. The area of the graph of u is given by the area formula:

$$F(u) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} \, dx$$

with Lagrangian $L(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$. Here, we have $L_\xi = \dfrac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}$. The corresponding Euler-Lagrange equation is

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) = 0 .$$

This is the Minimal-Surface equation.
It is non-linear.

6) <u>Geodesics equation.</u> Let (M, g) be a Riemannian manifold. The length of a curve $\gamma \in C^1([0,1]; M)$ is by definition

$$F(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}\, dt.$$

Using charts we can locally identify M with an open set $A \subset \mathbb{R}^n$ with $n = \dim(M)$.

In this chart we have

$$g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \langle g(\gamma)\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ = standard scalar product in $\mathbb{R}^n$ and $g(x) \in M_n(\mathbb{R})$, $n \times n$ real symmetric matrix, depending smoothly on $x \in A$.

So the Lagrangian is $L : A \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$L(\gamma, \xi) = \langle g(\gamma)\xi, \xi \rangle^{1/2}$$

In this example, the functional variable $u = \gamma$ is vector-valued.

Fix $\varphi \in C_c^\infty((0,1); \mathbb{R}^n)$ and for $\varepsilon \in \mathbb{R}$ we consider

$$f(\varepsilon) = F(\gamma + \varepsilon\varphi) = \int_0^1 \langle g(\gamma + \varepsilon\varphi)(\dot{\gamma} + \varepsilon\dot{\varphi}), (\dot{\gamma} + \varepsilon\dot{\varphi}) \rangle^{1/2} dt,$$

and assume that $F(\gamma) \leq F(\gamma + \varepsilon\varphi)$ $\forall \varepsilon$, i.e., γ minimizes the length for fixed end-points.

Then we have $f'(0) = 0$.

Computations:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \langle g(\gamma+\varepsilon\varphi)(\dot\gamma+\varepsilon\dot\varphi), \dot\gamma+\varepsilon\dot\varphi \rangle =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} g_{ij}(\gamma+\varepsilon\varphi)(\dot\gamma_i+\varepsilon\dot\varphi_i)(\dot\gamma_j+\varepsilon\dot\varphi_j)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\gamma)\,\varphi_k\,\dot\gamma_i\dot\gamma_j + g_{ij}(\gamma)\,\dot\gamma_i\dot\varphi_j + g_{ij}(\gamma)\,\dot\gamma_j\dot\varphi_i$$

and thus

$$f'(0) = \int_0^1 \frac{1}{2}\,\frac{(*)}{\langle g(\gamma)\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2}}\,dt$$

We can assume that $\langle g(\gamma)\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2} = L = \text{constant} =$
$=$ length of γ (by arc-length parameterization)

and we get

$$0 = f'(0) = \frac{1}{L}\int_0^1 \frac{1}{2}\Big\{ \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\varphi_k\dot\gamma_i\dot\gamma_j + g_{ik}(\gamma)\dot\gamma_i\dot\varphi_k + g_{kj}(\gamma)\dot\gamma_j\dot\varphi_k \Big\}$$

integration by parts with $\varphi(0)=\varphi(1)=0$

$$= \frac{1}{L}\int_0^1 \frac{1}{2}\Big\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\varphi_k\dot\gamma_i\dot\gamma_j - \frac{d}{dt}\big(g_{ik}(\gamma)\dot\gamma_i\big)\varphi_k - \frac{d}{dt}\big(g_{kj}(\gamma)\dot\gamma_j\big)\varphi_k \Big\}\,dt$$

where $\frac{d}{dt}\big(g_{ik}(\gamma)\dot\gamma_i\big) = \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik}(\gamma)\dot\gamma_j\dot\gamma_i + g_{ik}(\gamma)\ddot\gamma_i$,

$$\frac{d}{dt}\big(g_{kj}(\gamma)\dot\gamma_j\big) = \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj}(\gamma)\dot\gamma_i\dot\gamma_j + g_{kj}(\gamma)\ddot\gamma_j.$$

We finally get

$$0 = f'(0) = \frac{1}{L}\int_0^1 \varphi_k \Big\{ - g_{ik}(\gamma)\,\ddot{\gamma}_i + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\gamma) - \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik}(\gamma) - \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj}(\gamma) \Big] \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \Big\}$$

Since $\varphi \in C^1_c((0,1); \mathbb{R}^n)$ is arbitrary we obtain the following system of ordinary differential equations:

$$g_{ik}(\gamma)\,\ddot{\gamma}_i + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik}(\gamma) + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj}(\gamma) - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\gamma) \Big) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 0$$

for $k = 1, \dots, n$, with summation on repeated indices.

We adopt the notation of Differential Geometry $\gamma^i = \gamma_i$.
We denote by $g^{\ell k}$ the inverse of g_{ik}, i.e., $g^{\ell k} g_{ik} = \delta_{\ell i}$ Kronecker symbol. We get

$$(*) \qquad \ddot{\gamma}^\ell + \Gamma^\ell_{ij}(\gamma)\,\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0, \qquad \ell = 1, \dots, n,$$

with $\Gamma^\ell_{ij} = \frac{1}{2} g^{\ell k} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik}(\gamma) + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj}(\gamma) - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\gamma) \Big)$.

Using the Levi-Civita connection ∇ the system (*) reads

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0,$$

$\square$

Du Bois-Reymond equation

When $n=1$ and the Lagrangian is autonomous, i.e.,

$$L(x,u,\xi) = L(u,\xi)$$

does not depend on x, then Euler-Lagrange equations can be integrated once.

Theorem Let $L \in C^2(\mathbb{R}^2)$ and let $u \in C^2(A)$, with $A \subset \mathbb{R}$ interval, be a solution of Euler-Lagrange equation

$$\left(L_\xi(u,u')\right)' - L_u(u,u') = 0 \quad \text{in } A,$$

Then there exists a constant $C \in \mathbb{R}$ such that

$$u' L_\xi(u,u') - L(u,u') = C \quad \text{in } A.$$

Proof, Consider the auxiliary function

$$H(x) = u'(x) L_\xi(u(x),u'(x)) - L(u(x),u'(x)), \quad x \in A$$

Differentiating in x we get

$$H' = \cancel{u'' L_\xi(u,u')} + u'\left(L_\xi(u,u')\right)' - L_u(u,u')u' \\ \cancel{- L_\xi(u,u')u''}$$

$$= u' \left\{ \left(L_\xi(u,u')\right)' - L_u(u,u') \right\} = 0$$

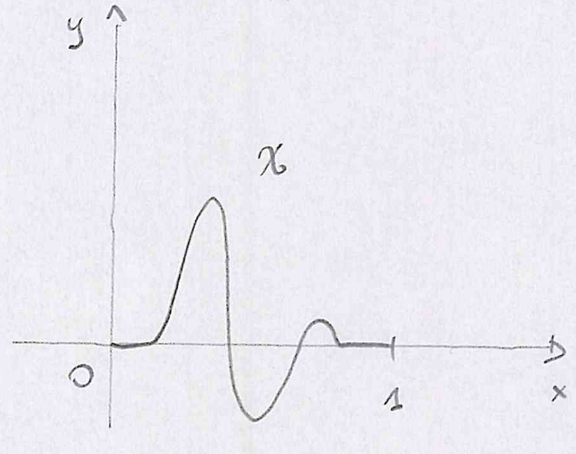
by Euler-Lagrange.

It follows that H is constant in the interval A.

□

Deduction of Du Bois-Reymond using "inner variations"

Fix the unit interval $A = (0,1)$ and take $\chi \in C_c^\infty(0,1)$:



There exists $\varepsilon_0 > 0$ such that

$$x + \varepsilon \chi(x) \in (0,1) \qquad \forall x \in (0,1) \quad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

So, if $u \in C^2(0,1)$ then the function

$$u_\varepsilon(x) = u(x + \varepsilon \chi(x)), \qquad x \in (0,1),$$

is well-defined and it belongs to $C^2(0,1)$.

We are varying the variable of u rather than the values of u. ($\longrightarrow$ "inner variation").

<u>Theorem</u> Let $L \in C^1(\mathbb{R}^2)$ and let $u \in C^2([0,1])$ be such that

$$\int_0^1 L(u,u')\,dx \le \int_0^1 L(v,v')\,dx$$

for all $v \in C^1([0,1])$ with $v(0) = u(0)$ and $v(1) = u(1)$.

Then there exists a constant $C \in \mathbb{R}$ such that

$$u' L_\xi(u,u') - L(u,u') = C \quad \text{in } (0,1).$$

Proof. Fix $\chi \in C_c^\infty(0,1)$ and for $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ consider

$$f(\varepsilon) = \int_0^1 L\Big(\overbrace{u(x+\varepsilon\chi(x))}^{=u_\varepsilon}, \overbrace{\big(u(x+\varepsilon\chi(x))\big)'}^{=u_\varepsilon'}\Big)\, dx .$$

By minimality we have $f'(0) = 0$.

Some computations:

$$\big(u(x+\varepsilon\chi(x))\big)' = u'(x+\varepsilon\chi(x)) \cdot [1+\varepsilon\chi'(x)]$$

and

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(u_\varepsilon, u_\varepsilon') = L_u(u_\varepsilon, u_\varepsilon')\, u'(x+\varepsilon\chi)\,\chi + L_\xi(u_\varepsilon, u_\varepsilon')\Big\{u''(x+\varepsilon\chi)\,\chi\,[1+\varepsilon\chi'] + u'(x+\varepsilon\chi)\,\chi'\Big\} .$$

At $\varepsilon = 0$ we have

$$0 = f'(0) = \int_0^1 \Big\{L_u(u,u')\,u'\chi + L_\xi(u,u')\,[u''\chi + u'\chi']\Big\}\, dx$$

$$= \int_0^1 \Big\{\underbrace{\Big[L_u(u,u')\,u' + L_\xi(u,u')\,u''\Big]}_{=\left(L(u,u')\right)'}\chi + L_\xi(u,u')\,u'\chi'\Big\}\, dx$$

$$\overset{\text{by parts}}{=} \int_0^1 \Big\{-L(u,u') + u' L_\xi(u,u')\Big\}\,\chi'\, dx .$$

We use here $\chi(0) = \chi(1) = 0$

Now we use the following Real Analysis Lemma.

Lemma Let $f \in C([0,1])$ be a continuous function such that
$$\int_0^1 f(x)\, \chi'(x)\, dx = 0$$
for all $\chi \in C_c^1(0,1)$. Then there exists $C \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = C$ for all $x \in [0,1]$.

We conclude that $u' L_\xi(u,u') - L(u,u') = C \in \mathbb{R}$ on $(0,1)$.

$\square$

METODO DI CONVESSITÀ (Metodi indiretti)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera "regolare" (per il Teorema della divergenza), ad esempio localmente grafico di una funzione Lipschitz.

Sia $L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

1) $L \in C^2(\bar{A} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$;

2) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (u, \xi) \longmapsto L(x, u, \xi)$ è convessa per ogni $x \in A$.

Consideriamo il funzionale $F : C^1(\bar{A}) \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Sia $\varphi : \partial A \to \mathbb{R}$ una funzione continua assegnata.

Sia $u \in C^1(\bar{A})$ una funzione tale che:

i) $u = \varphi$ su ∂A;

ii) u verifica in senso debole l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$0 = \int_A \left\{ \psi(x)\, L_u(x, u, \nabla u) + \langle \nabla_\xi L(x, u, \nabla u), \nabla \psi \rangle \right\} dx$$

per ogni $\psi \in C^1(\bar{A})$ tale che $\psi = 0$ su ∂A.

<u>TEOREMA</u> Nelle ipotesi precedenti la funzione $u \in C^1(\bar{A})$ è un minimo del problema

$$\min \left\{ F(v) \; : \; v \in C^1(\bar{A}), \quad v = \varphi \text{ su } \partial A \right\}.$$

DIM. Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = F(u + t(v-u)) .$$

Allora $f(1) = F(v)$ ed $f(0) = F(u)$.
Vogliamo provare che $f(1) \geq f(0)$.
Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ esiste $t^* \in [0,1]$ tale che

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(t^*).$$

Calcoliamo

$$f'(t)\Big|_{t=0} = \int_A \frac{d}{dt} L(x, u + t(v-u), \nabla u + t \nabla(v-u))\, dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_A \Big(L_u(\dots)(v-u) + \langle \nabla_\xi L(\dots), \nabla(v-u) \rangle \Big)\, dx \Big|_{t=0}$$

$$= 0,$$

in quanto $\psi = v - u \in C^1(\bar{A})$ è $\equiv 0$ su ∂A.

Quindi usando ii) si trova $f'(0) = 0$.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(t) = \int_A \left\langle H_{(u,\xi)} L\,(\ldots)\,(u-v, \nabla u - \nabla v), (u-v, \nabla u - \nabla v)\right\rangle$$

dove $H_{(u,\xi)} L$ è la matrice Hessiana di L. La derivata dentro l'integrale è lecita. Per la convessità si ha:

$$\left\langle H_{(u,\xi)} L(x, u+t(v-u), \nabla u + t\nabla(v-u))\,(u-v, \nabla u - \nabla v), (u-v, \nabla u - \nabla v)\right\rangle$$

in ogni punto $x \in A$ e per ogni $t \in [0,1]$. La tesi segue.

$\square$

FERMAT'S PRINCIPLE OF GEOMETRICAL OPTICS

ESEMPIO (Legge dell'ottica geometrica)

Sia $f \in L^\infty(0,1)$ una funzione tale che $0 < m \leq f(x) (\leq M)$ per ogni $x \in (0,1)$.

Per $u \in Lip([0,1])$ si consideri

$$F(u) = \int_{[0,1]} f(x) \underbrace{\sqrt{1+u'(x)^2}}_{\text{elemento di lunghezza}}\, dx$$

densità ottica che dipende dallo spazio (rocina)

La funzione $\xi \mapsto \sqrt{1+\xi^2}$ è strettamente convessa. La sua derivata è $\xi / \sqrt{1+\xi^2}$.

L'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole è

$$\int_{[0,1]} f(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \varphi'(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1)$$

Questo implica che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che (ESERCIZIO!)

$$f(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} = C \quad \text{per q.o. } x \in (0,1)$$

Siccome $f(x) > 0$ deduciamo che $u'(x)$ ha segno costante (q.o.). Inoltre

$$f(x)^2\, u'(x)^2 = C^2 (1 + u'(x)^2) \quad \Longleftrightarrow$$

$$u'(x)^2 (f(x)^2 - C^2) = C^2$$

Dunque $f(x)^2 > C^2$. (ovvero $|C| < m$).

In definitiva:

$$u'(x) = \pm \sqrt{\frac{C^2}{f(x)^2 - C^2}} \quad \text{per q.o. } x$$

Fissiamo un punto iniziale $(0,u_0)\in\mathbb{R}^2$ e un punto finale $(1,u_1)\in\mathbb{R}^2$. Per fissare le idee supponiamo $u_1\geq u_0$ e quindi scegliamo il segno $+$ in u'. Integrando

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \sqrt{\frac{C^2}{f(t)^2 - C^2}}\, dt .$$

La condizione finale è

$$(*) \qquad u(1) = u_1 = u_0 + \int_0^1 \sqrt{\frac{C^2}{f(t)^2 - C^2}}\, dt .$$

Sia

$$m := \sup\left\{ \lambda\in\mathbb{R} \,;\, f(x)\geq\lambda \text{ per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } x\in[0,1]\right\}$$

l'estremo inferiore essenziale di f. Per ipotesi abbiamo $m>0$. Deve essere

$$C^2 < m^2.$$

La funzione $g : [0,m^2) \longrightarrow [0,\infty)$

$$g(s) = \int_0^1 \sqrt{\frac{s}{f(t)^2-s}}\, dt$$

è continua e strettamente crescente.

Sia $\Delta = \lim_{s \to m^2} g(s)$. Dunque, se

$$u_1 - u_0 < \Delta$$

esiste una unica $C \in [0, m)$ tale che la condizione di punto finale (*) sia verificata.

TEOREMA Siano $0 \leq u_1 - u_0 < \Delta$ e

$$X = \{ u \in Lip([0,1]) \; ; \; u(0) = u_0 \text{ e } u(1) = u_1 \}.$$

Allora il funzionale $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} f(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} \, dx$$

ha minimo unico su X.

DIM. Abbiamo trovato un unico elemento di X che verifica l'equazione di Eulero-Lagrange e le condizioni al bordo. Per convessità questo elemento è un punto di minimo.

