Equazioni Differenziali.
Introduzione alle funzioni armoniche

Appunti del Corso 2007–2008

Università di Padova

Roberto Monti

Author address:

Indice

CAPITOLO 1

Panoramica sulle equazioni alle derivate parziali

1. Equazioni differenziali del primo ordine

1) Forma generale:

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \Omega,$$

dove $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2) Legge di conservazione scalare:

$$u_t(x,t) + \operatorname{div} F(x, u(x,t)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale C^1. È un equazione non lineare (se F è non lineare in u) in forma di divergenza.

3) Equazione di Hamilton-Jacobi:

$$u_t(x,t) + H(x, \nabla u(x,t)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è l'Hamiltoniana.

4) Equazione Iconale:

$$|\nabla u(x)| = 1, \quad x \in \Omega.$$

È un equazione non lineare di tipo Hamilton-Jacobi stazionaria.

5) Equazione di Burgers (in $\mathbb{R}^2$)

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

È una legge di conservazione non lineare.

2. Equazioni differenziali del secondo ordine

1) Forma generale:

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0, \quad x \in \Omega,$$

dove $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Equazione "fully non-linear".

2) Equazione di Laplace:

$$\operatorname{tr}(\nabla^2 u(x)) = \operatorname{div} \nabla u(x) = \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Equazione lineare di tipo ellittico in forma di divergenza.

3) Equazione di Poisson non lineare:

$$\Delta u(x) = f(u(x)), \quad x \in \Omega,$$

dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Equazione semilineare di tipo ellittico.

4) Equazione di Monge-Ampère:
$$\det(\nabla^2 u(x)) = f(x), \quad x \in \Omega,$$
con $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Equazione non lineare.
5) Equazione delle superfici minime:
$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}}\Big) = 0, \quad x \in \Omega.$$
È un equazione non lineare di tipo ellittico in forma di divergenza.
6) Equazione del calore
$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$
È un'equazione lineare di tipo parabolico, equazione di diffusione.
7) Equazione delle onde
$$u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Equazione lineare di tipo iperbolico.
8) Equazione di Schrödinger
$$u_t(x,t) = i\Delta u(x,t) + V(x)u(x,t),$$
dove $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, e $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è il potenziale.
9) Flusso di Ricci:
$$g_t(x,t) = \operatorname{Ricc}(g(x,t)), \quad x \in M, \quad t \geq 0,$$
dove M è una varietà, $g(\cdot,t)$ è una metrica Riemanniana su M (forma quadratica su T_xM), $\operatorname{Ricc}(g(\cdot,t))$ è la curvatura di Ricci relativa alla metrica $g(\cdot,t)$ (è una forma quadratica su T_xM, operatore differenziale su M del secondo ordine, non lineare).

3. Problemi generali e strumenti

Le domande principali sulle equazioni differenziali sono:

i) Esistenza di soluzioni;
ii) Unicità delle soluzioni;
iii) Regolarità delle soluzioni;
iv) Dipendenza dai dati iniziali o dalle condizioni al bordo;
v) Formule di rappresentazione per le soluzioni.

Gli strumenti per studiare le equazioni alle derivate parziali coprono l'intera analisi moderna e contemporanea:

i) Analisi Lineare: Analisi di Fourier, Teoria delle distribuzioni;
ii) Analisi Funzionale: Spazi funzionali, Spazi di Sobolev;
iii) Analisi convessa e "non smooth analysis";
iv) Analisi non lineare;
v) Calcolo delle Variazioni;
vi) Analisi Reale e Complessa;
vii) Teoria Geometrica della Misura.

Il punto di vista contemporaneo sulle equazioni differenziali può essere riassunto nel seguente programma:

1) Per dimostrare l'esistenza di soluzioni si cercano "soluzioni generalizzate" (distribuzionali, deboli, in senso viscoso etc.) in uno spazio funzionale sufficientemente grande.
2) Si cerca di dimostrare che le "soluzioni generalizzate" sono anche "soluzioni classiche" (Problema della Regolarità).
3) L'unicità si ottiene sviluppando opportuni Principi di Confronto.

CAPITOLO 2

Introduzione

1. Teorema della divergenza e identità di Green

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $k \in \mathbb{N}$. Indichiamo con $C^k(\bar{\Omega})$ l'insieme delle funzioni $f \in C^k(\Omega_0)$ per qualche aperto Ω_0 contenente strettamente Ω.

Definizione 2.1.1 (Aperto di classe C^k). Un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^k, $k \in \mathbb{N}$, se per ogni punto $x_0 \in \partial\Omega$ esistono un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 ed una funzione $f \in C^k(U)$ tali che $\nabla f(x_0) \neq 0$ e $\partial\Omega \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$. Se $f(x) < 0$ per $x \in U \cap \Omega$, il vettore

$$\nu(x_0) = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \tag{2.1.1}$$

si dice normale esterna a $\partial\Omega$ nel punto $x_0 \in \partial\Omega$.

La funzione f si dice funzione definiente per $\partial\Omega$. La normale esterna ν non dipende dalla scelta della funzione definiente.

La frontiera $M = \partial\Omega$ dell'aperto Ω è una superficie di classe C^k che ha in ogni punto $x \in M$ un piano tangente T_xM di dimensione $n-1$. Il piano tangente T_xM può essere identificato con un iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Il campo normale esterno ν è definito in modo unico su $M = \partial\Omega$ e verifica $\langle \nu(x), v\rangle = 0$ per ogni $v \in T_xM$.

