Equazioni Differenziali 2

Nome: Scritto del 28 Giugno 2010

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x^2+y^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

i) (2 punti) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$;

ii) (2 punti) Provare che la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$;

iii) (2 punti) Provare che la soluzione è crescente su $\mathbb{R}$ e concava per $x \geq 0$;

iv) (2 punti) Provare che risulta

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) \leq 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione. i) Posto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2},$$

è di classe C^∞. Il dato iniziale $(x_0, y_0) = (0,1)$ è in Ω. In particolare f verifica la condizione LIP in un intorno di $(0,1)$. L'esistenza e unicità locale della soluzione $y \in C^1(-\delta,\delta)$ per un opportuno $\delta > 0$ seguono dai teoremi noti.
ii) Se $|x| \geq \delta > 0$ si verifica

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{\delta^2} < \infty.$$

In particolare, sull'insieme del piano dove $|x| \geq \delta$ la funzione f verifica in modo banale la condizione di crescita sublineare. Precisamente, esiste una costante $C > 0$ $(= 1/\delta^2)$ tale che

$$|f(x,y)| \leq C(1+|y|), \quad \text{per ogni } |x| \geq \delta \text{ e per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

Segue dai teoremi noti che la soluzione è globalmente definita su $\mathbb{R}$.
Alternativamente: y' rimane limitata e quindi y non può esplodere in un tempo finito. (Si usa il criterio di prolungamento).

iii) Su Ω risulta $f(x,y) > 0$. La soluzione y verifica dunque $y' > 0$ ed è strettamente crescente. Inoltre, per $x > 0$ si ha $y(x) > 1 > 0$ e dunque

$$y''(x) = -\frac{2x + 2yy'}{(x^2+y^2)^2} < 0.$$

Dunque per $x \geq 0$ la soluzione è una funzione concava.
iv) Il limite certamente esiste per monotonia. Per $x > 0$ si verifica $y(x) > 1$ e dunque

$$y'(x) = \frac{1}{x^2 + y(x)^2} < \frac{1}{x^2+1}, \quad x > 0.$$

Integrando sull'intervallo $(0,x)$ con $x > 0$, si trova

$$y(x) - y(0) = \int_0^x y'(t)dt < \int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt = \operatorname{arctg}(x),$$

dove $y(0) = 1$, e al limite

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) \leq 1 + \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 2 (8 punti) Sia $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria e sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un opportuno intorno aperto di Γ.

i) (6 punti) Calcolare la soluzione $u \in C^1(U)$ del problema

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = u^2, & (x,y) \in U, \\ u(x,y) = 1, & (x,y) \in \Gamma. \end{cases}$$

ii) (2 punti) Determinare l'aperto (connesso) U massimale su cui è definita la soluzione u. È vero che $0 \in U$?

Il campo caratteristico è $X = (x, y, u^2)$. Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Gamma$, ovvero $x_0^2 + y_0^2 = 1$. La soluzione verifica $u(x_0, y_0) = 1$.
Calcoliamo le curve caratteristiche $\gamma \in C^1(I; \mathbb{R}^3)$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto contenente 0, ovvero le soluzioni del problema

$$\dot{\gamma} = X(\gamma), \quad \gamma(0) = (x_0, y_0, 1).$$

Nelle coordinate $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ avremo:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \gamma_1, \quad \gamma_1(0) = x_0 \\ \dot{\gamma}_2 &= \gamma_2, \quad \gamma_2(0) = y_0 \\ \dot{\gamma}_3 &= \gamma_3^2, \quad \gamma_3(0) = 1. \end{aligned}$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned}
x &= \gamma_1(s) = x_0 e^s, \quad s \in \mathbb{R} \\
y &= \gamma_2(s) = y_0 e^s, \quad s \in \mathbb{R} \\
u(x, y) &= \gamma_3(s) = \frac{1}{1-s}, \quad s < 1.
\end{aligned}$$

Infatti, la soluzione u verifica $u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \gamma_3(s)$. Dalle prime due equazioni si trova

$$x^2 + y^2 = (x_0^2 + y_0^2)e^{2s} = e^{2s}$$

e quindi $s = \log \sqrt{x^2 + y^2}$. In definitiva, troviamo la soluzione

$$u(x, y) = \frac{1}{1 - \log \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Il dominio naturale di definizione di questa soluzione è

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < e\right\}.$$

La soluzione u si prolunga in modo continuo in 0 ponendo $u(0) = 0$. Tuttavia tale prolungamento non è C^1 (facile verifica). Dunque, il dominio U non si può estendere a 0.

Esercizio 3 (8 punti) Enunciare i principali teoremi sulla dipendenza della soluzione di equazioni differenziali ordinarie dai dati iniziali. Max. 1 pagina.