□

REFRACTION LAW

Fix a $t \in (0,1)$ and consider an "optical density function" $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ of the form

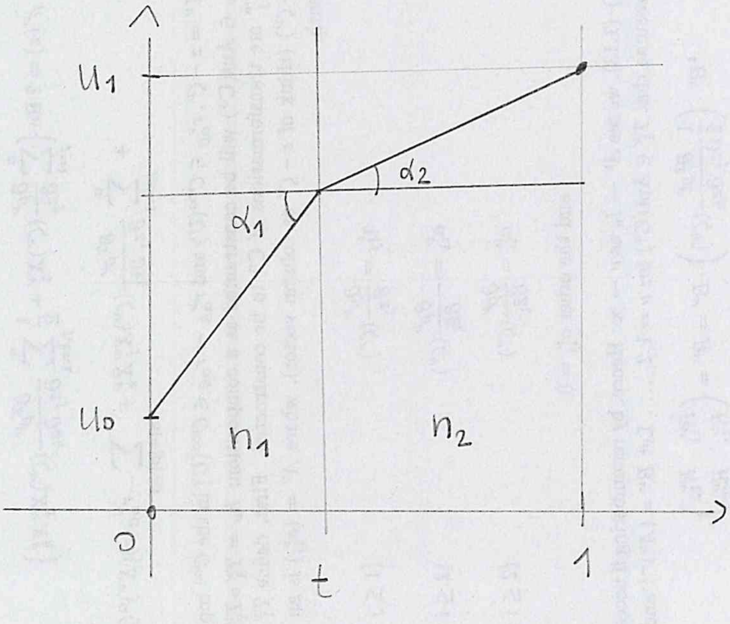
$$f(x) = \begin{cases} n_1 & \text{if } x \in (0,t), \\ n_2 & \text{if } x \in (t,1), \end{cases}$$

where $n_1 > 0$ and $n_2 > 0$ are two constants called refractive indices of the two media on the left and on the right of t. For instance

Air: $n = 1.000294$

Water: $n = 1.33$.

Given $u_0 < u_1$, we know that the trajectory of a ray of light from $(0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ to $(1, u_1) \in \mathbb{R}^2$ is of the following form:



EXERCISE Prove that the angles α_1 and α_2 satisfy the refraction law (Snell's formula)

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} .$$

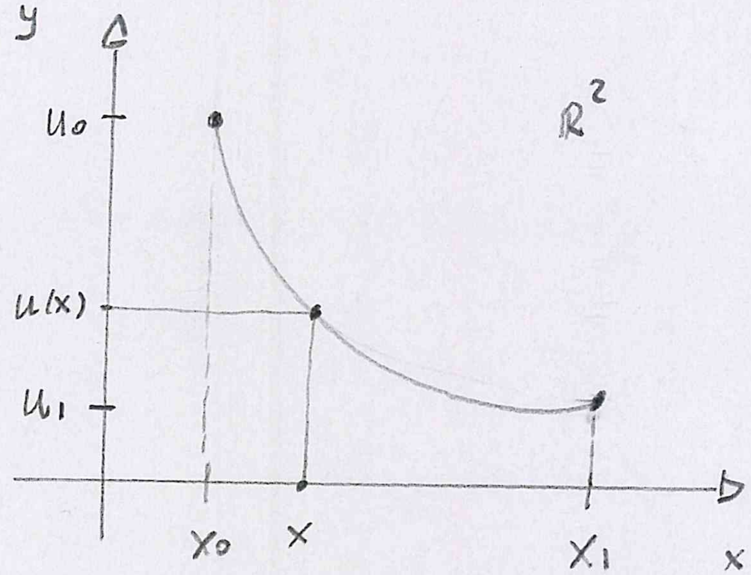
α_1 is the incidence angle
α_2 is the refraction angle

PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRÓNA

Siano $x_0 < x_1$ e $u_0 > u_1$.

Trovare la traiettoria che una particella percorre in tempo minimo cadendo sotto la forza di gravità, partendo dal punto $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ arrivando al punto $(x_1, u_1) \in \mathbb{R}^2$, "senza frizione".

Galileo 1638 : Arco di circonferenza.



m = massa g = costante gravitazionale

v = velocità ($v=0$ nel punto (x_0, u_0))

$u(x)$ = altezza all'ascissa $x \in [x_0, x_1]$

Conservazione energia:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g u(x) = m g u_0$$

e quindi $\quad v = \sqrt{2g(u_0 - u)}$. La velocità è

$$v = \frac{ds}{dt} \quad , \qquad s = \text{lunghezza curvilinea}$$

e quindi $\quad dt = ds/v$. Il tempo totale è

$$F(u) := T = \left(\int \frac{ds}{v} = \right) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{2g(u_0 - u(x))}} \, dx$$

Possiamo supporre $2g = 1$. La funzione

$$(u, \xi) \longmapsto \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{u_0 - u}}$$

non sembra convessa. Tuttavia prendendo

$$v = \sqrt{u_0 - u} \geq 0$$

con $\quad v^2 = u_0 - u \quad$ e $\quad u' = -2vv' \quad$ si trova

$$G(v) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1}{v(x)^2} + 4v'(x)^2} \, dx \, .$$

La funzione

$$(v,\xi) \longmapsto \sqrt{\frac{1}{v^2} + 4\xi^2} = \sup_{\substack{\alpha^2+\beta^2=1 \\ \alpha>0}} \left(\frac{\alpha}{v} + 2\beta\xi \right)$$

definita per $v>0$ e $\xi \in \mathbb{R}$ è convessa, in quanto sup di funzioni convesse.

Dunque, i punti stazionari (soluzioni di Eulero-Lagrange) del funzionale

$$F(u) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u_0 - u(x)}}\, dx$$

con $u(0) = u_0$ e $u(1) = u_1$ sono minimi del problema

$$\min \left\{ F(u) \,;\, \begin{array}{l} u \in C([x_0,x_1]) \cap C^2(x_0,x_1) \\ u(\cancel{0}\,x_0) = u_0,\ u(\cancel{1}\,x_1) = u_1,\ u' < 0 \end{array} \right\}.$$

La Lagrangiana $L(u,\xi) = \sqrt{1+\xi^2} \big/ \sqrt{u_0 - u}$ ha le derivate

$$L_\xi = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}\,\sqrt{u_0-u}}, \qquad L_u = +\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{(u_0-u)^{3/2}}.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è:

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u}} \right)' = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+u'^2}}{(u_0-u)^{3/2}} .$$

In realtà l'equazione si può integrare con il metodo di Du Bois-Reymond; esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{u'^2}{\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u}} - \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u_0-u}} = C$$

che diventa

$$-1 = C \sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u} .$$

Quindi $C < 0$ e quadrando:

$$(1+u'^2)(u_0-u) = \frac{1}{C^2} ,$$

ovvero

$$u' \sqrt{\frac{C^2(u_0-u)}{1-C^2(u_0-u)}} = -1$$

Integrando si trova

$$\int_{x_0}^{x} u'(t) \sqrt{\frac{c^2 (u_0 - u(t))}{1 - c^2 (u_0 - u(t))}} \, dt = -(x - x_0)$$

ovvero

$$\int_{u(x)}^{u_0} \sqrt{\frac{c^2 (u_0 - \tau)}{1 - c^2 (u_0 - \tau)}} \, d\tau = x - x_0$$

con $x = x_1$ si trova la condizione

$$(*) \qquad \int_{u_1}^{u_0} \sqrt{\frac{c^2 (u_0 - \tau)}{1 - c^2 (u_0 - \tau)}} \, d\tau = x_1 - x_0 .$$

La costante c deve verificare $1 - c^2 (u_0 - \tau) > 0$ per ogni $\tau \in (u_1, u_0)$ e quindi

$$0 \leq c^2 < \frac{1}{u_0 - u_1} .$$

L'equazione $(*)$ ha soluzione unica c^2 se

$$(**) \qquad x_1 - x_0 < \int_{u_1}^{u_0} \sqrt{\frac{u_0 - \tau}{\tau - u_1}} \, d\tau ,$$

Riassumiamo la discussione precedente nel seguente teorema.

<u>TEOREMA</u> Siano $x_0 \leq x_1$ e $u_0 \geq u_1$ numeri reali che verificano (**). Sia poi

$$X = \left\{ u \in C([x_0,x_1]) \cap C^2(x_0,x_1) \ ; \ \begin{array}{l} u(x_0) = u_0 \\ u(x_1) = u_1 \\ u' < 0 \end{array} \right\}$$

e sia $F : X \to [0,\infty]$

$$F(u) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u_0 - u(x)}}\, dx .$$

Allora F ha minimo unico su X.

La dimostrazione è nelle pagine precedenti. In effetti il grafico del minimo u descrive un arco di cicloide.

SEMI-DIRECT METHODS - BSC

- $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato,
- $\mathcal{U} : \partial A \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione assegnata (Lipschitz continua),
- $\mathcal{A} = \{ u \in \mathrm{Lip}(\bar{A}) \; : \; u_{|\partial A} = \mathcal{U} \}$

classe di funzioni ammesse,

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione convessa.

Consideriamo il funzionale $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A f(\nabla u(x))\, dx .$$

Dipende dal solo gradiente.
Per il Teorema di Rademacher $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^n$ esiste per q.o. $x \in A$, e inoltre $|\nabla u(x)| \leq \mathrm{Lip}(u)$, la costante di Lipschitz di u.
Inoltre, $x \longmapsto f(\nabla u(x))$ è in $L^\infty(A)$ e quindi l'integrale converge.
Vogliamo studiare l'esistenza del minimo

$$\min \{ F(u) \; : \; \underbrace{u \in \mathrm{Lip}(\bar{A}) \text{ e } u_{|\partial A} = \mathcal{U}}_{\Updownarrow \; u \in \mathcal{A}} \}.$$

ESEMPIO (Funzionale dell'area) La funzione $f(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$ è strettamente convessa e

$$F(u) = \int_A \sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}\, dx$$

è il funzionale dell'area.

Negli spazi di Sobolev l'ambiente naturale sarebbe $W^{1,1}(A)$ con $p = 1$, quindi.

Assegnata $\mathcal{U} \in Lip(\partial A)$ vogliamo trovare il grafico di area minima che ha come bordo il grafico di $\mathcal{U}$. Non sempre esiste.

DEFINIZIONE (Bounded slope Condition - Pendenza limitata)

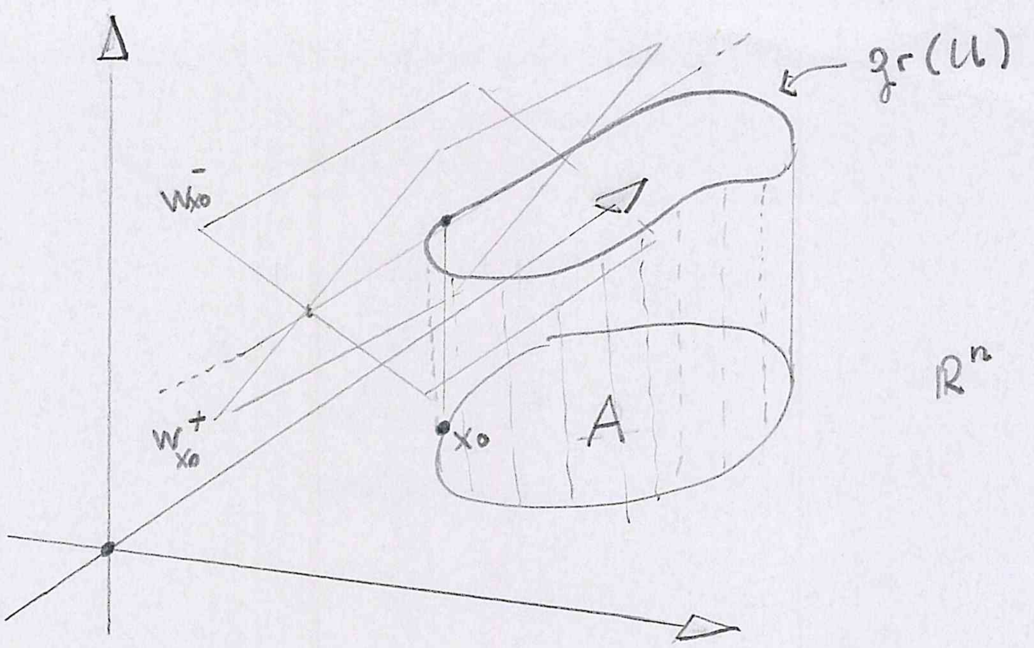
La coppia $(A, \mathcal{U})$, con $\mathcal{U} : \partial A \to \mathbb{R}$, verifica la bounded slope condition (BSC) se:

Esiste $Q > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \partial A$ esistono $w^-_{x_0}, w^+_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affini tali che:

i) $w^-_{x_0} \leq \mathcal{U} \leq w^+_{x_0}$ su ∂A;

ii) $w^-_{x_0}(x_0) = \mathcal{U}(x_0) = w^+_{x_0}(x_0)$;

iii) $Lip(w^{\pm}_{x_0}) \leq Q$.



ESERCIZIO Supponiamo che u non sia affine. Provare che:

$$(A, u) \text{ verifica BSC} \implies A \text{ è convesso}.$$

REMARK Se ∂A è di classe C^2 e le curvature principali di ∂A sono positive (>0) in ogni punto allora (A, u) verifica BSC per ogni $u \in C^2(\partial A)$. Teorema di Miranda, vedi Giusti Metodi Diretti del CdV Sez. 1.2.

Nostro obiettivo è di provare il seguente risultato.

limitato

TEOREMA 1 Supponiamo che $(A, \mathcal{U})$ verifichi BSC e sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (strettamente) convessa. Allora il minimo

$$\min \left\{ \int_A f(Du(x))\,dx \;:\; u \in Lip(\bar{A}) \text{ e } u|_{\partial A} = \mathcal{U} \right\}$$

è raggiunto (in modo unico se c'è "strettamente")

NOTAZIONI

$$Lip(u) = Lip_A(u) = \sup_{\substack{x,y\in A \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}$$

$$Lip(A) = \{ u : \bar{A} \to \mathbb{R} \mid Lip(u) < \infty \}$$

$$Lip_K(A) = \{ u \in Lip(A) \;:\; Lip(u) \leq K \}, \quad K > 0$$

$$Lip(A; \mathcal{U}) = \{ u \in Lip(A) \;:\; u|_{\partial A} = \mathcal{U} \}$$

$$Lip_K(A; \mathcal{U}) = \{ u \in Lip(A; \mathcal{U}) \;:\; Lip(u) \leq K \}.$$

Proposizione 2 Siano $K > 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa e $\mathcal{U} \in Lip_K(\partial A)$. Allora il minimo

$$\min \left\{ F(u) = \int_A f(Du(x))\,dx \;:\; u \in Lip_K(A; \mathcal{U}) \right\}$$

è raggiunto.

DIM. In primo luogo $Lip_k(A;u) \neq \emptyset$, segue dal Teorema di estensione di Mac Shane

▪ → Supponiamo per semplicità $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Sia $L = \inf\{F(u) ; u \in Lip_k(A;u)\}$ e consideriamo una successione minimizzante $u_h \in Lip_k(A;u)$, $h \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{h\to\infty} F(u_h) = L \in [-\infty, \infty).$$
$$(L \in \mathbb{R})$$

Abbiamo: (x₀ ∈ ∂A a piacere)

i) $Lip(u_h) \leq K \quad \forall h$

ii)
$$\begin{aligned} |u_h(x)| &\leq |u_h(x) - u_h(x_0)| + |u_h(x_0)| \\ &\leq K|x - x_0| + |u(x_0)| \\ &\leq K \operatorname{diam}(A) + |u(x_0)| \quad \forall x \in A \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall h \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Siamo nelle ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzelà. Quindi esiste una sottosuccessione - chiamata ancora $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ - che converge uniformemente ad una funzione $u \in Lip_k(A;u)$:

$$\lim_{h\to\infty} \max_{x\in\overline{A}} |u_h(x) - u(x)| = 0.$$

Dalla convessità di f:

$$f(\nabla u_h(x)) = f(\nabla u(x) + \nabla(u_h(x) - u(x))) \geq$$

Esiste q.o.

$$\geq f(\nabla u(x)) + \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h(x) - u(x)) \rangle$$

e quindi

$$F(u_h) \geq F(u) + \int_A \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h(x) - u(x)) \rangle d$$

Vogliamo usare la convergenza uniforme $u_h \rightrightarrows u$
bisogna togliere le derivate.
Siccome $\nabla f(\nabla u(x)) \in L^\infty(A; \mathbb{R}^n)$, $\forall \varepsilon > 0$
esiste $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_A |G(x) - \nabla f(\nabla u(x))| \, dx \leq \varepsilon.$$

Dunque

$$\int_A \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h - u) \rangle dx = \int_A \langle G, \nabla(u_h - u) \rangle dx$$

$$+ \int_A \langle \nabla f(\nabla u) - G, \nabla(u_h - u) \rangle dx$$

$$\leq \int_A \langle G, \nabla(u_h - u) \rangle dx + 2K\varepsilon.$$

Con una integrazione per parti e usando $u_h - u = 0$ su ∂A

$$\int_A \langle G, \nabla(u_h - u)\rangle\, dx = \underbrace{-\int_A \operatorname{div}(G)(u_h - u)\, dx}_{\xrightarrow{h\to\infty} 0}$$

Concludiamo che

$$L = \lim_{h\to\infty} F(u_h) \geq F(u) - 2K\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

e quindi $F(u) \leq L$ e quindi $F(u) = L$.