Formula dell'area. Su una ipersuperficie $M \subset \mathbb{R}^n$ è definita una misura di superficie standard che indichiamo con $\mathcal{H}^{n-1}$, la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$. Con questa misura è possibile calcolare integrali di funzioni (ad esempio continue) definite su M. Supponiamo che la ipersuperficie M sia il grafico di una funzione $\varphi \in C^1(Q)$ con $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ insieme aperto, e precisamente $M = \{(x', \varphi(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in Q\}$. Sia inoltre $g \in C(M)$ una funzione continua. Per la formula dell'area[1] si ha

$$\int_M g(x)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_Q g(x', \varphi(x'))\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}\, dx'. \tag{2.1.2}$$

Definizione 2.1.2 (Divergenza). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale. La divergenza di F è

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}.$$

Il seguente Teorema della divergenza è un caso particolare del Teorema di Stokes per le varietà con bordo[2].

[1] Cfr. Evans & Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions,* CRC Press 1992.
[2] Cfr. do Carmo, *Differential forms and applications,* Springer 1994.

Teorema 2.1.3 (della divergenza). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe C^1 e sia $F \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale. Allora*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(x), \nu(x)\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{2.1.3}$$

dove $\nu(x)$ è la normale esterna a $\partial\Omega$ nel punto $x \in \partial\Omega$.

Dim. A) Supponiamo che esista un cubo aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con facce parallele agli iperpiani coordinati tale che:

1) $\operatorname{spt}(F) = \overline{\{x \in \bar{\Omega} : F(x) \neq 0\}} \subset U$;
2) $\partial\Omega \cap U = \{(x', \varphi(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in Q\}$ per una funzione $\varphi \in C^1(Q)$ e $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ cubo aperto $(n-1)$-dimensionale. Supponiamo anche che $\Omega \cap U$ sia contenuto nell'epigrafico di φ.

Per il Teorema di Fubini–Tonelli, si ha

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_Q \int_{\varphi(x')}^{+\infty} \operatorname{div} F(x', x_n)\, dx_n\, dx' = \sum_{i=1}^n \int_Q \int_{\varphi(x')}^{+\infty} \frac{\partial F_i(x', x_n)}{\partial x_i} dx_n\, dx'.$$

Integriamo separatamente ciascun contributo della divergenza. Per $i = n$ si trova

$$\int_{\varphi(x')}^{+\infty} \frac{\partial F_n(x', x_n)}{\partial x_n}\, dx_n = -F_n(x', \varphi(x')). \tag{2.1.4}$$

Per $i = 1, 2, ..., n-1$, si ha la seguente identità

$$\int_{\varphi(x')}^{+\infty} \frac{\partial F_i(x', x_n)}{\partial x_i}\, dx_n = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\varphi(x')}^{+\infty} F_i(x', x_n)\, dx_n + F_i(x', \varphi(x')) \frac{\partial \varphi(x')}{\partial x_i}. \tag{2.1.5}$$

Poniamo $\hat{x}'_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1})$ e consideriamo la sezione $Q_{\hat{x}'_i} = \{x_i \in \mathbb{R} : x' \in Q\}$. Al variare di $\hat{x}'_i$, risulta $Q_{\hat{x}'_i} = \emptyset$ oppure $Q_{\hat{x}'_i} = (a, b)$ per numeri fissati $a < b$. In questo secondo caso abbiamo

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\varphi(x')}^{+\infty} F_i(x', x_n)\, dx_n\, dx_i = 0, \tag{2.1.6}$$

perchè F si annulla sul bordo del cubo U.

La normale esterna ν a $\partial\Omega$ in $x = (x', \varphi(x')) \in U$ è il vettore

$$\nu(x) = \frac{(\nabla\varphi(x'), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}}. \tag{2.1.7}$$

Tenuto conto di (2.1.7), dalle (2.1.4)–(2.1.6) si trova

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx &= \int_Q \Big(\sum_{i=1}^{n-1} F_i(x', \varphi(x')) \frac{\partial \varphi(x')}{\partial x_i} - F_n(x', \varphi(x')) \Big) dx' \\
&= \int_Q \langle \nu(x', \varphi(x')), F(x', \varphi(x')) \rangle \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}\, dx' \\
&= \int_{\partial\Omega} \langle F(x), \nu(x) \rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Nell'ultima riga abbiamo usato la formula dell'area (2.1.2).

B) Proviamo il caso generale. Per il Teorema della funzione implicita, per ogni punto $x \in \partial\Omega$ esiste un cubo $U_x \subset \mathbb{R}^n$ con facce parallele agli iperpiani coordinati tale che $\partial\Omega \cap U_x$ è un grafico del tipo $x_i = \varphi(\hat{x}_i)$ per qualche scelta di $i = 1, 2, ..., n$. Gli insiemi U_x con $x \in \partial\Omega$ formano un ricoprimento aperto di $\partial\Omega$. Poichè $\partial\Omega$ è compatto, essendo Ω limitato, esiste un sottoricoprimento limitato $\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^N U_k$, con $U_k = U_{x_k}$ per opportuni $x_k \in \partial\Omega$. Scegliamo un insieme aperto $U_0 \subset\subset \Omega$, non necessariamente un cubo, tale che $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^N U_k$. Sia γ_k, $k = 0, 1, ..., N$, una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $U_0, U_1, ..., U_k$, ovvero:

1) $\gamma_k \in C_0^1(U_k)$ per $k = 0, 1, ..., N$;

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^N \gamma_k(x) = 1$ per ogni $x \in \bar{\Omega}$.

