Equazioni Differenziali 2

Soluzione dello scritto del 14 Giugno 2010

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|1-y^2|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) (5 punti) Provare che esiste un'unica soluzione locale e calcolarla.

ii) (3 punti) Descrivere l'insieme di tutte le soluzioni $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema. Calcolare la soluzione superiore e quella inferiore.

Soluzione. i) Nell'intervallo $(-1,1)$ la funzione $f(y) = \sqrt{|1-y^2|} = \sqrt{1-y^2}$ è di classe C^∞. In particolare è localmente Lipschitziana. Dal Teorema di esistenza e unicità locale segue l'esistenza di un'unica soluzione $y \in C^\infty(-\delta,\delta)$, per qualche $\delta > 0$, del Problema di Cauchy.

Alternativamente, esistenza e unicità locale sono conseguenza del metodo di separazione delle variabili. Integriamo l'identità

$$1 = \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$$

su un intervallo $(0,x)$ con $|x| < \delta$, $\delta > 0$ da determinare:

$$x = \int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{1-y(t)^2}}dt = \big[\arcsin(y(t))\big]_{t=0}^{t=x} = \arcsin(y(x)) - \arcsin(y(0)) = \arcsin(y(x)),$$

avendo usato il dato iniziale $y(0) = 0$. Invertendo la relazione ottenuta si ottiene $y(x) = \sin(x)$, $|x| < \delta$. L'intervallo massimale in cui i conti precendenti sono giustificati è $(-\pi/2, \pi/2)$, ovvero $\delta = \pi/2$.

ii) Per $x = \pm\pi/2$ la soluzione locale trovata verifica $y(x)^2 = 1$ e la separazione delle variabili diventa problematica.

Dobbiamo prolungare la soluzione locale ad una soluzione globale $y \in C^1(\mathbb{R})$. Discutiamo il caso $x \geq \pi/2$. Il caso $x \leq -\pi/2$ sarà analogo (si ottiene ad es. per simmetria dispari).

Osserviamo preliminarmente che le funzioni costanti $y = 1$ e $y = -1$ sono soluzioni dell'equazione differenziale. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale che verificano $y > 1$. Il caso $y < -1$ sarà analogo. Integriamo l'identità

$$1 = \frac{y'}{\sqrt{y^2-1}}$$

con integrali indefiniti. Si ottiene

$$x - \beta = \operatorname{arccosh}(y(x)), \quad \text{da cui} \quad y(x) = \cosh(x - \beta),$$

dove $\beta \in \mathbb{R}$ è una costante. Ricordiamo che $\cosh(x-\beta) = 1$ se e solo se $x = \beta$. Inoltre la soluzione y deve essere crescente, e quindi abbiamo la restrizione $x \geq \beta$ (implicita anche nell'inversione della relazione precedente).

Sulla base delle considerazioni precedenti, scegliamo due parametri $-\infty \leq \alpha \leq -\pi/2$ e $\pi/2 \leq \beta \leq \infty$ e definiamo le funzioni $y_{\alpha\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} -\cosh(x-\alpha) & x \leq \alpha \\ -1 & \alpha < x \leq -\pi/2 \\ \sin(x) & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x < \beta \\ \cosh(x-\beta) & x \geq \beta. \end{cases}$$

Le funzioni $y_{\alpha\beta} \in C^1(\mathbb{R})$ sono tutte le soluzioni globali del problema di Cauchy. Con la scelta $\alpha = -\infty$ e $\beta = \pi/2$ si ottiene la soluzione superiore. Con la scelta $\alpha = -\pi/2$ e $\beta = \infty$ si ottiene la soluzione inferiore.

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' = y - 2y^3.$$

i) (4 punti) Provare che tutte le soluzioni sono limitate e definite su tutto $\mathbb{R}$;

ii) (4 punti) Sia $y \in C^2(\mathbb{R})$ la soluzione dell'equazione differenziale relativa ai dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Provare che $0 < y(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e calcolare il limite

$$\lim_{x\to\infty} y(x).$$

Soluzione. i) Moltiplichiamo l'equazione differenziale per y' ed integriamo. Si ottiene la nuova equazione differenziale

$$(y')^2 = y^2 - y^4 + C,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante. Il valore massimo della funzione $f(y) = y^2 - y^4 + C$ è $C + 1/4$. Abbiamo dunque la condizione di esistenza di soluzioni $C + 1/4 \geq 0$. Più in generale, ogni soluzione y dovrà verificare $f(y(x)) \geq 0$ per tutte le x nel suo intervallo di definizione.

Gli insiemi $\{y \in \mathbb{R} : f(y) \geq 0\}$ sono limitati per ogni scelta di $C \geq -1/4$. Questi insimi consistono di uno oppure due intervalli, a seconda del parametro C. Qui non interessa descrivere questi intervalli limitati più precisamente.

Dunque, ogni soluzione y è limitata. Di conseguenza anche y' è limitata. Dai teoremi noti segue che le soluzioni dell'equazione differenziale sono globalmente definite su tutto $\mathbb{R}$.

ii) Usando i dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ si determina il valore della costante $C = 0$. Dunque, $(y')^2 = y^2(1 - y^2) \geq 0$.

Proviamo che $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo per assurdo che esista un $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $y(x_0) = 0$. Allora $y'(x_0) = 0$. Per l'unicità della soluzione dell'equazione differenziale $y'' = y - 2y^3$ con dati $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, si deduce che $y = 0$ identicamente. Assurdo.

Tenuto conto del dato iniziale si deduce che $0 < y(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $x = 0$ si ha $y''(0) = -1$. Quindi y è decrescente in un intorno destro di $x = 0$. Poiché la derivata prima non si annulla più, deduciamo che y rimane decrescente per ogni $x \geq 0$. Dunque esiste il limite

$$L = \lim_{x \to +\infty} y(x) \in [0, 1).$$

Proviamo che $L = 0$. Se per assurdo $L \neq 0$, allora si avrebbe

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x) = -\lim_{x \to +\infty} y(x)\sqrt{1 - y(x)^2} = -L\sqrt{1 - L^2} < 0.$$

Questo implica che $\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$, che è impossibile.