□

REMARK Sia u il minimo della Proposizione 2.

Se fosse $\mathrm{Lip}(u) < K$ potremmo procedere nel seguente modo.

Sia $v \in \mathrm{Lip}(A; \mathcal{U})$ solamente con $\mathrm{Lip}(v) < \infty$.

Per $t \in (0,1)$ piccolo risulta $u + t(v-u) \in \mathrm{Lip}_K(A$

e quindi:

$$F(u) \leq F(tv + (1-t)u) \overset{\text{convessità}}{\leq} tF(v) + (1-t)F(u)$$

$$\Downarrow \ (t>0)$$

$$F(u) \leq F(v)$$

Dunque, u sarebbe anche minimo per il TEOR. 1

□

DEFINIZIONE Una funzione $w \in Lip_k(A)$ si dice super-minimo del funzionale F se per ogni $\theta \in Lip_k(A, w)$ si ha

$$w \leq \theta \text{ in } A \quad \Rightarrow \quad F(w) \leq F(\theta).$$

Una funzione $v \in Lip_k(A)$ si dice sub-minimo per F se per ogni $\theta \in Lip_k(A, v)$ si ha

$$\theta \leq v \text{ in } A \quad \Rightarrow \quad F(v) \leq F(\theta).$$

COMMENTO I minimi di F (con dato al bordo fissato) sono sia super- che sub-minimi

TEOREMA (Principio del Massimo) Siano $k > 0$ ed $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strettamente convessa. Siano $w \in Lip_k(A)$ un superminimo di F e $v \in Lip_k(A)$ un sub-minimo di F. Allora:

$$v \leq w \text{ su } \partial A \quad \Rightarrow \quad v \leq w \text{ in } A.$$

DIM. L'insieme $B = \{x \in A ; v(x) > w(x)\}$ è aperto. Per assurdo supponiamo che $B \neq \emptyset$.

La funzione

$$\theta = \max\{v, w\} = \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in B \\ w(x) & \text{se } x \in A \setminus B \end{cases}$$

è in $Lip_k(A)$. Inoltre $\theta = w$ su ∂A e $\theta \geq w$ in A. Poiché w è un superminimo, si ha

$$\int_A f(\nabla w)\, dx = F(w) \leq F(\theta) = \int_A f(\nabla \theta)\, dx .$$

Siccome su $A \setminus B$ si ha $\nabla w = \nabla \theta$, deduciamo che

$$\int_B f(\nabla w)\, dx \leq \int_B f(\nabla v)\, dx .$$

Lavorando con $\hat{\theta} = \min\{v, w\}$ si ottiene la disuguaglianza opposta

$$\int_B f(\nabla v)\, dx \leq \int_B f(\nabla w)\, dx ,$$

e quindi;

$$\int_B f(\nabla v)\, dx = \int_B f(\nabla w)\, dx .$$

Sull'insieme B si deve avere $\nabla v \neq \nabla w$ su un insieme di misura positiva, altrimenti sarebbe $v = w$ in B (esercizio). Dunque, per la stretta convessità di f:

$$\int_B f\left(\nabla\left(\frac{v+w}{2}\right)\right)dx < \underbrace{\frac{1}{2}\int_B f(\nabla v)dx + \frac{1}{2}\int_B f(\nabla w)dx}_{\displaystyle \shortparallel \atop \displaystyle \int_B f(\nabla v)\,dx}.$$

Dunque la funzione

$$\hat{v} = \begin{cases} \dfrac{v+w}{2} & \text{su } B \\ v & \text{su } A \setminus B \end{cases}$$

contraddice la sub-minimalità di v.
Infatti $\hat{v} \in Lip_k(A)$, $\hat{v} = v$ su ∂A e $\hat{v} \leq v$ in A.

$\square$

<u>COROLLARIO</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strettamente convessa e $k > 0$. Siano $v, w \in Lip_k(A)$ due minimi di F ciascuno nella sua classe di dato al bordo. Allora: $\sup_A |v-w| = \sup_{\partial A} |v-w|$.

Dim. Esercizio.

(Von Neumann 1931)

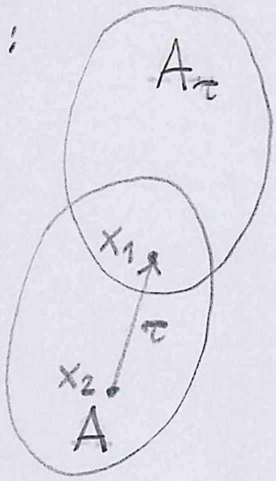
<u>LEMMA</u> (Riduzione alla frontiera) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ strettamente convessa e sia $u \in Lip_K(A)$ un minimo di

$$F(u) = \int_A f(\nabla u(x))\, dx$$

in $Lip_K(A)$. Allora

$$Lip_A(u) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|} .$$

Dim. Siano $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ e definiamo $\tau = x_1 - x_2$, $A_\tau = \tau + A$, $u_\tau(x) = u(x-\tau)$ con $u_\tau : A_\tau \to \mathbb{R}$, si ha:



$$x_1 \in A \cap A_\tau \neq \emptyset .$$

Le due funzioni u e u_τ minimizzano

$$\int_{A \cap A_\tau} f(\nabla u(x))\, dx$$

(ciascuna con il suo dato al bordo).

Dal Principio del massimo (dal suo Corollario) segue:

$$|u(x_1) - u(x_2)| = |u(x_1) - u_\tau(x_1)| \leq$$

$$\leq |u(\bar{x}) - u_\tau(\bar{x})| = |u(\bar{x}) - u(\bar{x}-\tau)|$$

per qualche $\bar{x} \in \partial(A \cap A_\tau)$. Dunque si ha

$$\bar{x} \in \partial A \quad \text{oppure} \quad \bar{x} - \tau \in \partial A .$$

Quindi

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{|u(\bar{x}) - u(\bar{x}-\tau)|}{|\tau|} \leq \sup_{\substack{x \in A \\ y \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|},$$

e siccome x_1, x_2 sono generici, questo conclude la prova.

□

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Sia $Q > 0$ la costante della BSC e fissiamo $K > Q$.
Sia $u \in Lip_K(A; U)$ un (il, per stretta convessità) minimo di

$$\min \left\{ \int_A f(\nabla u)\, dx \; : \; u \in Lip_K(A; U) \right\}.$$

Sia $x_0 \in \partial A$. Siccome $u(x) = U(x)$ per $x \in \partial A$, dal Principio del Massimo segue

$$w^-_{x_0} \leq U \leq w^+_{x_0} \text{ su } \partial A \overset{PM}{\Longrightarrow} \underset{\text{su } A}{w^-_{x_0} \leq u \leq w^+_{x_0}}.$$

Per il Lemma di riduzione alla frontiera:

$$\mathrm{Lip}(u, A) = \sup_{\substack{x \in A \\ x_0 \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|}.$$

D'altra parte,

$$u(x) - u(x_0) \leq w^+_{x_0}(x) - w^+_{x_0}(x_0) \leq Q|x - x_0|$$

$$u(x) - u(x_0) \geq w^-_{x_0}(x) - w^-_{x_0}(x_0) \geq -Q|x - x_0|$$

e quindi $|u(x) - u(x_0)| \leq Q|x - x_0|$, ovvero

$$\mathrm{Lip}(u, A) \leq Q < K.$$

Dall'osservazione fatta in precedenza segue che u è un minimo senza la restrizione $\mathrm{Lip}(u, A) \leq K$.

□

<u>ESERCIZIO</u>: I piani sono minimi nella loro classe di dato al bordo.

METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Sia X un insieme e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$ una funzione. Vogliamo studiare il problema di minimo

$$\min \{ F(x) \in (-\infty, \infty] \; : \; x \in X \}.$$

① Esistenza. Una strategia per dimostrare l'esistenza del minimo è il "metodo diretto del calcolo delle variazioni".

Cerchiamo una topologia τ su X con queste due proprietà:

i) $F : X \to (-\infty, \infty]$ è semicontinua inferiormente ovvero $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{ x \in X : F(x) > \lambda \} \in \tau .$$

I sopralivelli stretti (aperti) sono insiemi aperti.

ii) (X, τ) è compatto.

Le due proprietà sono in competizione perché è più probabile che (X, τ) sia compatto quando ci sono pochi aperti ("τ è debole"). In questo caso però è più difficile che F sia s.c.i.

TEOREMA Sia (X,τ) compatto e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$ s.c.i. su X rispetto a τ. Allora F assume minimo su X.

Dim. Sia

$$m = \inf\{ F(x) \in (-\infty, \infty] : x \in X \}.$$

Stiamo supponendo $F \not\equiv \infty$ e quindi $m \in [-\infty, \infty)$.
Sia $(\lambda_h)_{h \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\lambda_{h+1} < \lambda_h \quad e \quad \lim_{h \to \infty} \lambda_h = m.$$

Gli insiemi

$$A_h = \{ x \in X ; \ F(x) > \lambda_h \}$$

sono aperti e $A_{h+1} \supset A_h$.
Per assurdo sia $F(x) \neq m \ \forall x \in X$. Allora

$$X = \bigcup_{h=1}^{\infty} A_h .$$

Per compattezza esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$X = \bigcup_{h=1}^{N} A_h = A_N .$$

Quindi $F(x) > \lambda_N > m \quad \forall x \in X$ contro la definizione di m.

$\square$

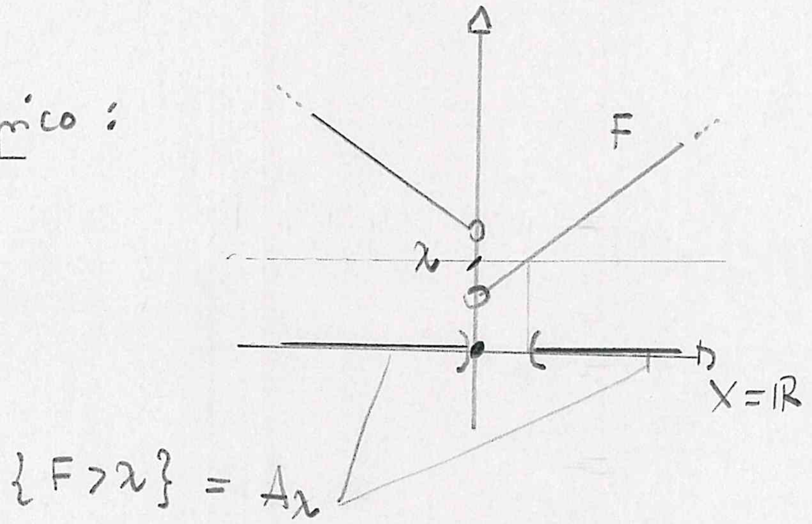
<u>Esercizio</u> Siano (X, d) uno spazio metrico ed $F : X \to (-\infty, \infty]$. Mostrare che sono equivalenti:

A) F è s.c.i. su X.

B) Per ogni $x_0 \in X$ si ha:

$$F(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} F(x) := \lim_{r \to 0^+} \inf_{\substack{x \in B_r(x_0) \\ x \neq x_0}} F(x).$$

<u>Esempio tipico:</u>



② Condizioni necessarie. Se $x_0 \in X$ è un punto di minimo di F, allora è spesso possibile trovare delle condizioni necessarie di minimalità che si ottengono "derivando" F in qualche modo. Con notazione classica (che lasceremo indefinita) dovrà essere verificata un'equazione del tipo

(*) $$\delta F(x_0) = 0.$$

Se $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione è semplicemente $F'(x_0) = 0$.

Talvolta è possibile trovare anche condizioni necessarie del secondo ordine sotto forma di disequazioni del tipo

$$\delta^2 F(x_0) \geq 0 .$$

Quando X è uno spazio funzionale, l'equazione (*) si chiama equazione di Eulero-Lagrange

③ Condizioni sufficienti. Se $x_0 \in X$ è un punto stazionario, cioè verifica l'equazione variazionale (*), è interessante capire se è un minimo. Trovare condizioni sufficienti è tipicamente difficile.

④ Unicità. Sia X (un sottoinsieme convesso di) uno spazio lineare reale. Se $F: X \to (-\infty, \infty]$ è strettamente convessa:

$$F(tx + (1-t)y) < t\,F(x) + (1-t)\,F(y)$$

per $x \neq y$ in X e $t \in (0,1)$, allora il (punto di) minimo è unico (se esiste).

Inoltre con la convessità anche non stretta i punti stazionari sono minimi.

⑤ Regolarità. Se non si riesce a dimostrare l'esistenza di minimi per F su X si può tentare questa strada.

Siano $\hat{X} \supset X$ ed $\hat{F} : \hat{X} \to (-\infty, \infty]$ tali che $\hat{F}_{|X} = F$.

Ora è più facile trovare una topologia (debole) su $\hat{X}$ che faccia funzionare il metodo diretto.

Se troviamo un minimo $\hat{x} \in \hat{X}$ per $\hat{F}$ possiamo sperare che sia in realtà $\hat{x} \in X$.

Questa strategia porta al problema della regolarità: il minimo trovato in uno spazio di funzioni poco regolari è in realtà in uno spazio di funzioni più regolari.

ELEMENTI ESSENZIALI SUGLI SPAZI DI SOBOLEV

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un aperto limitato e $1 \leq p \leq \infty$.
Diciamo che $f \in W^{1,p}(A)$ - f appartiene allo spazio di Sobolev $W^{1,p}(A)$ - se:

1) $f \in L^p(A)$;

2) Esistono funzioni $g_1, \dots, g_n \in L^p(A)$ tali che

$$\int_A f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_A g_i(x)\, \varphi(x)\, dx$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ e $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Chiameremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := g_i \in L^p(A), \quad i = 1, \dots, n,$$

le derivate parziali deboli di f.
Indicheremo con

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

il gradiente (debole) di f.

con la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(A)} = \|f\|_{L^p(A)} + \|\nabla f\|_{L^p(A)}$$

$W^{1,p}(A)$ è uno spazio di Banach.

Lo spazio $W_0^{1,p}(A) \subset W^{1,p}(A)$ è formato dalle funzioni $f \in W^{1,p}(A)$ "che sono 0 su ∂A".
Precisamente:

$$W_0^{1,p}(A) = \overline{C_c^\infty(A)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(A)}}.$$

<u>Notazione</u> Quando $p=2$ si incontrano le notazioni

$$H^1(A) = W^{1,2}(A), \quad H_0^1(A) = W_0^{1,2}(A).$$

In dimensione $n=1$ gli spazi di Sobolev si descrivono in modo più concreto. Ad esempio, per l'intervallo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ si ha:

$$W^{1,p}(0,1) = \{ f \in AC([0,1]) \; ; \; f' \in L^p(0,1) \},$$

$$W_0^{1,p}(0,1) = \{ f \in AC([0,1]) \; ; \; f' \in L^p(0,1), \; f(0) = f(1) = 0 \}$$

TOPOLOGIA FORTE E DEBOLE Su $W^{1,p}(A)$ ci sono la topologia forte e la topologia debole.

Quando $1 \leq p < \infty$ la topologia debole si descrive sequenzialmente nel seguente modo.