Usando il risultato della parte A) si trova:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\,dx &= \int_\Omega \operatorname{div}\Big(\sum_{k=0}^n \gamma_k(x)F(x)\Big)\,dx = \sum_{k=0}^n \int_\Omega \operatorname{div}\big(\gamma_k(x)F(x)\big)\,dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_\Omega \operatorname{div}\big(\gamma_k(x)F(x)\big)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} \langle \gamma_k(x)F(x), \nu(x)\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial\Omega} \Big\langle \sum_{k=1}^n \gamma_k(x)F(x), \nu(x)\Big\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega} \langle F(x), \nu(x)\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}(\gamma_0 F)\,dx = 0$, la cui verifica è lasciata come esercizio.

□

Osservazione 2.1.4. Se $F(x) = \nabla u(x)$ per una funzione $u \in C^2(\bar{\Omega})$, la (2.1.3) diventa

$$\int_\Omega \Delta u(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{2.1.8}$$

dove

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \langle \nabla u(x), \nu(x)\rangle \tag{2.1.9}$$

è la derivata normale di u, ovvero la derivata parziale di u nella direzione $\nu(x)$, $x \in \partial\Omega$, mentre

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{2.1.10}$$

è l'operatore di Laplace.

Definizione 2.1.5 (Funzione armonica). Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ tale che che $\Delta u = 0$ si dice armonica. L'insieme delle funzioni armoniche in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si indica con $H(\Omega)$.

Proposizione 2.1.6 (Identità di Green). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe C^1 e siano $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Allora*

$$\int_\Omega v\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle\,dx, \tag{2.1.11}$$

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int_{\partial\Omega} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big)\,d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{2.1.12}$$

DIM. L'identità (2.1.12) è una conseguenza di (2.1.11). Dalla regola per la derivata del prodotto di funzioni troviamo

$$\mathrm{div}(v\nabla u) = \sum_{i=1}^n (vu_i)_i = \sum_{i=1}^n (v_i u_i + vu_{ii}) = \langle \nabla v, \nabla u\rangle + v\Delta u.$$

Integrando e usando il Teorema della divergenza si ottiene la (2.1.11):

$$\int_\Omega (v\Delta u + \langle \nabla u, \nabla v\rangle)\,dx = \int_\Omega \mathrm{div}\,(v\nabla u)\,dx = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu\rangle\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

□

OSSERVAZIONE 2.1.7 (Integrazione per parti). Se $v = 0$ oppure $\partial u/\partial\nu = 0$ su $\partial\Omega$, allora l'identità di Green (2.1.11) diventa la formula di integrazione per parti

$$\int_\Omega v\Delta u\,dx = -\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle\,dx. \tag{2.1.13}$$

2. Funzioni armoniche e olomorfe nel piano

In questa sezione identifichiamo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ e indichiamo con $z = x + iy$ la generica variabile complessa. Gli operatori di derivazione olomorfa ed antiolomorfa sono rispettivamente

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \qquad \partial_{\bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Un breve conto mostra che $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar z} = 4\partial_{\bar z}\partial_z$.

DEFINIZIONE 2.2.8 (Funzione olomorfa). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto. Una funzione $f \in C^1(\Omega;\mathbb{C})$ si dice olomorfa in Ω se risulta $\partial_{\bar z} f(z_0) = 0$ per ogni $z_0 \in \Omega$.

Equivalentemente, una funzione f è olomorfa in Ω se per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste finito il limite

$$\frac{df(z_0)}{dz} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

In effetti, il limite vale $\partial_z f(z_0)$. Le funzioni olomorfe sono analitiche.

Se $f = u + iv$ con u, v funzioni (analitiche) reali, diremo che $u = \mathrm{Re} f$ è la parte reale di f, e $v = \mathrm{Im} f$ è la parte immaginaria di f. L'equazione $\partial_{\bar z} f = 0$ è equivalente al sistema di equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

TEOREMA 2.2.9. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia f una funzione olomorfa in Ω. Allora la parte reale di f è una funzione armonica. Viceversa, se Ω è semplicemente connesso e $u \in H(\Omega)$ è una funzione armonica, allora u è la parte reale di una funzione olomorfa.*

DIM. Sia $f = u + iv$, con u, v funzioni (analitiche) reali. Dalle equazioni di Cauchy-Riemann (2.2.14) segue che

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Supponiamo ora che $u \in H(\Omega)$ sia una funzione armonica. Vogliamo trovare una funzione v definita in Ω tale che $f = u + iv$ sia olomorfa. Ovvero, v deve verificare le equazioni di Cauchy-Riemann $v_x = -u_y$ e $v_y = u_x$. Il campo vettoriale $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, $F = (F_1, F_2) = (-u_y, u_x)$ verifica la condizione di chiusura

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -u_{yy} = u_{xx} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Dunque, siccome Ω è semplicemente connesso, per il Lemma di Poincaré esiste una funzione potenziale $v \in C^2(\Omega)$ tale che $F = \nabla v = (v_x, v_y)$. La funzione $f = u + iv$ è olomorfa.

Equivalentemente possiamo usare il linguaggio delle forme differenziali. Sia ω la 1-forma differenziale in Ω, $\omega = -u_y dx + u_x dy$. La forma ω è chiusa, infatti

$$d\omega = -u_{yx} dx \wedge dx - u_{yy} dy \wedge dx + u_{xx} dx \wedge dy + u_{xy} dy \wedge dy = \Delta u \, dx \wedge dy = 0.$$

Dunque, siccome Ω è semplicemente connesso, esiste una funzione potenziale $v \in C^2(\Omega)$ tale che $\omega = dv = v_x dx + v_y dy$. Confrontando i coefficienti di dx e dy si ottiene la tesi. □

OSSERVAZIONE 2.2.10 (Armonica coniugata). Data una funzione u armonica in Ω, una funzione v tale che $f = u + iv$ è olomorfa in Ω si dice armonica coniugata di u. Se Ω è connesso, l'armonica coniugata è unica a meno di una costante addittiva.

