

Equazioni Differenziali 2

Nome:

Scritto del 28 Giugno 2010

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2 + y^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- i) (2 punti) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$;
- ii) (2 punti) Provare che la soluzione massimale è definita su tutto \mathbb{R} ;
- iii) (2 punti) Provare che la soluzione è crescente su \mathbb{R} e concava per $x \geq 0$;
- iv) (2 punti) Provare che risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \leq 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 2 (8 punti) Sia $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria e sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un opportuno intorno aperto di Γ .

- i) (6 punti) Calcolare la soluzione $u \in C^1(U)$ del problema

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = u^2, & (x, y) \in U, \\ u(x, y) = 1, & (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

- ii) (2 punti) Determinare l'aperto (connesso) U massimale su cui è definita la soluzione u . È vero che $0 \in U$?

Esercizio 3 (8 punti) Enunciare i principali teoremi sulla dipendenza della soluzione di equazioni differenziali ordinarie dai dati iniziali. Max. 1 pagina.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.