Siano $f, f_h \in W^{1,p}(A)$, $h \in \mathbb{N}$. Diciamo che

$$f_h \xrightarrow[h \to \infty]{W^{1,p}(A)} f \qquad \text{(convergenza debole in } W^{1,p}(A) \text{ sequenziale)}$$

se:

① $$\int_A f_h \varphi \, dx \xrightarrow[h \to \infty]{} \int_A f \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in L^q(A)$$

② $$\int_A \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \varphi \, dx \xrightarrow[h \to \infty]{} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in L^q(A)$$

$\forall i = 1, \dots, n$,

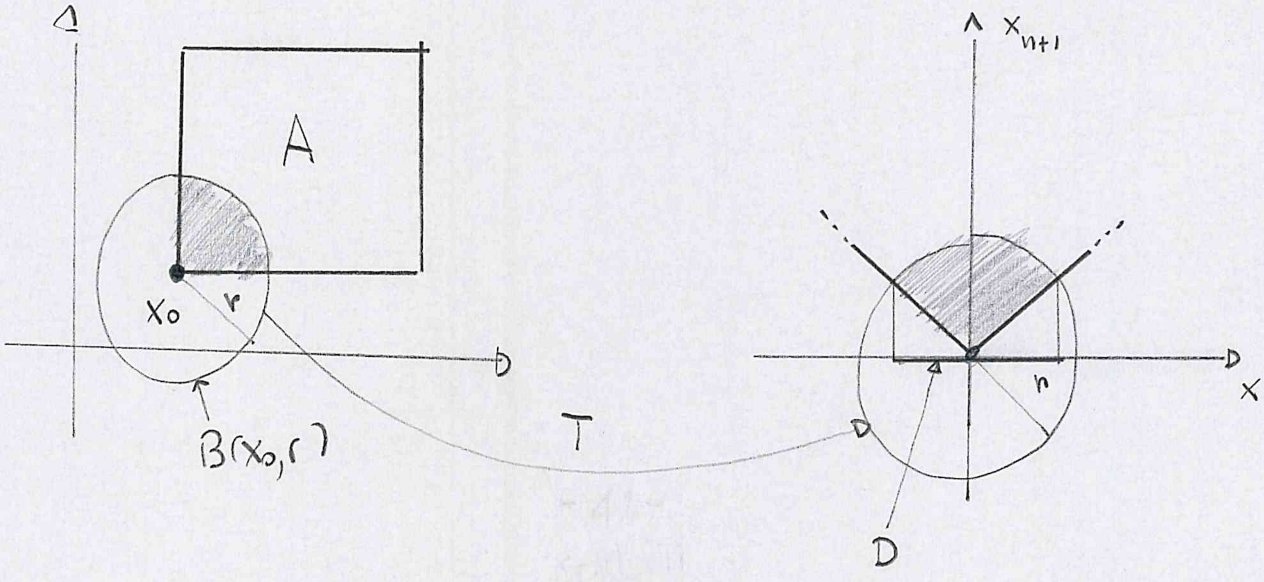
dove $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Quando $1 < p < \infty$, lo spazio $L^p(A)$ è riflessivo. Quindi per il Teorema di Banach-Alaoglu i sottoinsiemi limitati di $L^p(A)$ sono precompatti per la topologia debole.

Quindi gli insiemi limitati di $W^{1,p}(A)$ sono precompatti per la topologia debole di $W^{1,p}(A)$.

<u>DEFINIZIONE</u> Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ ha frontiera Lipschitziana se per ogni $x_0 \in \partial A$ esistono $r>0$, un'isometria $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ed una funzione Lipschitziana $\psi : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tali che

$$T(\partial A \cap B(x_0,r)) = \{(x', \psi(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in D\}.$$



TEOREMA (Rellich - Kondrachov) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato con frontiera Lipschitziana. Sia $1 \leq p \leq \infty$. Allora l'immersione

$$W^{1,p}(A) \subset\subset L^p(A)$$

è compatta. Ovvero: i sottoinsiemi limitati di $W^{1,p}(A)$ sono precompatti in $L^p(A)$.

Quando $p = \infty$ è una variante del Teorema di Ascoli - Arzelà. Vedremo in seguito la dimostrazione nel caso $p = 1$ per le funzioni BV.

Sia ora $1 \leq p < n$ e definiamo l'esponente di Sobolev coniugato:

$$p^* = \frac{pn}{n-p}$$

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera Lipschitz, $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$. Allora l'immersione $W^{1,p}(A) \subset\subset L^q(A)$ è compatta.

COMMENTO Per $W_0^{1,p}(A)$ si ha:

$$W_0^{1,p}(A) \subset\subset L^p(A) \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

$$W_0^{1,p}(A) \subset\subset L^q(A) \qquad 1 \leq p < n$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq q < p^*$$

con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato (senza ∂A Lipschitz).

DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato ed $f \in L^1(A)$.
La media è

$$f_A = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A f(x)\, dx.$$

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, connesso con frontiera Lipschitz. Per ogni $1 \leq p < \infty$ esiste una costante $C = C(n, p, A)$ tale che

$$\int_A |f - f_A|^p dx \leq C \int_A |\nabla f|^p dx$$

per ogni $f \in W^{1,p}(A)$.

La dimostrazione segue da Rellich-Kondrachov.
Una variante è questa:

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $1 \leq p < \infty$.
Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_A |f|^p dx \leq C \int_A |\nabla f|^p dx$$

per ogni $f \in W_0^{1,p}(A)$.

SEMICONTINUITÀ INFERIORE DELLA NORMA

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato con duale $(X^*, \|\cdot\|_*)$ dove

$$\|x^*\|_* := \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, x^* \rangle$$

Dal Teorema di Hahn-Banach segue che

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|_* \leq 1} \langle x, x^* \rangle$$

Supponiamo che $x_h \xrightarrow[h \to \infty]{X} x$, ovvero:

$$\langle x_h, x^* \rangle \xrightarrow[h \to \infty]{} \langle x, x^* \rangle \qquad \forall x^* \in X^*$$

Dunque, se $\|x^*\|_* \leq 1$ si ha:

$$\langle x, x^* \rangle = \lim_{h\to\infty} (\inf) \langle x_h, x^* \rangle \leq \liminf_{h\to\infty} \|x_h\|$$

e passando a sup si trova la semicontinuità inferiore della norma per la convergenza debole

$$\|x\| \leq \liminf_{h\to\infty} \|x_h\|$$

se $x_h \rightharpoonup x$.

TEOREMA DI BANACH - ALAOGLU

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach con duale $(X^*, \|\cdot\|_*)$. La topologia debole-$*$ su X^* è la più piccola topologia che rende continui tutti i funzionali lineari $T_x : X^* \to \mathbb{R}$, $x \in X$, della forma

$$T_x(x^*) = \langle x, x^* \rangle, \quad x^* \in X^*$$

ovvero x^* che agisce su x.

TEOREMA La palla unitaria

$$B = \{ x^* \in X^* \; ; \; \|x^*\|_* \leq 1 \}$$

è compatta nella topologia debole-* di X^*.

Il teorema si basa sul Teorema di Tychonov: il prodotto di spazi topologici compatti è compatto. (E quindi sull'assioma della scelta).

In casi concreti ci sono però dimostrazioni dirette.

Sia X^{**} il duale di X^*. In generale $X \subsetneqq X^{**}$. Se $(X, \|\cdot\|)$ e $(X^{**}, \|\cdot\|_{**})$ sono isomorfi allora X si dice riflessivo.

ESEMPIO L^p con $1<p<$ è riflessivo.
L^1 NON è riflessivo.

COROLLARIO Sia X uno spazio di Banach riflessivo. Gli insiemi chiusi (topologia forte) e limitati di X sono compatti per la topologia debole.

CONVESSITÀ E SEMICONTINUITÀ INFERIORE IN $W^{1,p}$

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di Carathéodory se:

i) $x \longmapsto f(x, u, \xi)$ è ($\mathcal{L}^n$-)misurabile $\forall u \in \mathbb{R}$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$;

ii) Per ($\mathcal{L}^n$-)q.o. $x \in A$, la funzione $(u, \xi) \longmapsto f(x, u, \xi)$ è continua.

ESERCIZIO Se f è di Carathéodory e $u : A \to \mathbb{R}$ e $v : A \to \mathbb{R}^n$ sono misurabili allora la funzione $x \longmapsto f(x, u(x), v(x))$ è misurabile.

Supponiamo d'ora in poi che sia anche $f \geq 0$.
Per $1 \leq p \leq \infty$ consideriamo il funzionale $F : W^{1,p}(A) \to [0, \infty]$

$$F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx .$$

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ continua. Supponiamo che valga una delle due ipotesi:

1) F è sequenzialmente sci in $W^{1,p}(A)$-debole per qualche $1 \leq p < \infty$. Oppure:
2) F è seq. sci in $W^{1,\infty}(A)$-debole*.

Allora $\xi \longmapsto f(x, u, \xi)$ è convessa $\forall x \in A$ e $\forall u \in \mathbb{R}$.

DIM. In realtà 1) => 2). Quindi supponiamo 2).

Presentiamo la dimostrazione nel seguente caso:

$$n = 1 \,, \quad A = (0,1), \quad f = f(\xi) \text{ con } f : \mathbb{R} \to [0,\infty).$$

L'ipotesi è che:

$$u_h \xrightarrow{W^{1,\infty}\text{-debole}*} u \quad \Rightarrow \quad F(u) \leq \liminf_{h\to\infty} F(u_h).$$

L'antecedente significa che

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} u_h \phi \, dx = \int_{[0,1]} u\phi \, dx \,, \qquad \forall \phi \in W^{1,1}(0,1)$$

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} u_h' \phi' \, dx = \int_{[0,1]} u'\phi' \, dx \,.$$

Dobbiamo provare che $\forall \xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha:

$$f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \leq t f(\xi_1) + (1-t) f(\xi_0) \,.$$

Definiamo $v : [0,1) \to \mathbb{R}$

$$v(x) = \begin{cases} \xi_1 & \text{se } x \in [0,t) \\ \xi_0 & \text{se } x \in [t,1) \end{cases}$$

estesa su $\mathbb{R}$ per 1-periodicità. Poi sia $v_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$v_h(x) = v(hx) \,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per h grande le oscillazioni sono frequenti.

Ora integriamo e definiamo $u_h : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$u_h(x) = \int_0^x v_h(s)\, ds.$$

Si ha $u_h \in W^{1,\infty}(0,1)$, $u_h' = v_h$ e inoltre per ogni $\psi \in L^1(0,1)$ si ha

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} v_h \psi \, dx \overset{\boxed{\text{Esercizio}}}{=} \left(\int_{[0,1]} v(x)\,dx\right)\left(\int_{[0,1]} \psi(x)\,dx\right)$$

$$= \left(t\xi_1 + (1-t)\xi_0\right) \int_{[0,1]} \psi(x)\,dx.$$

In altri termini:

$$u_h' = v_h \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty(0,1)\text{-debole}^*} t\xi_1 + (1-t)\xi_0 \quad \text{costante}.$$

Analogamente: $u_h \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty\text{-d}*} x\left(t\xi_1 + (1-t)\xi_0\right) =: u$.

Dall'ipotesi si ricava che

$$\int_{[0,1]} f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0)\,dx = F(u) \le \liminf_{h\to\infty} F(u_h) =$$

$$= \liminf_{h\to\infty} \int_{[0,1]} f(v_h)\,dx$$

Ma con gli argomenti precedenti si vede che

$$f(v_h) \xrightarrow[h \to \infty]{L^\infty(0,1)\text{-debole}*} t\, f(\xi_1) + (1-t)\, f(\xi_0)$$

e concludiamo che

$$f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \leq t\, f(\xi_1) + (1-t)\, f(\xi_0).$$

$\square$

Ora invertiamo il teorema precedente: mostriamo che la convessità implica la semicontinuità inferiore in $W^{1,p}(A)$-debole.

<u>TEOREMA (Tonelli)</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f: A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty]$ di Carathéodory. Supponiamo che $\xi \longmapsto f(x,u,\xi)$ sia convessa per q.o. $x \in A$ ed $u \in \mathbb{R}$. Allora il funzionale $F: W^{1,p}(A) \longrightarrow [0,\infty]$, $1 \leq p < \infty$,

$$F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

è s.c.i. in $W^{1,p}(A)$-debole.
(sequenzialmente)

Dim. Vediamo la dimostrazione in un caso modello. Sia $f = f(\xi)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo inoltre che esista una costante $C>0$ tale che

$$|\nabla f(\xi)| \leq C\,|\xi|^{p-1} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$$C\,(1+|\xi|^{p-1})$$

Siano dunque $u, u_h \in W^{1,p}(A)$ tali che

$$u_h \xrightarrow[h\to\infty]{} u \quad \text{in } W^{1,p}(A)\text{-debole}.$$

Usando la convessità di f si trova

$$F(u_h) = \int_A f(\nabla u_h)\,dx \geqslant \int_A \big(f(\nabla u) + \langle \nabla f(\nabla u), \nabla u_h - \nabla u\rangle\big)\,dx$$

Osserviamo che

$$|\nabla f(\nabla u)| \leq C\,|\nabla u|^{p-1} \in L^q(A)$$

con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Infatti $(p-1)q = p$ e $|\nabla u| \in L^p(A)$.

Dunque si ha

$$\lim_{h\to\infty} \int_A \langle \nabla f(\nabla u), \nabla u_h - \nabla u\rangle\,dx = 0.$$

Concludiamo che

$$\liminf_{h\to\infty} F(u_h) \geqslant \int_A f(\nabla u)\,dx = F(u).$$

□

Existence of minimizers in $W^{1,p}$

Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set.
We fix a function $u_0 \in W^{1,p}(A)$ playing the role of boundary value, with $1 \leq p < \infty$. We consider the set of admissible functions

$$\mathcal{A} = u_0 + W_0^{1,p}(A).$$

This is a convex subset of $W^{1,p}(A)$. The space $W_0^{1,p}(A)$ is defined as the metric completion

$$W_0^{1,p}(A) = \overline{C_c^\infty(A)}^{W^{1,p}(A)}.$$

<u>COMMENT</u> If A has regular boundary (e.g. Lipschitz boundary) there exists a linear operator $T : W^{1,p}(A) \to L^p(\partial A)$ such that:

1) $T(u) = u|_{\partial A}$ when $u \in C(\bar{A}) \cap W^{1,p}(A)$ is continuous up to the boundary (T is a trace operator);
2) T is bounded: there exists $C > 0$ such that

$$\|Tu\|_{L^p(A)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(A)}.$$

$T(u)$ is called the trace of u onto ∂A.

So for $u \in \mathcal{A}$ we are fixing the boundary value $\underset{L^p(\partial A)}{\underset{\cap}{T(u_0)}}$.

For a given Carathéodory function $f : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ we consider the functional $F : \mathcal{A} \longrightarrow [-\infty, \infty]$

$$F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx .$$

We assume that:

1) the integral is well-defined;

2) there exists $\bar{u} \in \mathcal{A}$ such that $F(\bar{u}) < \infty$.

<u>THEOREM</u> (Existence of minimizers) Assume that:

i) $1 < p < \infty$;

ii) $\xi \longmapsto f(x, u, \xi)$ is convex for all $u \in \mathbb{R}$ and for a.e. $x \in$

iii) there exist $g \in L^1(A)$ and $C > 0$ such that

$$f(x, u, \xi) \geq g(x) + C|\xi|^p \qquad \text{(Coercivity)}$$

for all $\xi \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ and for a.e. $x \in A$.

Then F has minimum on $\mathcal{A}$.

Proof. Let $K \subset \mathcal{A}$ be the set

$$K = \{ u \in \mathcal{A} ;\ F(u) \leq F(\bar{u}) < \infty \} \neq \phi .$$

By iii), for any $u \in K$ we have:

$$F(\bar{u}) \geq F(u) = \int_A f(x, u, \nabla u)\, dx$$

$$\geq \int_A g(x)\, dx + C \int_A |\nabla u|^p\, dx$$

and thus:

$$\int_A |\nabla u|^p \, dx \leqslant \frac{1}{c} \left(\|g\|_{L^1(A)} + F(\bar{u}) \right) < \infty .$$

From the Poincaré inequality in $W_0^{1,p}(A)$:

$$\|u\|_{L^p(A)} \leqslant \|\underbrace{u - u_0}_{\substack{\cap \\ W_0^{1,p}(A)}}\|_{L^p(A)} + \|u_0\|_{L^p(A)}$$

$$\leqslant C_1 \|\nabla(u - u_0)\|_{L^p(A)} + \|u_0\|_{L^p(A)}$$

$$\leqslant C_1 \|\nabla u\|_{L^p(A)} + C_2 \|u_0\|_{W^{1,p}(A)} .$$

We conclude that K is bounded in $W^{1,p}(A)$.

Now take $u_h \in \mathcal{A}$, $h \in \mathbb{N}$, such thath

$$\lim_{h \to \infty} F(u_h) = \inf_{u \in \mathcal{A}} F(u) .$$

By weak compactness in $W^{1,p}(A)$ we may $\left(\overset{i)}{p > 1 !} \right)$ assume (after taking subsequences still labeled u_h) that

$$u_h \xrightarrow[h \to \infty]{L^p(A)} u$$

$$\nabla u_h \xrightarrow[h \to \infty]{L^p(A)} \nabla u$$

for some $u \in W^{1,p}(A)$. In fact $u \in \mathcal{A}$, i.e., "the boundary value u_0 is preserved".