3. Interpretazione variazionale delle funzioni armoniche

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $\varphi \in C(\partial\Omega)$ una funzione continua sul bordo. Sia

$$\mathcal{A}(\Omega; \varphi) = \Big\{ u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} = \varphi, \int_\Omega |\nabla u|^2 dx < +\infty \Big\}. \tag{2.3.15}$$

Definiamo il funzionale di Dirichlet $F : \mathcal{A}(\Omega; \varphi) \to [0, +\infty)$

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx. \tag{2.3.16}$$

TEOREMA 2.3.11. *Sia $u \in \mathcal{A}(\Omega; \varphi)$ un minimo per il funzionale di Dirichlet. Se $u \in C^2(\Omega)$ allora $\Delta u = 0$ in Ω.*

DIM. Sia $v \in C_0^\infty(\Omega)$ una funzione di classe C^∞ con supporto compatto in Ω. Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ risulta $u + \varepsilon v \in \mathcal{A}(\Omega; \varphi)$, e inoltre, per la minimalità di u, si ha

$$f(\varepsilon) = F(u + \varepsilon v) \geq F(u) = f(0),$$

la funzione $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ ha un punto di minimo in $\varepsilon = 0$, e quindi $f'(0) = 0$, posto che la derivata esista. In effetti, f è un polinomio quadratico in ε e inoltre

$$\begin{aligned} f'(\varepsilon) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2\varepsilon \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \Big) \\ &= 2 \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + 2\varepsilon \int_\Omega |\nabla v|^2 dx. \end{aligned}$$

Quindi l'equazione $f'(0) = 0$ è equivalente a

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = 0, \tag{2.3.17}$$

dove $v \in C_0^\infty(\Omega)$ è una funzione generica. Se $u \in C^2(\Omega)$, per il Teorema della divergenza (integrazione per parti) si trova

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = -\int_\Omega v \Delta u \, dx.$$

Non c'è contributo di bordo, perchè v si annulla in un intorno di $\partial\Omega$.

Dunque, l'equazione (2.3.17) è equivalente all'equazione

$$\int_\Omega v \Delta u \, dx = 0$$

per ogni $v \in C_0^\infty(\Omega)$, e questo implica $\Delta u = 0$ in Ω. □

L'ambiente naturale in cui definire il funzionale di Dirichlet è lo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$.

Definizione 2.3.12 (Spazio $H^1(\Omega)$). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $u \in L^2(\Omega)$ appartiene allo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$ se esiste un vettore di funzioni $G = (g_1, ..., g_n)$ con $g_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, ..., n$, tale che vale la formula di integrazione per parti

$$\int_\Omega u \, \mathrm{div} F \, dx = -\int_\Omega \langle G, F \rangle \, dx \tag{2.3.18}$$

per ogni campo vettoriale $F \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$. In questo caso scriviamo, con abuso di notazione,

$$\nabla u = G, \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.3.19}$$

Il vettore ∇u si dice gradiente debole di u, e le funzioni g_i si dicono derivate parziali deboli di u.

Definizione 2.3.13 (Soluzioni deboli). Diciamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ verifica l'equazione differenziale $\Delta u = 0$ in senso debole se

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = 0$$

per ogni $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Nel Capitolo 8 vedremo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ che risolve $\Delta u = 0$ in senso debole è di classe $C^\infty(\Omega)$, a meno di ridefinirla in un insieme di misura nulla, e quindi risolve l'equazione in senso classico.

Osservazione 2.3.14. In generale il funzionale di Dirichlet non ammette minimo finito (Cfr. il controesempio di Hadamard nell'Esercizio 7). Se il dato al bordo φ "oscilla troppo" l'energia della funzione armonica che ha φ come valore al bordo è infinita e l'insieme in (2.3.15) è vuoto, $\mathcal{A}(\Omega; \varphi) = \emptyset$.

CAPITOLO 3

Soluzione fondamentale e formule di rappresentazione

1. Soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace

Cerchiamo una soluzione u dell'equazione $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con simmetria radiale: $u(x) = \varphi(|x|) = \varphi(r)$ con $|x| = r > 0$ e $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^+)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \partial_i u(x) &= \varphi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \\ \partial_i^2 u(x) &= \varphi''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + \varphi'(|x|)\frac{|x| - \frac{x_i^2}{|x|}}{|x|^2}, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

e dunque

$$\Delta u(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r).$$

L'equazione alle derivate parziali $\Delta u = 0$ è equivalente, in questo caso, alla seguente equazione differenziale ordinaria nella variabile r

$$0 = r^{n-1}\varphi''(r) + (n-1)r^{n-2}\varphi'(r) = \frac{d}{dr}\big(r^{n-1}\varphi'(r)\big).$$

Per $n > 2$ si trovano le soluzioni

$$\varphi(r) = \frac{C}{r^{n-2}} + D,$$

mentre per $n = 2$ si trovano le soluzioni

$$\varphi(r) = C\log r + D,$$

con $C, D \in \mathbb{R}$ costanti.

Scegliamo la costante $D = 0$. La costante C è fissata in dipendenza dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$. Precisamente definiamo, in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}\dfrac{1}{|x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x| & \text{se } n = 2. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Qui e nel seguito $\omega_n = |B(0,1)|$ indica la misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$.

La funzione Γ è la *soluzione fondamentale del Laplaciano*. Γ ha una singolarità nel punto $x = 0$. Questa singolarità è integrabile, ovvero $\Gamma \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. La scelta della costante C è motivata dal Teorema 3.1.2.