From ii) and Tonelli Theorem we deduce that is sequentially lower semicontinuous for the weak convergence in $W^{1,p}(A)$

$$F(u) \leq \liminf_{h \to \infty} F(u_h) = \inf_{v \in \mathcal{A}} F(v)$$

with $u \in \mathcal{A}$. So we have $F(u) = \min_{v \in \mathcal{A}} F(v)$.

$\square$

ESEMPIO 1 Sia $\mathcal{A} = \{ u \in W^{1,1}([0,1]) = AC([0,1]) : u(0)=0,\ u(1)=1 \}$

e sia $F : \mathcal{A} \to [0,\infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \sqrt{u^2 + u'^2}\, dx .$$

Le ipotesi ii) e iii) sono verificate. Non la (i): qui abbiamo $p = 1$.

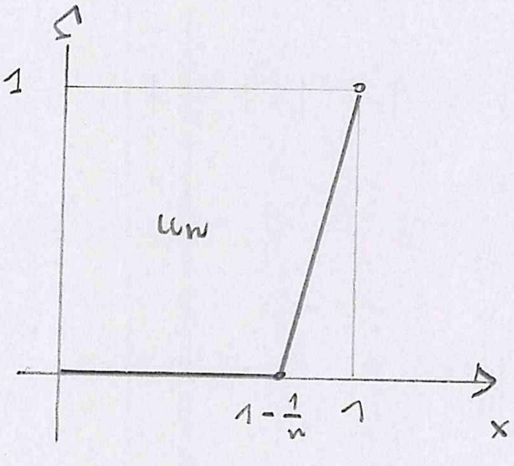
Verifichiamo che il minimo non è raggiunto.

Se $u \in \mathcal{A}$ allora

$$(*) \qquad F(u) \geq \int_{[0,1]} |u'|\, dx \geq \int_{[0,1]} u'(x)\, dx \overset{u\in AC}{=} u(1) - u(0) = 1$$

Quindi $\inf \{ F(u) : u \in \mathcal{A} \} \geq 1$.

Dato $n \in \mathbb{N}$ si consideri $u_n \in AC([0,1])$ fatta in questo modo



Allora

$$F(u_n) = \int_{[1-\frac{1}{n},1]} \sqrt{u^2 + u'^2}\, dx \leq \int_{[1-\frac{1}{n},1]} \sqrt{1+n^2}\, dx = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$$

e quindi

$$\inf \{ F(u) \; ; \; u \in \mathcal{A} \} = 1.$$

Se $u \in \mathcal{A}$ fosse un minimo, allora in $(*)$ dovremmo avere tutte uguaglianze, cosa che implicherebbe $u(x) = 0$ per (quasi) ogni $x \in [0,1]$, contro le condizioni al bordo.

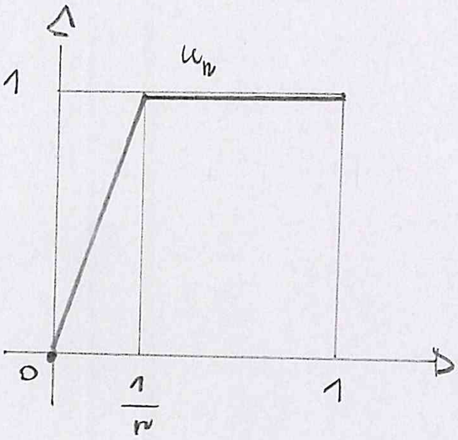
$\square$

ESEMPIO 2 (Weierstrass) Sia $\mathcal{A} = \left\{ u \in W^{1,2}(0,1) : \begin{matrix} u(0)=0 \\ u(1)=1 \end{matrix} \right\}$

e sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} x^2 u'(x)^2 \, dx .$$

Le condizioni i) e ii) sono verificate, ma non la coercività iii). Verifichiamo che il minimo non viene raggiunto. Basta considerare $u_n \in W^{1,2}(0,1)$ fatta nel seguente modo



$$F(u_n) = \int_{[0,\frac{1}{n}]} x^2 n^2 \, dx = \frac{1}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

quindi $\inf \{ F(u) : u \in \mathcal{A} \} = 0$, Ma $F(u) = 0$ implica $u' = 0$ q.o. e quindi $u =$ costante (perché $u \in AC$). Questo è incompatibile con i dati al bordo.

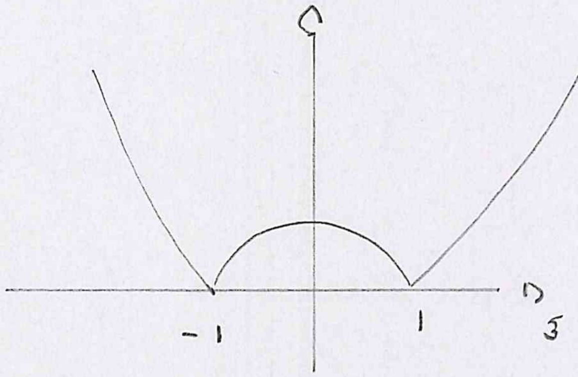
$\square$

ESEMPIO 3 (Bolza) Sia $\mathcal{A} = \{ u \in W^{1,2}(0,1) \, ; \, u(0) = u(1) = 0 \}$

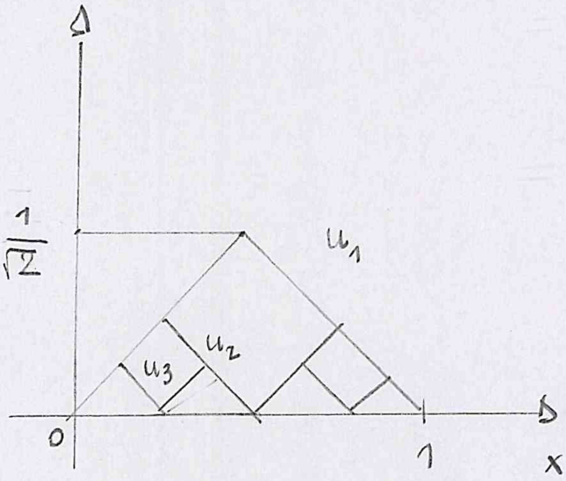
e sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \left(|u'^2 - 1| + u^2 \right) dx .$$

La i) e la iii) sono verificate, ma non la ii) perché $\xi \mapsto |\xi^2 - 1|$ non è convessa



Per $n \in \mathbb{N}$ sia $u_n \in W^{1,2}(0,1)$ come in figura:



Chiaramente $|u_n'(x)| = 1$ q.o. e inoltre $\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}n}$

Quindi $\lim_{n \to \infty} F(u_n) = 0$ e dunque $\inf \{ F(u) \, ; \, u \in \mathcal{A} \} = 0$. Ma $F(u) = 0$ implica $|u'(x)| = 1$ q.o. e $u = 0$, che sono incompatibili.

$\square$

ESEMPIO 4 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato connesso con frontiera Lipschitz, $n \geq 1$. Sia

$$X = \left\{ u \in H^1(A) \; ; \; \int_A u \, dx = 0 \right\}.$$

Si tratta di un sottospazio chiuso di $H^1(A)$.
É il complemento ortogonale della funzione $1 \in H^1(A)$.

Sia $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ il funzionale

$$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right\} dx$$

dove $f \in L^2(A)$ é una funzione fissata.

Studiamo il problema di minimo

$$\min \left\{ F(u) \; ; \; u \in X \right\}.$$

Sia $u_h \in X$, $h \in \mathbb{N}$, una successione minimizzante:

$$\lim_{h \to \infty} F(u_h) = \inf \left\{ F(u) \; ; \; u \in X \right\}.$$

Esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che $\forall h \in \mathbb{N}$

$$\int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 + f u_h \right\} dx \leq C.$$

Dato un parametro $\varepsilon > 0$, avremo

$$\int_A f u_h \, dx \geq -\frac{1}{2} \int_A \left(\frac{1}{\varepsilon} f^2 + \varepsilon \, u_h^2 \right) dx$$

e per la disuguaglianza di Poincaré esiste una costante $C_A > 0$ tale che

$$\int_A |u_h|^2 dx = \int_A |u_h - \underbrace{(u_h)_A}_{\text{Media} = 0}|^2 dx \leq C_A \int_A |\nabla u_h|^2 dx$$

e dunque

$$\int_A f u_h \, dx \geq -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|f\|^2_{L^2} + \varepsilon C_A \int_A |\nabla u_h|^2 dx \right\}.$$

In definitiva si trova

$$\frac{1}{2} \left(1 - \varepsilon C_A \right) \int_A |\nabla u_h|^2 dx \leq C + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|^2_{L^2(A)},$$

e scegliendo $1 - \varepsilon C_A \geq \frac{1}{2}$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2 C_A} \right)$

si vede che esiste una costante $0 < C_1 < \infty$ tale che

$$\int_A |\nabla u_h|^2 dx \leq C_1 \qquad \forall h \in \mathbb{N}$$

e quindi anche

$$\int_A u_h^2 \, dx \leq C_A \cdot C_1 \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema di compattezza debole esiste $u \in H^1(A)$ ed esiste una sottosuccessione di $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ — chiamata ancora $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ — tale che

$$u_h \xrightarrow[h\to\infty]{H^1(A)} u$$

ovvero:

$$u_h \xrightarrow{L^2} u ,$$

$$\nabla u_h \xrightarrow{L^2} \nabla u .$$

(Dal Teorema di Rellich-Kondrachov segue che $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è (pre)compatta in $L^2(A)$ e quindi — a meno di ulteriore s.s. — si ha in effetti $u_h \xrightarrow{L^2} u$ fortemente. Non useremo questo fatto.)

Per semicontinuità inferiore si ha

$$\int_A |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{h\to\infty} \int_A |\nabla u_h|^2 dx .$$

Inoltre

$$\lim_{h\to\infty} \int_A u_h f \, dx = \int_A u f \, dx$$

e

$$0 = \lim_{h\to\infty} \int_A u_h \, dx = \int_A u \, dx ,$$

In particolare $u \in X$. Infine

$$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right\} dx \leq$$

$$\leq \liminf_{h \to \infty} \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 + f u_h \right\} =$$

$$= \lim_{h \to \infty} F(u_h) .$$

Quindi u è il minimo di F su X.

Supponiamo che u e $\bar{u}$ siano due minimi. Siccome $u \mapsto F(u)$ è convesso si ha

$$F\left(\frac{u+\bar{u}}{2} \right) \leq \frac{1}{2} F(u) + \frac{1}{2} F(\bar{u})$$

e per la minimalità si ha $=$, cosa che implica

$$\int_A \left| \nabla \frac{u+\bar{u}}{2} \right|^2 dx = \frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_A |\nabla \bar{u}|^2 dx$$

Dalla stretta convessità di $\xi \mapsto |\xi|^2$ si deduce che deve essere $\nabla u = \nabla \bar{u}$ q.o. su A, ovvero $\nabla (u - \bar{u}) = 0$. La disuguaglianza di Poincaré

$$\int_A (u-\bar{u})^2 dx \leq c_A \int_A |\nabla (u - \bar{u})|^2 dx = 0$$

implica $u = \bar{u}$.

Questo prova l'unicità del minimo.

Deriviamo l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole. Sia $\varphi \in C_c^\infty(A)$, allora

$$\psi := \varphi - \varphi_A = \varphi - \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A \varphi \, dx \in X.$$

Per $\varepsilon \in \mathbb{R}$ si consideri

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= F(u + \varepsilon\psi) \\ &= \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u + \varepsilon \nabla \psi|^2 + f(u + \varepsilon\psi) \right\} dx \\ &= \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 |\nabla \psi|^2 + \varepsilon \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle \right. \\ &\qquad \left. + f(u + \varepsilon\psi) \right\} dx \end{aligned}$$

e dunque

$$g'(0) = \int_A \left\{ \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle + f\psi \right\} dx .$$

Se u è un minimo si trova

$$0 = g'(0) = \int_A \left\{ \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + f(\varphi - \varphi_A) \right\} dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Osserviamo che $\int_A f\,\varphi_A\,dx = \int_A f_A\,\varphi\,dx$

e quindi l'equazione è

$$\int_A \left\{ \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle + (f - f_A)\,\varphi \right\} dx = 0 \quad \forall \varphi.$$

Per la teoria della regolarità (vedere prossima sezione) si ha $u \in H^2_{loc}(A)$, ovvero u possiede le derivate seconde in $L^2_{loc}(A)$ in senso debole. Inoltre

$$\circledast \qquad \int_A \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle\,dx \overset{\varphi \in C^\infty_c(A)}{=} -\int_A \Delta u\,\varphi\,dx$$

e l'equazione diventa

$$\int_A \left\{ -\Delta u + f - f_A \right\} \varphi\,dx = 0 \quad \forall \varphi$$

Quindi si trova l'equazione in $L^2(A)$

$$(\square) \qquad \Delta u = f - f_A \quad \text{in } L^2(A)$$

(Equazione di Poisson).

I conti precedenti si possono ripetere anche a partire da $\varphi \in C^{\infty}(\bar{A})$. L'unica differenza è in ⊛. Ora si ha

$$\int_A \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_A \{ \operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \varphi \Delta u \} \, dx .$$

In modo "formale" si trova col teorema della divergenza

$$\int_A \operatorname{div}(\varphi \nabla u) \, dx = \int_{\partial A} \varphi \langle \nabla u, \nu \rangle \, dH^{n-1} .$$

Bisogna che ∇u sia definito H^{n-1}-q.o. su ∂A.

Tenuto conto di (□), l'equazione di Eulero-Lagrange diventa ora

$$\int_{\partial A} \varphi \langle \nabla u, \nu \rangle \, dH^{n-1} = 0 \quad \forall \varphi \in C(\partial A)$$

Questo implica che

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle = 0 \quad \text{su } \partial A .$$

Questa è la condizione di Neumann.

□

INTERIOR SOBOLEV REGULARITY

$A \subset \mathbb{R}^n$ open bounded connected, $n \geq 2$

$M : A \to M_n(\mathbb{R}) = \{$ real $n \times n$ matrices $\}$

Assume that:

1) $M = M^T$ is symmetric

2) $M \in L^\infty(A; M_n(\mathbb{R}))$ bounded measurable entries

3) Ellipticity: there is $\lambda > 0$ such that

(1) $$\langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2 \qquad \forall x \in A \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Fix a function $f \in L^2(A)$ and consider the functional

$F : H^1(A) \to \mathbb{R}$

(2) $$F(u) = \int_A \Big\{ \frac{1}{2} \langle M(x)\nabla u, \nabla u \rangle + f u \Big\} dx.$$

With the constraint

(3) $$\int_A u \, dx = 0$$

there exists a unique minimizer $u \in H^1(A)$

The Euler-Lagrange equation satisfied by this minimizer is

(4) $$\operatorname{div}\big(M(x)\nabla u\big) = f \quad \text{in } A$$

[We are assuming: $f_A = 0$]

in the weak sense. This means that

$$(5) \qquad -\int_A \langle M(x)\nabla u, \nabla \varphi\rangle \, dx = \int_A f \varphi \, dx$$

for all $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Our goal in this section is to prove the following regularity result.

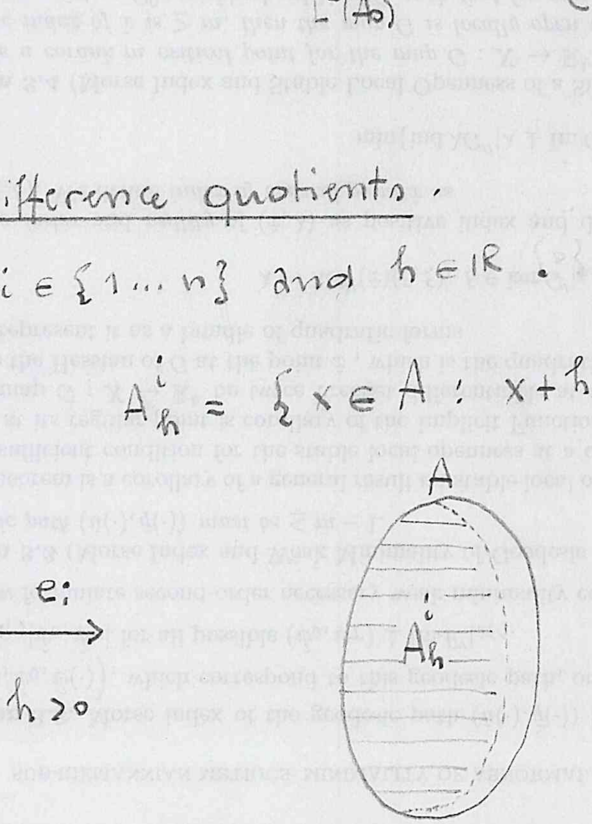
<u>THEOREM 1</u> Let $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, be open and bounded. Let $M \in \mathrm{Lip}(A; M_n(\mathbb{R}))$ be symmetric and elliptic. Let $f \in L^2(A)$. Then any solution $u \in H^1(A)$ of (4) in the weak sense satisfies $u \in H^2_{loc}(A)$. Moreover for any $A_0 \subset\subset A$ there exists $C>0$ such that

$$(6) \qquad \|\nabla^2 u\|_{L^2(A_0)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(A)} + \|f\|_{L^2(A)}\right).$$

1. <u>Difference quotients.</u>

Let $i \in \{1, \dots, n\}$ and $h \in \mathbb{R}$. Define the set

$$(7) \qquad A_h^i = \{x \in A : x + he_i \in A\}$$



Given $u : A \to R$ define

(8) $$u_h^i(x) = u(x+he_i), \quad x \in A_h^i$$

(9) $$\tau_h^i u(x) = \frac{u_h^i(x) - u(x)}{h} = \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}, \quad x \in A_h^i, \ h \neq 0$$

We have the following elementary Leibniz rule:

(10) $$\tau_h^i (uv) = u_h^i \tau_h^i v + v \tau_h^i u \ -$$

PROPOSITION 2 Let $A_0 \subset\subset A$ with $\delta := \mathrm{dist}(A_0 ; \partial A)$.

(1) For any $u \in H^1(A)$ we have

(11) $$\|\tau_h^i u\|_{L^2(A_0)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(A)}$$

for all $i = 1, \dots, n$ and $0 < |h| < \delta$

(2) Assume that for a given $u \in L^2(A)$ there exits $C_0 > 0$ such that

(12) $$\|\tau_h^i u\|_{L^2(A_0)} \leq C_0$$

for $i = 1, \dots, n$ and for all $0 < h < \delta$. Then $u \in H^1(A_0)$ with $\|\nabla u\|_{L^2(A_0)} \leq C_0 \cdot n$. Moreover

(13) $$\lim_{h \to 0^+} \tau_h^i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{strongly in } L^2(A_0).$$

Proof. (1) Assume first $u \in H^1(A) \cap C^\infty(A)$. Then we have for $x \in A_0$

$$u(x+he_i) - u(x) = \int_0^h \frac{d}{dt} u(x+te_i)\,dt =$$

$$= \int_0^h \langle \nabla u(x+te_i), e_i \rangle\,dt = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+te_i)\,dt$$

and thus for small h:

$$\int_{A_0} \frac{1}{h^2} \left| u(x+he_i) - u(x) \right|^2 dx = \int_{A_0} \left| \fint_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+te_i)\,dt \right|^2 dx$$

$$\leq \int_{A_0} \fint_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+te_i) \right|^2 dt\,dx \leq$$

$$\leq \fint_0^h \int_{A_0} |\nabla u(x+te_i)|^2\,dx\,dt \leq \int_A |\nabla u(x)|^2\,dx.$$

The general case follows by approximation.

Given $u \in H^1(A)$ there exists a sequence $u_m \in H^1(A) \cap C^\infty(A)$ such that

i) $u_m \xrightarrow[m \to \infty]{} u$ in $L^2(A)$ and a.e. in A;

ii) $\lim_{m \to \infty} \int |\nabla u_m|^2\,dx = \int_A |\nabla u|^2\,dx$.

By Fatou lemma:

$$\int_{A_0} |\tau_h^i u|^2\,dx \leq \liminf_{m \to \infty} \int_{A_0} |\tau_h^i u_m|^2\,dx \leq$$

$$\leq \lim_{m \to \infty} (\inf) \int_A |\nabla u_m|^2\,dx = \int_A |\nabla u|^2\,dx.$$

(2) By weak compactness, there exists a sequence $h \downarrow 0$ and $v \in L^2(A_0)$ such that

$$\tau_h^i u \xrightarrow[h \downarrow 0]{w\text{-}L^2(A_0)} v.$$

Then for any $\varphi \in C_c^\infty(A_0)$ we have

$$\int_{A_0} \tau_h^i u(x) \cdot \varphi(x)\, dx \xrightarrow[h \downarrow 0]{} \int_{A_0} v(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$= -\int_{h e_i + A_0} u(x) \underbrace{\tau_{-h}^i \varphi(x)}\, dx \xrightarrow[h \downarrow 0]{} -\int_{A_0} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx,$$

$$\downarrow \text{ uniformly}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

This means that $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ in the weak-sense.

This proves that $u \in H^1(A_0)$.

By lower semicontinuity of the L^2-norm:

$$\int_{A_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \le \liminf_{h \downarrow 0} \int_{A_0} |\tau_h^i u|^2 dx \le C_0.$$

The strong convergence follows by an approximation argument.

Given $\varepsilon > 0$ let $v \in H^1(A) \cap C^\infty(A)$ be such that

$$\int_A |\nabla u - \nabla v|^2 dx < \varepsilon .$$

Then we have

$$\tau_h^i u - \frac{\partial u}{\partial x_i} = \underbrace{\tau_h^i(u-v)}_{\substack{\wedge L^2 \\ \nabla u - \nabla v \\ \wedge L^2(A) \\ \varepsilon}} + \underbrace{\tau_h^i(v) - \frac{\partial v}{\partial x_i}}_{\substack{\wedge \\ \varepsilon}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\substack{\wedge L^2(A) \\ \varepsilon}}$$

for $0 < h < \bar{h}(\varepsilon)$ uniformly on A_0

□

2. <u>Proof of Theorem 1</u> Let $u \in H^1(A)$ be a solution of (4) in the weak sense:

$$(14) \qquad \int_A \langle M \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = - \int_A f \varphi \, dx$$

for $\varphi \in C_c^\infty(A)$. After a change of variable, (14) implies that

$$(15) \qquad \int_A \langle M_h^i \nabla u_h^i, \nabla \varphi \rangle dx = - \int_A f_h^i \varphi \, dx$$

for all $\varphi \in C_c^\infty(A)$, suitable. Subtracting (15) − (14) and dividing by $h \neq 0$:

we get

$$LHS = \int_A \langle \tau_h^i (M \nabla u), \nabla \varphi \rangle \, dx = - \int_A (\tau_h^i f)\, \varphi \, dx \quad \text{(by parts)} \tag{16}$$

$$= \int_A f \left(\tau_{-h}^i \varphi \right) dx .$$

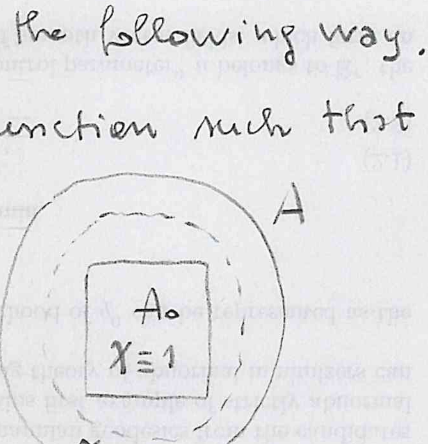
By Leibniz rule: $= RHS$

$$\tau_h^i (M \nabla u) = M_h^i \underbrace{\tau_h^i (\nabla u)}_{\text{We want to estimate this}} + \tau_h^i (M) \nabla u . \tag{17}$$

We choose the test function φ in the following way.

Let $\chi \in C_c^\infty(A)$ be a cut-off function such that

$$\chi \equiv 1 \text{ on } A_0 .$$



We choose

$$\varphi = \varphi_h = \chi^2 \tau_h^i u \in H^1(A), \tag{18}$$

with

$$\nabla \varphi = 2 \chi \nabla \chi \, \tau_h^i u + \chi^2 \tau_h^i (\nabla u) .$$

Also using (17), the left-hand side of (16) is

$$\mathrm{LHS} = \int_A \langle M_h^i \tau_h^i (\nabla u) + \tau_h^i (M) \nabla u , \chi^2 \tau_h^i (\nabla u) + 2\chi \nabla \chi \tau_h^i u \rangle \, d$$

Using the ellipticity $\langle M(x)\xi, \xi\rangle \geq \lambda |\xi|^2 \ \forall x \in A$ with $\lambda > 0$,

$$(19) \quad \mathrm{LHS} \geq \lambda \int_A \chi^2 |\tau_h^i (\nabla u)|^2 \, dx + I_1 + I_2 + I_3$$

where

$$I_1 = \int_A \langle M_h^i \tau_h^i (\nabla u), 2\chi \tau_h^i (u) \nabla \chi \rangle \, dx ,$$

$$I_2 = \int_A \chi^2 \langle \tau_h^i (M) \nabla u , \tau_h^i (\nabla u) \rangle \, dx ,$$

$$I_3 = \int_A 2\chi \tau_h^i (u) \langle \tau_h^i (M) \nabla u , \nabla \chi \rangle \, dx .$$

We estimate I_1, I_2, and I_3 from below:

$$I_1 \geq -2 \int_A \overset{\geq 0}{\chi} \, |M_h^i \tau_h^i (\nabla u)| \, |\tau_h^i (u)| \, |\nabla \chi| \, dx$$

$$(20) \quad \geq - \int_A \varepsilon \chi^2 |M_h^i \tau_h^i (\nabla u)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\tau_h^i (u)|^2 \, |\nabla \chi|^2 \, dx$$

$$\geq -\varepsilon \|M\|^2_{L^\infty(A)} \int_A |\tau_h^i (\nabla u)|^2 \, dx - \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \chi\|^2_{L^\infty(A)} \int_{A_1} |\tau_h^i (u)|$$

Where $A_1 \subset\subset A$ for small h. Then we have

$$(21) \qquad \int_{A_1} |\tau_h^i(u)|^2 dx \leq \int_A |\nabla u|^2 dx.$$

We will choose $\varepsilon > 0$ such that

$$(22) \qquad \varepsilon \|M\|^2_{L^2(A)} < \frac{\lambda}{8}.$$

So (20) is

$$(23) \qquad I_1 \geq -\frac{\lambda}{8} \int_A \chi^2 |\tau_h^i(\nabla u)|^2 dx - C_1 \int_A |\nabla u|^2 dx$$

for a constant $C_1 > 0$.

For I_2 we have

$$I_2 \geq -\int_A \chi |\tau_h^i(M) \nabla u| \cdot \chi |\tau_h^i(\nabla u)| dx$$

$$(24) \qquad \geq -\frac{\varepsilon}{2} \int_A \chi^2 |\tau_h^i(\nabla u)|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_A \chi^2 |\tau_h^i(M) \nabla u|^2 dx.$$

Since $M \in Lip(A; M_n(\mathbb{R}))$ we have $\|\tau_h^i(M)\| \leq L < \infty$ for a constant L. We choose $\varepsilon > 0$ such that

$$(25) \qquad \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\lambda}{8}.$$

So (24) yields:

$$(26) \qquad I_2 \geq -\frac{\lambda}{8}\int_A |\tau_h^i(\nabla u)|^2\,dx - C_2\int_A |\nabla u|^2\,dx$$

where $C_2 > 0$ is a constant.

Finally, for I_3 we have

$$I_3 \geq -2\,\|\nabla \chi\|_{L^\infty(A)} \cdot L \cdot \int_{A_1} |\tau_h^i(u)|\,|\nabla u|\,dx$$

$$(27) \qquad \geq -C_3\int_A |\nabla u|^2\,dx,$$

where we used again Proposition 2 and Hölder inequality.

Eventually, the LHS of (16) satisfies

$$(28) \qquad \text{LHS} \geq \frac{3}{4}\lambda\int_A \chi^2|\tau_h^i(\nabla u)|^2\,dx - C_4\int_A |\nabla u|^2\,dx$$

for a constant $0 < C_4 < \infty$.

The RHS of (16) is:

$$(29) \qquad \text{RHS} = \int_A f\,\tau_{-h}^i\left(\chi^2\tau_h^i(u)\right)dx$$

and therefore

$$(30) \quad RHS \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_A |\tau^i_{-h}(\chi^2 \tau^i_h(u))|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_A f^2 dx \leq$$

$$\overset{\text{Prop. 2}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \int_A |\underbrace{\nabla(\chi^2 \tau^i_h(u))}_{= 2\chi \nabla\chi \, \tau^i_h(u) + \chi^2 \tau^i_h(\nabla u)}|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_A f^2 dx$$

$$\leq \varepsilon \int_A \chi^2 |\tau^i_h(\nabla u)|^2 + \varepsilon C_5 \int_{A_1} |\tau^i_h(u)|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_A f^2 dx.$$

We choose

$$(31) \quad \varepsilon < \frac{\nu}{4},$$

and we get

$$RHS \leq \frac{\nu}{4} \int_A \chi^2 |\tau^i_h(\nabla u)|^2 dx + C_6 \int_A |\nabla u|^2 dx$$

$$(32) \quad + C_7 \int_A f^2 dx$$

By (28) and (32), inequality (16) reads:

$$(33) \qquad \frac{\lambda}{2} \int_A x^2 |\tau_h^i (\nabla u)|^2 dx \leq C_8 \int_A |\nabla u|^2 dx + C_9 \int_A f^2 dx$$

for all small $0 < h < h_0$ and for all $i = 1, \dots, n$.

Proposition 2 implies that $\nabla u \in H^1_{loc}(A)$.

The claims of Theorem 1 now follow easily. $\square$

Schauder's estimates

$A \subset \mathbb{R}^n$ is an open set.

DEF Let $\alpha \in (0,1)$. The α-Hölder norm of $u : A \to \mathbb{R}$ is

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(A)} := \sup_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

We define $C^{0,\alpha}(A) := \{ u : A \to \mathbb{R} \mid \|u\|_{C^{0,\alpha}(A)} < \infty \}$.
("Hölder spaces")

THEOREM (Schauder estimates) Let $\alpha \in (0,1)$.

Assume that:

1. $M : A \to M_n(\mathbb{R})$ satisfies:
   i) $M = M^T$ is symmetric;
   ii) M is elliptic: $\exists \lambda > 0$ s.t.
   $$\langle M(x)\xi, \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2 \quad \forall x \in A \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$
   iii) $M \in C^{0,\alpha}(A; M_n(\mathbb{R}))$.
2. $F \in C^{0,\alpha}(A; \mathbb{R}^n)$
3. $u \in H^1_{loc}(A)$ is a weak solution of
$$\operatorname{div}(M(x) \nabla u(x)) = \operatorname{div}(F(x)) \text{ in } A.$$

DE GIORGI - NASH THEOREM

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a function satisfying:

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, (Regularity).

2) $|f(\xi)| \leq |\xi|^2$ and $|\nabla f(\xi)| \leq |\xi|$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$
(Growth-estimates)

3) There exist $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ such that

$$\underbrace{\lambda|\eta|^2 \leq \langle Hf(\xi)\,\eta, \eta\rangle \leq \Lambda|\eta|^2}_{\text{Convexity - Ellipticity}} \qquad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$$

For $A \subset \mathbb{R}^n$ bounded consider the functional

$F : H^1(A) \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A f(\nabla u)\, dx .$$

PROBLEM (HILBERT) Let $u \in H^1(A)$ be a minimizer of u.
Is it true that $u \in C^\infty(A)$?

The Euler-Lagrange equation satisfied by a minimizer is

$$\int_A \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla \varphi(x)\rangle\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(A).$$

This means that $\forall \varphi \in C_c^\infty(A)$ we have

$$\int_A \langle M \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_A \langle F(x), \nabla \varphi \rangle \, dx.$$

Then $\nabla u \in C^{0,\alpha}_{loc}(A;\mathbb{R}^n)$ and for any $A_0 \subset\subset A$ there exists $C = C(A_0, M) > 0$ such that

$$\|\nabla u\|_{C^{0,\alpha}(A_0;\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^2(A)} + \|F\|_{C^{0,\alpha}(A;\mathbb{R}^n} \right.$$

---

*

The proof uses Morrey-Campanato spaces.

See Giaquinta - Martinazzi "An introduction to the regularity theory ..." Chapter 5 -

By the method of "Difference - Quotients" it is possible to prove that $u \in H^2_{loc}(A)$.

Moreover, the partial derivative $v = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1_{loc}(A)$ satisfies the equation

$$\int_A \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{only} \\ \text{measurable}}}{Hf(\nabla u)} \nabla v, \nabla \varphi \rangle \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C^\infty_c(A).$$

<u>If $\nabla u \in C^{0,\alpha}$</u> then Schauder's theory applies and thus $\nabla v \in C^{0,\alpha}$. This means that $u \in C^{2,\alpha}$.

Now an iteration of the method gives $u \in C^\infty(A)$.

So the Key step is to prove that $\nabla u \in C^{0,\alpha}$.

<u>THEOREM</u> Assume that $M \in L^\infty(A; M_n(\mathbb{R}))$ is elliptic. Let $u \in H^1_{loc}(A)$ be a weak solution of

$$\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = 0 \quad \text{in } A.$$

Then $\nabla u \in C^{0,\alpha}_{loc}(A)$ for some $\alpha \in (0,1)$.