Sia δ la misura di Dirac in $\mathbb{R}^n$ concentrata in 0, ovvero $\delta(A) = 0$ se $0 \notin A$ e $\delta(A) = 1$ se $0 \in A$, per un qualsiasi insieme $A \subset \mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 3.1.1 (Soluzioni distribuzionali). Diciamo che $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ verifica l'equazione differenziale $\Delta u = \delta$ in senso distribuzionale in $\mathbb{R}^n$ (ovvero in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), se

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \tag{3.1.3}$$

per ogni funzione test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Usando il linguaggio delle distribuzioni[1], l'equazione (3.1.3) può essere riscritta nel seguente modo: $\langle \Delta u, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle$.

TEOREMA 3.1.2. *La funzione* Γ *in* (3.1.2) *verifica in senso distribuzionale l'equazione* $\Delta\Gamma = \delta$ *in* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

DIM. Dimostriamo il teorema per $n \geq 3$. Il caso $n = 2$ è lasciato come esercizio. Data $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sia $R > 0$ tale che che $\text{spt}(\varphi) \subset B(0,R)$, ovvero $\varphi(x) = 0$ per $|x| \geq R$. Siccome $\Gamma \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema della convergenza dominata abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma\Delta\varphi\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon<|x|<R} \Gamma\Delta\varphi\,dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon<|x|<R} \big(\text{div}(\Gamma\nabla\varphi) - \langle\nabla\Gamma,\nabla\varphi\rangle\big)dx,\end{aligned}$$

e per il Teorema della divergenza

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon<|x|<R} \text{div}(\Gamma\nabla\varphi)\,dx &= \int_{|x|=R}\Gamma\,\langle\nabla\varphi,\nu\rangle\,d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{|x|=\varepsilon}\Gamma\,\langle\nabla\varphi,\nu\rangle\,d\mathcal{H}^{n-1}\\ &= -\int_{|x|=\varepsilon}\Gamma\,\langle\nabla\varphi,\nu\rangle\,d\mathcal{H}^{n-1},\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

dove, con abuso di notazione, abbiamo indicato $\nu(x) = x/|x|$. Nell'ultima riga, abbiamo usato il fatto che $\varphi(x) = 0$ per $|x| \geq R$. Poichè $\mathcal{H}^{n-1}(\{|x| = \varepsilon\}) = n\omega_n\varepsilon^{n-1}$ e ricordando la (3.1.2), si trova

$$\int_{|x|=\varepsilon} \big|\Gamma\,\langle\nabla\varphi,\nu\rangle\big| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi(x)|\frac{\varepsilon}{(n-2)},$$

e dunque l'integrale a sinistra in (3.1.4) è infinitesimo per $\varepsilon \to 0^+$. Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma\,\Delta\varphi\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon<|x|<R}\langle\nabla\Gamma,\nabla\varphi\rangle\,dx,$$

e poichè $\langle\nabla\Gamma,\nabla\varphi\rangle = \text{div}(\varphi\nabla\Gamma) - \varphi\Delta\Gamma$ e $\Delta\Gamma(x) = 0$ per $|x| > 0$, usando di nuovo il Teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned}-\int_{\varepsilon<|x|<R}\langle\nabla\Gamma,\nabla\varphi\rangle\,dx &= -\int_{\varepsilon<|x|<R}\text{div}(\varphi\nabla\Gamma)\,dx\\ &= \int_{|x|=\varepsilon}\varphi\,\langle\nabla\Gamma,\nu\rangle\,d\mathcal{H}^{n-1},\end{aligned}$$

dove, come sopra, $\nu(x) = x/|x|$. Dal momento che, per $|x| = \varepsilon$,

$$\langle\nabla\Gamma(x),\nu(x)\rangle = \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial\nu} = \frac{1}{n\omega_n|x|^{n-1}},$$

[1]Cfr. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer 1990.

si arriva all'identità

$$\int_{|x|=\varepsilon} \varphi \langle \nabla\Gamma, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} = \varphi(0) + \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|x|=\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

La tesi del teorema segue ora dal fatto che, essendo φ continua, si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \fint_{|x|=\varepsilon} \big(\varphi(x) - \varphi(0)\big) \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

$\square$

2. Formule di rappresentazione di Stokes

Definiamo la soluzione fondamentale per Δ con polo in un punto fissato $x \in \mathbb{R}^n$ come

$$\Gamma_x(y) = \Gamma(y-x) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \frac{1}{|y-x|^{n-2}}, \qquad y \neq x, \quad n \geq 3.$$

Per $n = 2$ la definizione è analoga. Indicando con δ_x la delta di Dirac concentrata in x, la funzione Γ_x verifica in senso distribuzionale l'equazione differenziale $\Delta\Gamma_x = \delta_x$.

Teorema 3.2.3 (Formula di Stokes). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe C^1 e sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Allora, per ogni $x \in \Omega$ si ha*

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma_x(y) \Delta u(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} \Big(\Gamma_x(y) \frac{\partial u(y)}{\partial\nu} - u(y) \frac{\partial \Gamma_x(y)}{\partial\nu}\Big) d\mathcal{H}^{n-1}(y). \tag{3.2.5}$$

Dim. Fissato $x \in \Omega$ sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset\subset \Omega$ e poniamo $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon(x)$. Siccome $\Gamma_x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema della convergenza dominata si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma_x \Delta u \, dy = \int_\Omega \Gamma_x \Delta u \, dy.$$