This is De Giorgi - Nash theorem.

PLATEAU PROBLEM. Parametric formulation (Douglas-Radó)

$D = \{ z = u + iv \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ unit disk

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ fixed dimension, support of a C^1-regular simple curve. Namely, there is $\gamma : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injective of class C^1 with $\dot{\gamma} \neq 0$ such that

$$\boxed{\Gamma = \gamma(\partial D)}$$

We call γ a Jordan curve (of class C^1).

Let $F \in C^2(D; \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D}; \mathbb{R}^n)$ be such that $F(\partial D) = \Gamma$. We call

$$\boxed{\Sigma = F(D)}$$

a parametric 2-surface of class C^2 with $\partial \Sigma = \Gamma$.

For any $z = u + iv \in D$ we have

$$F_u := \frac{\partial F}{\partial u} \in T\Sigma,$$

$$F_v := \frac{\partial F}{\partial v} \in T\Sigma.$$

Notation: $\langle \cdot , \cdot \rangle$ = standard scalar product in $\mathbb{R}^n$

$|\cdot|$ = standard norm in $\mathbb{R}^n$.

We denote the <u>energy</u> of F

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{2}\int_D \left(|F_u|^2 + |F_v|^2\right) du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \int_D |\nabla F^i|\, du\,dv$$

where $F = (F^1, \dots, F^n)$. This is a Dirichlet integral.

It could be $\mathcal{E}(F) = +\infty$.

On $T\Sigma$ we define the bilinear form g setting

$$g_{ij} = \langle F_i, F_j \rangle \quad \text{with} \quad i,j \in \{u,v\}$$

Then we have $\operatorname{tr}(g(F(z))) = |F_u(z)|^2 + |F_v(z)|^2$.

We denote the area of F

$$\mathcal{A}(F) = \int_D \sqrt{\det(g)}\, du\,dv$$

$$= \int_D \sqrt{|F_u|^2 |F_v|^2 - \langle F_u, F_v\rangle^2}\, du\,dv$$

<u>Comment</u> If F is injective, by the area formula we have

$$\mathcal{A}(F) = H^2(F(D))$$

the standard area measure.

DEF We say that F is <u>weakly conformal</u> if on D we have:

1) $|F_u| = |F_v|$,

2) $\langle F_u, F_v \rangle = 0$.

It could be $F_u(z) = F_v(z) = 0$ at some $z \in D$.
If $|F_u| = |F_v| \neq 0$ then F is <u>conformal</u>.

LEMMA We always have $\mathcal{A}(F) \leq \mathcal{E}(F)$. Equality holds if and only if F is weakly conformal.

Proof. The proof is the geometric - arithmetic mean inequality. Indeed,

$$\det(g) = \underbrace{|F_u|^2|F_v|^2 - \langle F_u, F_v\rangle^2}_{\overset{\vee\!\shortmid}{0}\ \text{Cauchy-Schwarz}} \overset{?}{\leq} \left[\frac{1}{2}\left(|F_u|^2 + |F_v|^2\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}(g)\right]^2$$

if and only if

$$\circledast \qquad -4\langle F_u, F_v\rangle^2 \leq \left(|F_u|^2 - |F_v|^2\right)^2.$$

Inequality $\circledast$ is clearly satisfied. It follows that

$$\mathcal{A}(F) = \int_D \sqrt{\det(g)}\, du\, dv \leq \frac{1}{2}\int_D \operatorname{tr}(g)\, du\, dv = \mathcal{E}(F).$$

The equality case $\mathcal{A}(F) = \mathcal{E}(F)$ implies that we have

$$\sqrt{\det(g)} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(g) \quad \text{on } D.$$

By $\circledast$, this in turn implies that $\langle F_u, F_v \rangle = 0$ and $|F_u| = |F_v|$, i.e., F is weakly conformal.

$\square$

We want to study the following minimum problems.
Let $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ be a Jordan curve (of class C^1). Let

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \left\{ F \in C^2(D; \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{D}; \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} F : \partial D \to \Gamma \\ \text{is a homeomorphism} \end{array} \right\}$$

The parametric Plateau problem consists in finding a minimizer of

$$(1) \qquad \inf \{ \mathcal{A}(F) \; ; \; F \in \mathcal{C}(\Gamma) \}.$$

This problem is difficult because $\mathcal{C}(\Gamma)$ is not compact and for any diffeomorphism $\phi : \overline{D} \to \overline{D}$ we have

$$\mathcal{A}(F \circ \phi) = \mathcal{A}(F).$$

In fact, the area does not depend on the parameterization (Exercise).
So there is no hope that a minimizing sequence is compact.

Douglas' idea was to solve the minimum problem for the Dirichlet integral and using the Lemma $\mathcal{A} = \mathcal{E}$

for conformal F, obtaining a solution to the Plateau problem. So we consider the problem

(2) $\quad \inf \{ \mathcal{E}(F) : F \in \mathcal{C}(\Gamma) \}$.

Here the situation is still noncompact but it is more favourable because $\mathcal{E}$ is invariant under a smaller class of diffeomorphisms of D.

The Moebius group is the group of diffeomorphisms $\phi : D \to D$ of the form

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \qquad z \in D,$$

for some $\theta \in [0, 2\pi)$ and $z_0 \in D$. These are the biholomorphic maps of D. The group loses compactness when $|z_0| \to 1$. Notice that $\phi : \partial D \to \partial D$.

EXERCISE Show that $\mathcal{E}(F \circ \phi) = \mathcal{E}(F)$ precisely when ϕ is a Moebius transformation.

Problems (1) and (2) are linked by an ε-conformality result due to Morrey, 1948:

<u>THEOREM</u> We have $\inf\limits_{F \in \mathcal{C}(\Gamma)} \mathscr{A}(F) = \inf\limits_{F \in \mathscr{C}(\Gamma)} \mathscr{E}(F)$.

Morrey shows that for any F and for any $\varepsilon > 0$ there exists a diffeomorphism $\phi : D \longrightarrow D$ such that $\mathscr{E}(F \circ \phi) \leq (1+\varepsilon)\, \mathscr{A}(F \circ \phi)$. We will not prove Morrey's theorem here.

<u>DEF</u> Let $F \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$ be weakly conformal.

The set
$$\mathrm{Sing}(F) = \{ z \in D \; ; \; |F_u(z)| = |F_v(z)| = 0 \}$$
is the <u>singular set</u> of F.

If $z \in D \setminus \mathrm{Sing}(F)$, the set $\Sigma = F(D_r(z)) = \{F(w) : |w-z| < r$

is a C^1-embedded 2-surface, for some $r > 0$.

If $z \in \mathrm{Sing}(F)$, then $\Sigma = F(D)$ may have a singularity at the point $F(z) \in \Sigma$.

We are ready to state the main theorem concerning the parametric Plateau problem.

THEOREM Let $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, be a Jordan curve of class C^1. Then there exists $F \in \mathscr{C}(\Gamma)$ realizing the minimum

$$\min \{ \mathscr{A}(F) \, ; \, F \in \mathscr{C}(\Gamma) \} .$$

Moreover, this F satisfies:

1) $F \in C^\infty(D; \mathbb{R}^n)$ and $\Delta F = 0$, i.e., each coordinate of F is harmonic.

2) $F : \partial D \to \Gamma$ is a homeomorphism $(F \in \mathscr{C}(\Gamma))$.

3) F is weakly conformal.

4) $\operatorname{Sing}(F)$ consists of isolated points of D.

* * *

We start the proof by first showing the existence of a minimizer for the problem

$$\min \{ \mathscr{E}(F) \, ; \, F \in \mathscr{C}(\Gamma) \}$$

We first fix a parameterization of Γ. Let $\gamma : \partial D \to \Gamma$ be continuous. By the PDEs theory we know that the Dirichlet problem

$$(3) \qquad \begin{cases} \Delta F = 0 & \text{in } D \\ F_{|\partial D} = \gamma \end{cases}$$

has a unique solution $F \in C^\infty(D; \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D}; \mathbb{R}^n)$.

In general it is $\mathcal{E}(F) = +\infty$, see the Hadamard's example. However, if γ is of class C^1 then we have $\mathcal{E}(F) < \infty$.

Since $\mathcal{E}$ is a convex functional we know that the critical point F is a minimizer for $\mathcal{E}$.
Indeed, let $G \in C_c^\infty(D; \mathbb{R}^n)$. Then we have

$$\mathcal{E}(F+G) = \frac{1}{2}\int_D |\nabla F + \nabla G|^2 \, du dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_D \Big\{ |\nabla F|^2 + |\nabla G|^2 + 2\sum_{i=1}^n \langle \nabla F^i, \nabla G^i \rangle \Big\} du dv$$

where

$$\langle \nabla F^i, \nabla G^i \rangle = \operatorname{div}(G^i \nabla F^i) - G^i \underbrace{\Delta F^i}_{=0}$$

and

$$\int_D \operatorname{div}(G^i \nabla F^i)\, du dv = 0$$

by the divergence theorem. So we get

$$\mathcal{E}(F+G) = \frac{1}{2}\int_D \{ |\nabla F|^2 + |\nabla G|^2 \} du dv \geq \mathcal{E}(F),$$

Now we must get rid of the specific parameterization of Γ.

For $\gamma \in C^1(\partial D; \Gamma)$ homeomorphism, let F^γ the solution of the Dirichlet problem (3). Let $(\gamma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ be a sequence such that

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{E}(F^{\gamma_j}) = \overline{\mathcal{E}} := \inf\{\mathcal{E}(F) : F \in \mathcal{C}(\Gamma)\}.$$

We are sure that $\overline{\mathcal{E}} < \infty$ because $\Gamma \in C^1$.

<u>Assume that</u> $\gamma_j \xrightarrow[j\to\infty]{\partial D} \gamma \in C(\partial D; \Gamma)$. The limit curve γ is only continuous and it may lose injectivity.

By the Maximum Principle for harmonic functions:

$$\max_{z\in\overline{D}} |F^{\gamma_j}(z) - F^{\gamma_k}(z)| = \max_{z\in\partial D} |\gamma_j(z) - \gamma_k(z)|.$$

It follows that $F^{\gamma_j} \xrightarrow[j\to\infty]{\overline{D}} F \in C(\overline{D}; \mathbb{R}^n)$. But harmonicity is preserved by the uniform convergence and so $F \in C^\infty(D; \mathbb{R}^n)$ with $\Delta F = 0$ in D

By weak compactness in $H^1(D; \mathbb{R}^n)$ we can also assume that $\nabla F^{\gamma_j} \xrightarrow[j\to\infty]{L^2} \nabla F$ and from this we deduce that

$$\mathcal{E}(F) \le \liminf_{j\to\infty} \mathcal{E}(F^{\gamma_j}) = \overline{\mathcal{E}}$$

If $F \in \mathcal{C}(\Gamma)$, i.e., if $F : \partial D \to \Gamma$ is a homeomorfism it follows that $\mathcal{E}(F) = \overline{\mathcal{E}}$. We will prove this later.

* * *

Our next task is to show that we can choose a minimizing sequence $(\gamma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ that converges uniformly.

In this crucial point (compactnes) we need the Courant-Lebesgue Lemma.

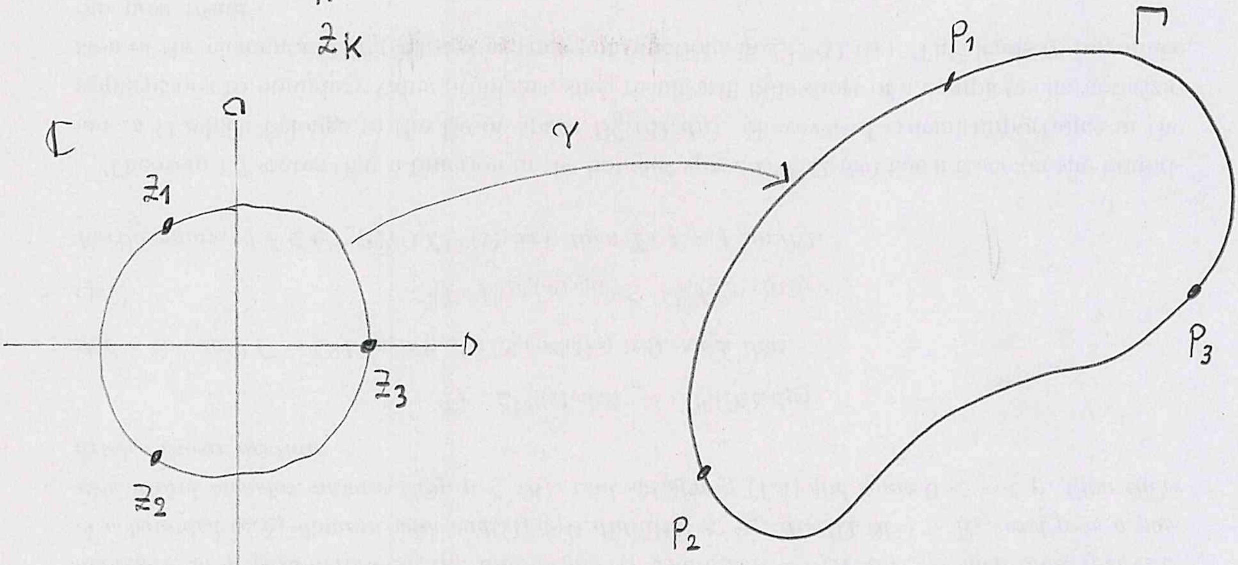
The compactness is achieved by a three points normalization of the curves γ^j.

<u>LEMMA</u> Let $z_1, z_2, z_3 \in \partial D$ and $w_1, w_2, w_3 \in \partial D$ be two triples of distinct points in ∂D, taken with the same order. Then there exists a (unique) Möbius transformation $\phi : D \to D$ such that $\phi(z_k) = w_k$ for $k = 1, 2, 3$.

The proof is left as an exercise.

Fix three distinct points $p_1, p_2, p_3 \in \Gamma$. Since $\mathcal{E}(F \circ \phi) = \mathcal{E}(F)$ for ϕ Möbius, we can assume that each curve γ^j of the minimizing sequence satisfies

$$\gamma^j\Big(\underset{\underset{z_k}{\parallel}}{e^{i\frac{2k}{3}\pi}}\Big) = P_k \quad \text{for } k = 1, 2, 3 .$$



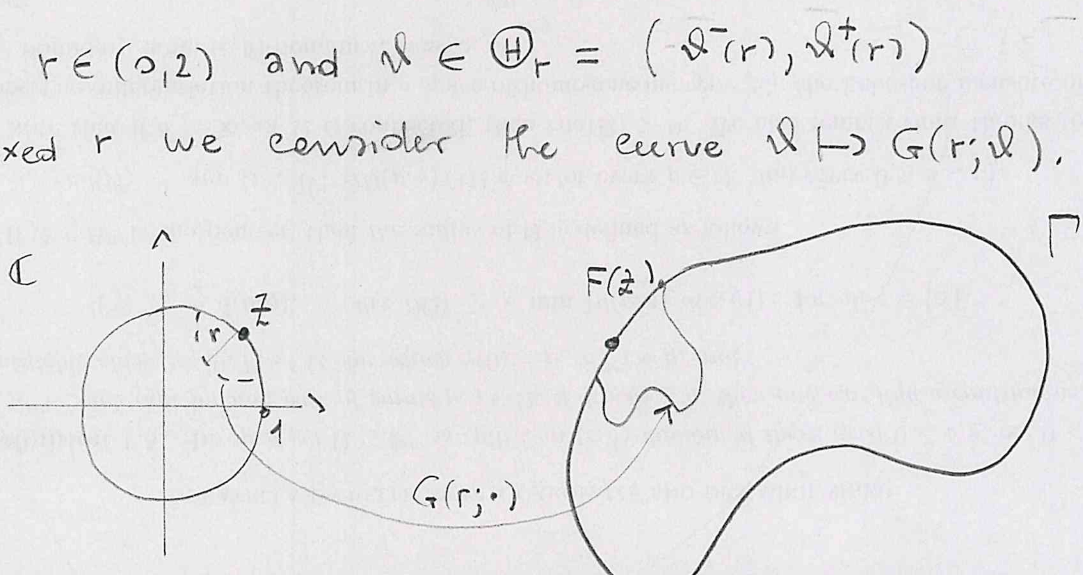
The following lemma is known as Courant-Lebesgue lemma. It does not use the three points normalization.

Fix a point $z \in \partial D$ and use polar coordinates centered at z. We let

$$G(r,\vartheta) = F(z + r e^{i\vartheta}),$$

with $r \in (0,2)$ and $\vartheta \in \Theta_r = (\vartheta^-(r), \vartheta^+(r))$.