Inoltre, poichè $\Delta\Gamma_x = 0$ in Ω_ε, dall'identità di Green (2.1.12) si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma_x \Delta u \, dy &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Big(\Gamma_x \frac{\partial u}{\partial\nu} - u \frac{\partial\Gamma_x}{\partial\nu}\Big) d\mathcal{H}^{n-1}. \\
&= \int_{\partial\Omega} \Big(\Gamma_x \frac{\partial u}{\partial\nu} - u \frac{\partial\Gamma_x}{\partial\nu}\Big) d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Big(\Gamma_x \frac{\partial u}{\partial\nu} - u \frac{\partial\Gamma_x}{\partial\nu}\Big) d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale, con abuso di notazione, $\nu(y) = \frac{y-x}{|y-x|}$ indica la normale esterna al bordo della palla $B_\varepsilon(x)$. Osserviamo che

$$\Big| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Gamma_x \frac{\partial u}{\partial\nu} d\mathcal{H}^{n-1} \Big| \leq C(n)\varepsilon^{2-n} \sup_{x\in\Omega} |\nabla u(x)| \, \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_\varepsilon(x)) \leq C\varepsilon,$$

e dunque l'integrale a sinistra converge a zero per $\varepsilon \to 0^+$. Inoltre, si ha

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \frac{\partial\Gamma_x(y)}{\partial\nu} d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (u(y) - u(x)) \frac{\partial\Gamma_x(y)}{\partial\nu} d\mathcal{H}^{n-1} + u(x) \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial\Gamma_x(y)}{\partial\nu} d\mathcal{H}^{n-1},$$

dove, essendo $\frac{\partial\Gamma_x(y)}{\partial\nu} = \frac{1}{n\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}$ per $y \in \partial B_\varepsilon(x)$, si ha l'identità

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial\Gamma_x(y)}{\partial\nu} d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_\varepsilon) = 1. \tag{3.2.6}$$

Infine, dalla continuità di u nel punto x si deduce che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)}(u(y)-u(x))\frac{\partial\Gamma_x(y)}{\partial\nu}d\mathcal{H}^{n-1}=0, \tag{3.2.7}$$

e questo conclude la dimostrazione della formula di Stokes.

□

La formula (3.2.5) permette di ricostruire una funzione u a partire da Δu in Ω, e da u, $\partial u/\partial\nu$ su $\partial\Omega$. In particolare, se $u\in C^2(\bar\Omega)$ è una funzione armonica in Ω, si ottiene la formula di rappresentazione

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\Big(u(y)\frac{\partial\Gamma_x(y))}{\partial\nu}-\Gamma_x(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}\Big)d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{3.2.8}$$

Il membro di destra è una funzione differenziabile con continuità infinite volte nella variabile x. Limiti e derivate in x, infatti, passano sotto il segno di integrale e l'integranda è di classe $C^\infty(\Omega)$ in x per ogni $y\in\partial\Omega$.

Corollario 3.2.4. *Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un aperto, $n\geq 2$. Se $u\in C^2(\Omega)$ è armonica allora $u\in C^\infty(\Omega)$.*

Corollario 3.2.5. *Una funzione $u\in C^2(\bar B(x,r))$, $x\in\mathbb{R}^n$ e $r>0$, verifica la formula di rappresentazione*

$$u(x)=\fint_{\partial B(x,r)}u(y)d\mathcal{H}^{n-1}+\int_{B(x,r)}\big(\Gamma_x(y)-\Gamma(r)\big)\Delta u(y)dy, \tag{3.2.9}$$

dove $\Gamma(r)=\frac{r^{2-n}}{n(2-n)\omega_n}$.

Dim. Verifichiamo la formula nel caso $n\geq 3$. Usiamo la formula di Stokes (3.2.5) relativamente all'insieme $\Omega=B(x,r)$:

(3.2.10)

$$u(x)=\int_{B(x,r)}\Gamma_x(y)\Delta u(y)\,dy-\int_{\partial B(x,r)}\Big(\Gamma_x(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}-u(y)\frac{\partial\Gamma_x(y)}{\partial\nu}\Big)d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Ricordiamo che se $y\in\partial B(x,r)$ allora

$$\frac{\partial\Gamma_x}{\partial\nu}(y)=\frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r))}.$$

Inoltre, per il Teorema della divergenza si ha

$$\int_{\partial B(x,r)}\Gamma_x(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}d\mathcal{H}^{n-1}=\Gamma(r)\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}d\mathcal{H}^{n-1}=\Gamma(r)\int_{B(x,r)}\Delta u(y)dy.$$

Sostituendo queste informazioni in (3.2.10) si ottiene la formula di Stokes (3.2.9). □

CAPITOLO 4

Formule di media e Principio del Massimo

1. Formule di media

TEOREMA 4.1.1 (Formule di media). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un aperto e sia $u \in C^\infty(\Omega)$ una funzione armonica. Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset\subset \Omega$ risulta*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) d\mathcal{H}^{n-1}, \quad u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y) dy. \tag{4.1.1}$$

DIM. Se $\Delta u = 0$ in Ω, dalla formula di Stokes (3.2.9) si ottiene la formula di media di superficie

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Integrando in t fra 0 e r l'identità

$$n\omega_n t^{n-1} u(x) = \int_{\partial B(x,t)} u(y) d\mathcal{H}^{n-1} + n\omega_n t^{n-1} \int_{B(x,t)} \big(\Gamma_x(y) - \Gamma(t)\big) \Delta u(y) dy,$$

si trova l'ulteriore variante della formula di Stokes

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y) dy + \frac{n}{r^n} \int_0^r t^{n-1} \int_{B(x,t)} \big(\Gamma_x(y) - \Gamma(t)\big) \Delta u(y) \, dy \, dt, \tag{4.1.2}$$

e se $\Delta u = 0$ si ottiene la formula di media di volume. □

DEFINIZIONE 4.1.2. Diciamo che una funzione $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ha la proprietà della media se per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset\subset \Omega$ si ha

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y) \, dy. \tag{4.1.3}$$

Le funzioni con la proprietà della media sono continue perchè la funzione a destra in (4.1.3) è continua nella variabile x. Per il Teorema 4.1.1 le funzioni armoniche hanno la proprietà della media. Vale anche il viceversa:

TEOREMA 4.1.3 (Koebe). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ una funzione con la proprietà della media in Ω. Allora u è armonica in Ω.*

La dimostrazione è nel Capitolo 9.