For fixed r we consider the curve $\vartheta \mapsto G(r,\vartheta)$.



LEMMA For any $\delta \in (0,1)$ there exists $r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ such that

$$\text{Length}\left(G(r;\cdot)\right) \leq \sqrt{\frac{4\pi\, \mathcal{E}(F)}{-\log(\delta)}}$$

Proof. The energy $\mathcal{E}(F)$ in polar coordinates is

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla F|^2 \, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{\Theta_r} \left\{ |G_r|^2 + \frac{1}{r^2} |G_\theta|^2 \right\} d\theta \; r dr$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{|\Theta_r|}{r} \fint_{\Theta_r} |G_\theta|^2 \, d\theta \, dr.$$

By Hölder or Jensen inequality,

$$\fint_{\Theta_r} |G_\theta| \, d\theta \leq \left(\fint_{\Theta_r} |G_\theta|^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

So we find

$$2\mathcal{E}(F) \geq \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{|\Theta_r|}{r} \left(\fint_{\Theta_r} |G_\theta| \, d\theta \right)^2 dr =$$

$$= \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r|\Theta_r|} \left(\int_{\Theta_r} |G_\theta| \, d\theta \right)^2 dr$$

$$\geq \frac{1}{\pi} \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r} \left(\int_{\Theta_r} |G_\theta| \, d\theta \right)^2 dr$$

because $|\Theta_r| \leq \pi$. Choosing $r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ where $\int_{\Theta_r} |G_\theta| \, d\theta = \text{Length}(G(r;\cdot))$ is minimum:

$$2\pi \, \mathcal{E}(F) \geq \text{Length}(G(r;\cdot))^2 \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r} \, dr =$$

$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right) \text{Length}(G(r;\cdot))^2 .$$

The claim follows. $\square$

<u>LEMMA (Equicontinuity)</u> Let $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ be a Jordan curve of class C^1 and let $\gamma : \partial D \to \Gamma$ be a parameterization normalized by three points. Assume that $\mathcal{E}(F^\gamma) \leq \hat{\mathcal{E}} < \infty$. Then for any $\varepsilon > 0$ there is $\delta = \delta(\hat{\mathcal{E}}) > 0$ such that

$$\underset{z, w \in \partial D}{|z - w| < \delta} \implies |\gamma(z) - \gamma(w)| < \varepsilon .$$

Proof Let $p_1, p_2, p_3 \in \Gamma$ be the points of the normalization. We can choose $\varepsilon > 0$ such that $2\varepsilon < \min\{|p_1 - p_2|, |p_1 - p_3|, |p_2 -$

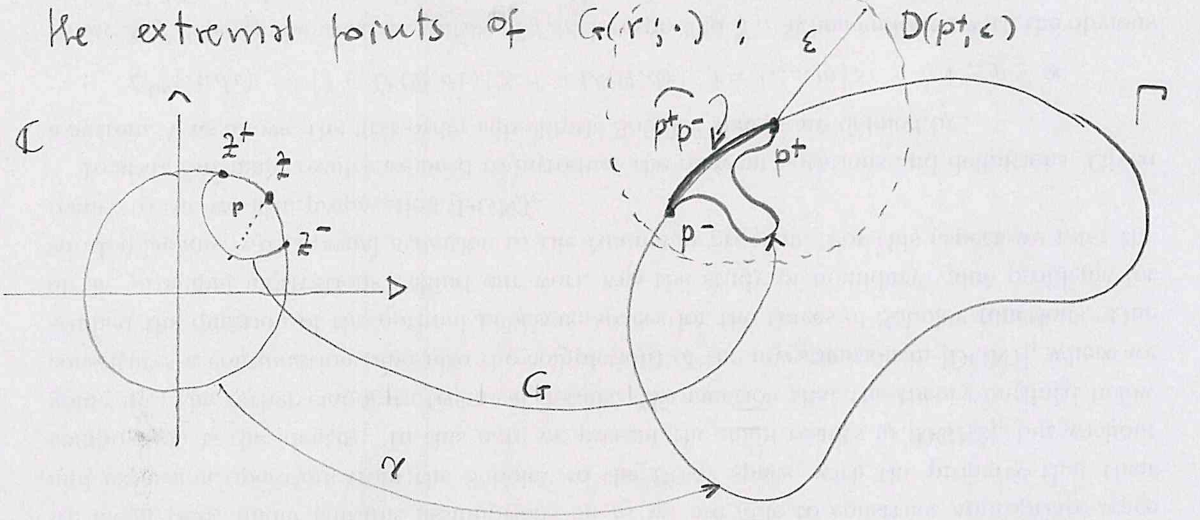
From $\Gamma \in C^1$ it follows that $\exists \, \varepsilon_0 > 0 \; \forall p \in \Gamma$ the set $\Gamma \cap D(p, \varepsilon)$ is connected for all $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

For $z \in \partial D$ let $\theta \mapsto G(r;\theta) = F(z + re^{i\theta})$ as above. By the Lemma there is $r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ such that

$$\text{Length}(G(r;\cdot)) \leq \sqrt{\frac{4\pi\, \mathcal{E}(F)}{-\log\delta}} \leq \sqrt{\frac{4\pi\,\hat{\mathcal{E}}}{-\log\delta}} < \varepsilon .$$

upon choice of δ.

Let $z^+, z^- \in \partial D$ be as in the picture and $p^+ = \gamma(z^+)$, $p^- = \gamma(z^-)$ be the extremal points of $G(r;\cdot)$;



Let $\widehat{z^+z^-} = \partial D \cap D(z,r)$ and $\widehat{p^+p^-} \subset \Gamma$ be the arc from p^- to p^+ that is contained in $D(p^+,\varepsilon)$.

Notice that:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \cap D(p^+,\varepsilon) \text{ connected} \\ \\ p^- \in \Gamma \cap D(p^+,\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{p^+p^-} \subset D(p^+,\varepsilon).$$

The definition is well-posed.

Now there are two cases!

1) $\gamma(\widehat{z^+z^-}) = \widehat{p^+p^-}$;

2) $\gamma(\widehat{z^+z^-}) = \Gamma \setminus \widehat{p^+p^-}$.

But $D(z,r)$ contains at most one of $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k = 1,2,3$,

while $\Gamma \cap D(p^+,\varepsilon)$ contains at least two of p_1, p_2, p_3.

It follows that $\gamma(\widehat{z^+z^-}) = \widehat{p^+p^-}$.

Finally, take $w \in \partial D$ with $w \in D(z,\delta)$. Then

$$|\gamma(z) - \gamma(w)| \leq |\gamma(z) - p^+| + |p^+ - \gamma(w)| < 2\varepsilon,$$

because $\gamma(z), \gamma(w) \in \gamma(\widehat{z^+,z^-}) \subset \widehat{p^+p^-} \subset D(p^+,\varepsilon)$.

$$\partial D \cap D(z,\delta) \subset \partial D \cap D(z,r) = \widehat{z^+z^-} \qquad \square$$

We go back to the minimizing problem.

Let $(\gamma^j)_{j\in\mathbb{N}}$ be a minimizing sequence for

$$\inf \{ \mathcal{E}(F^{\gamma}) \mid \gamma : \partial D \to \Gamma \text{ homeomorphism} \}.$$

Then we have $\mathcal{E}(F^{\gamma_j}) \leq \hat{\mathcal{E}} < \infty$ for all $j \in \mathbb{N}$.

We can assume that each γ_j is normalized by the same three points. Then the sequence is equicontinuous.

By Ascoli-Arzelà theorem there is a sub-sequence converging uniformly. We obtained the compactness.

$*\qquad *\qquad *$

Let $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ be the mapping obtained by compactness from the problem (4), we know that:

1) $F \in C^\infty(D; \mathbb{R}^n)$ and $\Delta F = 0$;

2) $F \in C(\overline{D}; \mathbb{R}^n)$ and $F(\partial D) = \Gamma$. It is still to show that $F : \partial D \to \Gamma$ is a homeomorphism.

3) For any diffeomorphism $g : \overline{D} \to \overline{D}$ we have the minimality

$$\mathcal{E}(F) \leq \mathcal{E}(F \circ g). \tag{5}$$

Using this property, in this section we prove that F is weakly conformal.

<u>LEMMA</u> Let $F \in C^\infty(D; \mathbb{R}^n)$ be harmonic. Then the mapping $\Phi : D \to \mathbb{C}$

$$\Phi(z) = |F_u(z)|^2 - |F_v(z)|^2 - 2i\,(F_u, F_v)$$

is holomorphic.

Proof. We use the standard notation

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\partial_u - i\partial_v\right)$$

$$\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\partial_u + i\partial_v\right).$$

Then we have

$$(F_z)^2 = \langle F_z, F_z \rangle = \frac{1}{4}\langle F_u - iF_v, F_u - iF_v \rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ |F_u|^2 - |F_v|^2 - 2i\langle F_u, F_v\rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\Phi$$

and thus

$$\Phi_{\bar z} = 4\frac{\partial}{\partial \bar z}(F_z)^2 = 8\langle F_z, F_{z\bar z}\rangle = 2\langle F_z, \Delta F\rangle$$

$$= 0$$

□

The mapping F is weakly conformal precisely when $\Phi = 0$

Let $\tau : \bar D \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}$ be a vector-field such that

$$\tau(z) \in T_z \partial D \quad \text{for all } z \in \partial D.$$

For $\varepsilon \in \mathbb{R}$ we denote by $\phi(z;\varepsilon)$ its flow.

Namely, we have $\phi(z;0) = z$ and

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(z;\varepsilon) = \tau(\phi(z;\varepsilon)).$$

Notation: $\phi(z;\varepsilon) = \phi_\varepsilon(z)$. Then for any ε we have $\phi_\varepsilon : \bar{D} \to \bar{D}$ and $\phi_\varepsilon : \partial D \to \partial D$.

<u>LEMMA</u> We have $\left.\frac{d\,\mathcal{E}(F\circ\phi_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_D \mathrm{Re}(\Phi\cdot\tau_{\bar z})\,du\,dv$.

Proof: Exercise.

If F has the minimizing property (5) then the lemma implies that:

$$0 = \left.\frac{d\,\mathcal{E}(F\circ\phi_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_D \mathrm{Re}(\Phi\cdot\tau_{\bar z})\,du\,dv$$

Taking $\tau \in C_c^\infty(D;\mathbb{C})$ we can integrate by parts obtaining

$$\mathrm{Re}\left(\int_D \Phi_{\bar z}\cdot\tau\,du\,dv\right) = 0$$

This implies that $\Phi_{\bar z} = 0$. We already knew this.

Now let τ be general again. Using $\Phi_{\bar z} = 0$ and the divergence theorem we get

$$\int_D \Phi \cdot \tau_{\bar z} \, du\,dv = \int_D (\Phi \cdot \tau)_{\bar z} = [\text{Exercise}]$$

$$= \int_{\partial D} \underbrace{z}_{\text{Exterior Normal}} \cdot \Phi(z) \cdot \tau(z) \, dH^1 .$$

However, this is not permitted because Φ is not defined on ∂D (We do not know if $F \in C^2(\bar D; \mathbb{R}^n)$).

So we proceed as follows

$$0 \underset{\text{Minimality}}{=} Re\left(\int_D \Phi \cdot \tau_{\bar z} \, du\,dv \right) \overset{\Phi \cdot \tau_{\bar z} \in L^1(D)}{=} \lim_{r \uparrow 1} Re\left(\int_{D_r} \Phi \cdot \tau_{\bar z} \, du\,dv \right)$$

$$= Re\left(\lim_{r \uparrow 1} \int_{D_r} (\Phi \cdot \tau)_{\bar z} \, du\,dv \right)$$

$$= Re\left(\lim_{r \uparrow 1} \int_{\partial D_r} \frac{z}{|z|} \cdot \Phi(z) \cdot \tau(z) \, dH^1 \right).$$

Now we choose a "smart" τ. We recall the representation kernel for harmonic functions in the disk. If $h : D \to \mathbb{R}$ is harmonic and $|w| < r < 1$ then

$$h(w) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r} \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z-w|^2} \, h(z) \, dH^1(z)$$

$$= \int_{\partial D_r} K(w,z) \, h(z) \, dH^1(z)$$

with $K(w,z) = \dfrac{|z|^2 - |w|^2}{2\pi |z| \, |z-w|^2}$.

We choose

$$\tau(z) = \underset{\text{Real}}{\underset{\uparrow}{K(w,z)}} \cdot \underset{\text{Tangent to } \partial D}{\underset{\uparrow}{(iz)}}$$

the singularity at w can be cut off. So τ is admissible.

We get

$$0 = \mathrm{Re}\Big(\lim_{r \uparrow 1} \int_{\partial D_r} i z^2 \Phi(z) \, K(w,z) \, dH^1 \Big)$$

$$= -\lim_{r \uparrow 1} \int_{\partial D_r} \mathrm{Im}(z^2 \Phi(z)) \, K(w,z) \, dH^1 = -\mathrm{Im}(w^2 \Phi(w$$

We conclude that:

$$\mathrm{Im}\left(z^2 \Phi(z)\right) = 0 \text{ on } D \Rightarrow z^2 \Phi(z) = \text{constant} = 0 \text{ on } D$$

That gives $\Phi(z) = 0$ on D. $\square$

* * *

Even though the minimizing curves $\gamma_j : \partial D \to \Gamma$ are homeomorphisms, the uniform limit $\gamma : \partial D \to \Gamma$ may lose injectivity.

We show that this is not the case.

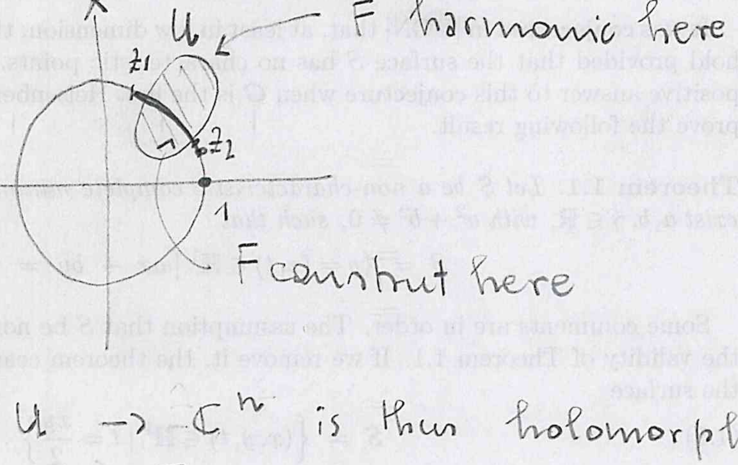
<u>LEMMA</u> The minimizing F is a homeomorphism from ∂D to Γ.

Proof. By contradiction, assume there exists $z_1, z_2 \in \partial D$ such that $F(z_1) = F(z_2)$. Then F is constant on the arc $\widehat{z_1 z_2}$ (in one of the two). This follows from the fact that the limiting γ_j are homeomorphisms.

Define $\hat{F} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ by a spherical reflection:

$$\hat{F}(z) = \begin{cases} F(z) & \text{for } z \in \bar{D} \\ F\left(\frac{z}{|z|^2}\right) & \text{for } |z| > 1 \end{cases}$$

Being constant on $\widehat{z_1 z_2}$ by Schwarz Reflection Principle $\hat{F}$ is harmonic in a small open set $\mathcal{U}$ crossing $\widehat{z_1 z_2}$.



The map $\hat{F}_z : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^n$ is then holomorphic.

EXERCISE $\hat{F}_z = 0$ on $\widehat{z_1 z_2}$.

It follows that:

$$\hat{F}_z = 0 \text{ on } \mathcal{U} \Rightarrow F = \text{const. on } D \cap \mathcal{U}$$

$$\Rightarrow F = \text{const. on } D.$$

This is not possible because $F : \partial D \to \Gamma$ is surjective. $\square$

Now we can conclude the proof of the Douglas-Radó theorem. Let $F \in C^\infty(D;\mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D};\mathbb{R}^n)$ be a solution to the minimizing problem for the energy. Then we have

$$A(F) \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ conformal}}}{=} E(F) = \inf_{F\in\mathcal{C}(\Gamma)} E(F) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Morrey}}}{=} \inf_{F\in\mathcal{C}(\Gamma)} A(F)$$

Moreover, $F \in \mathcal{C}(\Gamma)$ because $F: \partial D \to \Gamma$ is a homeomorphism.

Finally, the singular set is

$$\operatorname{Sing}(F) = \{z \in D : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{holomorphic}}}{F_z} = 0\}$$

with $F_z \neq 0$. So $\operatorname{Sing}(F)$ consists of isolated points.