2. Funzioni subarmoniche e superarmoniche

DEFINIZIONE 4.2.4 (Funzioni sub- e superarmoniche). Diciamo che una funzione $u \in C(\Omega)$ è subarmonica in Ω se per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset\subset \Omega$

si ha

$$u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy. \tag{4.2.4}$$

Indichiamo con $\mathrm{Sub}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni subarmoniche in Ω.

Diciamo che una funzione $u \in C(\Omega)$ è superarmonica in Ω se $-u \in \mathrm{Sub}(\Omega)$. Indichiamo con $\mathrm{Sup}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni superamoniche in Ω.

Osservazione 4.2.5. Elenchiamo alcune proprietà delle funzioni subarmoniche.

1) L'insieme $\mathrm{Sub}(\Omega)$ è chiuso rispetto alla somma di funzioni e alla moltiplicazione per scalari non negativ.
2) $\mathrm{Sub}(\Omega)$ è chiuso rispetto alla convergenza uniforme sui compatti.
3) $\mathrm{Sub}(\Omega)$ è chiuso rispetto all'operazione di massimo.

Dim. Siano, infatti, $u_1, u_2 \in \mathrm{Sub}(\Omega)$ e consideriamo la funzione $v(x) = \max\{u_1(x), u_2(x)\}$. Dalle disuguaglianze

$$u_i(x) \leq \fint_{B(x,r)} u_i(y)\, dy \leq \fint_{B(x,r)} v(y)\, dy, \qquad i = 1, 2,$$

si deduce che

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v(y)\, dy.$$

□

4) Se $u \in C^2(\Omega)$ sono equivalenti: i) $u \in \mathrm{Sub}(\Omega)$; ii) $\Delta u \geq 0$ in Ω.

Dim. ii)⇒ i) Supponiamo che sia $\Delta u \geq 0$ in Ω e sia $B(x,r) \subset\subset \Omega$. Allora sia ha

$$\frac{n}{r^n} \int_0^r t^{n-1} \int_{B(x,t)} \big(\Gamma_x(y) - \Gamma(t)\big) \Delta u(y)\, dy\, dt \leq 0,$$

in quanto $\Gamma_x(y) - \Gamma(t) \leq 0$ per $|x-y| \leq t$. Dalla formula di Stokes (4.1.2) segue che

$$u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u(y) dy.$$

L'implicazione i)⇒ ii) si prova in modo analogo. □

3. Principio del Massimo per le funzioni subarmoniche

Teorema 4.3.6 (Principio del Massimo forte). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $u \in \mathrm{Sub}(\Omega)$. Se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \max_{x\in\Omega} u(x)$ allora $u(x) = u(x_0)$ per ogni $x \in \Omega$.*

Dim. Consideriamo l'insieme $\Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\} \neq \emptyset$. Se proviamo che Ω_0 è sia aperto che chiuso relativamente ad Ω, allora per connessione si trova $\Omega_0 = \Omega$.

Poichè u è continua, Ω_0 è chiuso in Ω. Mostriamo che Ω_0 è aperto. Siano $x \in \Omega_0$ ed $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset \Omega$. Per la proprietà di sottomedia

$$0 = u(x) - u(x_0) \leq \fint_{B(x,r)} \big(u(y) - u(x_0)\big) dy. \tag{4.3.5}$$

D'altra parte vale $u(y)-u(x_0) \le 0$ per ogni $y \in B(x,r)$, e quindi l'integrale in (4.3.5) è nullo. Deve dunque essere $u(y) = u(x_0)$ per ogni $y \in B(x,r)$ ovvero $B(x,r) \subset \Omega_0$. $\square$

Il Principio del Massimo debole vale, in particolare, per le funzioni armoniche.

COROLLARIO 4.3.7. *Sia Ω un aperto connesso e siano $u, v \in C^\infty(\Omega)$ due funzioni armoniche tali che $u(x) \ge v(x)$. Se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = v(x_0)$, allora $u = v$.*

TEOREMA 4.3.8 (Principio del Massimo debole). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $u \in \mathrm{Sub}(\Omega)$. Se per ogni $y \in \partial\Omega$ si ha*

$$\limsup_{x \to y} u(x) \le 0, \tag{4.3.6}$$

allora $u(x) \le 0$ per ogni $x \in \Omega$.

Premettiamo alla dimostrazione del Teorema 4.3.8 il seguente lemma.

LEMMA 4.3.9 (Weierstrass). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $u : \Omega \to \mathbb{R}$, allora esiste un punto $x_0 \in \bar{\Omega}$ tale che per ogni $r > 0$*

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in B(x_0,r) \cap \Omega} u(x). \tag{4.3.7}$$

DIM. Supponiamo per assurdo che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ esista un raggio $r_x > 0$ tale che $\sup_\Omega u > \sup_{B(x,r_x)\cap\Omega} u$. La famiglia di palle aperte $\{B(x,r_x) : x \in \bar{\Omega}\}$ forma un ricoprimento aperto di $\bar{\Omega}$, che è compatto. Dunque, esiste un numero finito di palle $B_i = B(x_i, r_{x_i})$, $i = 1, ..., k$, tale che $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^k B_i$, e quindi

$$\sup_\Omega u = \max_{i=1,\dots,k} \sup_{B_i \cap \Omega} u.$$

Questo è assurdo, in quanto $\sup_{B_i\cap\Omega} u < \sup_\Omega u$ per ogni $i = 1, ..., k$. $\square$

DIM. DEL TEOREMA 4.3.8. Senza perdere di generalità possiamo supporre che Ω sia connesso. Sia $x_0 \in \bar{\Omega}$ un punto tale che valga la (4.3.7) per ogni $r > 0$. Ci sono due casi: 1) $x_0 \in \Omega$; 2) $x_0 \in \partial\Omega$.

Se $x_0 \in \Omega$, allora dalla continuità di u segue che

$$u(x_0) = \lim_{r \downarrow 0} \sup_{x \in B(x_0,r)} u(x) = \sup_{x \in \Omega} u(x),$$

e quindi $u(x_0) = \max_{x\in\Omega} u(x)$. Il Principio del Massimo forte implica che $u(x) = u(x_0)$ per ogni $x \in \Omega$. Dall'ipotesi (4.3.6) segue che $u(x_0) \le 0$ e il teorema è provato.

Supponiamo che $x_0 \in \partial\Omega$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $x_k \in B(x_0, 1/k)$ tale che $u(x_k) \ge \sup_\Omega u - \varepsilon$. Poichè $x_k \to x_0 \in \partial\Omega$ per $k \to +\infty$, dalla (4.3.6) si deduce che

$$0 \ge \limsup_{k\to\infty} u(x_k) \ge \sup_{x\in\Omega} u(x) - \varepsilon.$$

Dunque, si trova $\sup_\Omega u \le \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ che implica $u \le 0$ in Ω. $\square$

ESEMPIO 4.3.10. Per aperti illimitati il Principio del Massimo debole può non valere. Siano ad esempio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ e $u(x,y) = xy$. La funzione u è armonica in $\mathbb{R}^2$ (in particolare è subarmonica) e inoltre $u = 0$ su $\partial\Omega$. Tuttavia $u > 0$ in Ω.

OSSERVAZIONE 4.3.11. La Definizione 4.2.4 di funzione subarmonica può essere generalizzata richiedendo che $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ verifichi:

i) $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$;

ii) u è semicontinua superiormente in Ω: $\limsup_{y\to x} u(y) \le u(x)$ per ogni $x \in \Omega$;

iii) Proprietà della sottomedia (4.2.4).

Il Principio del Massimo forte e debole continuano a valere per questa classe più ampia di funzioni subarmoniche.

4. Problema di Dirichlet. Unicità della soluzione

PROPOSIZIONE 4.4.12. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ una funzione armonica tale che $u = 0$ su $\partial\Omega$. Allora $u = 0$ in Ω.*

DIM. Infatti per il Principio del Massimo debole risulta sia $u \le 0$ che $-u \le 0$ in Ω. □

Data una funzione continua $\varphi \in C(\partial\Omega)$ (il "dato al bordo"), il Problema di Dirichlet consiste nel trovare una funzione $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{4.4.8}$$

L'esistenza di soluzioni è studiata nel Capitolo 12.

PROPOSIZIONE 4.4.13. *Supponiamo che il Problema di Dirichlet* (4.4.8) *abbia una soluzione. Allora essa è unica e inoltre*

$$\max_{x\in\bar\Omega} |u(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |\varphi(x)|.$$

DIM. Se $u, v \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ sono due soluzioni, allora la funzione $u - v$ è armonica in Ω e nulla al bordo. Dunque per la Proposizione 4.4.12 si ha $u - v = 0$ in Ω. Dalle disuguaglianze

$$-\max_{\partial\Omega} |\varphi| \le u(x) \le \max_{\partial\Omega} |\varphi|$$

che valgono per $x \in \partial\Omega$ si deducono con il Principio del Massimo debole le stesse disuguaglianze per $x \in \Omega$. □

PROPOSIZIONE 4.4.14. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

i) $u \in \mathrm{Sub}(\Omega)$;

ii) per ogni palla $B \subset\subset \Omega$, detta $h \in C^\infty(B) \cap C(\bar B)$ la soluzione del Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } B \\ u_{|\partial B} = u, \end{cases} \tag{4.4.9}$$

si verifica $u \le h$ in B.

DIM. i)$\Rightarrow$ii) Se $u \in \mathrm{Sub}(\Omega)$ e h è come nell'enunciato, allora $u - h \in \mathrm{Sub}(B)$ e poichè $u = h$ su ∂B dal Principio del Massimo debole segue che $u - h \le 0$ in B.

ii)$\Rightarrow$i) Siano $x \in \Omega$ ed $r > 0$ tali che $B(x,r) \subset\subset \Omega$. Sia h la soluzione del Problema (4.4.9) con $B = B(x,r)$. Allora

$$u(x) \le h(x) = \fint_{\partial B(x,r)} h(y)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1},$$

e con un'integrazione in r si ottiene la proprietà di sottomedia. Abbiamo, di passaggio, ottenuto anche la proprietà di sottomedia sferica per le funzioni subarmoniche. $\square$

CAPITOLO 5

Principio del Massimo per operatori ellittici

1. Operatori ellittici ed ellittico-parabolici

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$, delle funzioni. Consideriamo l'operatore differenziale lineare del secondo ordine

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i + c(x). \tag{5.1.1}$$

Indichiamo la matrice dei coefficienti della parte del secondo ordine con

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}.$$

Nel caso $A = I_n$, $b = (b_1, ..., b_n) = 0$ e $c = 0$ si trova l'operatore di Laplace $\mathcal{L} = \Delta$.

Definizione 5.1.1 (Operatore ellittico). L'operatore $\mathcal{L}$ si dice di tipo ellittico-parabolico (o ellittico degenere) in Ω se la matrice A è (simmetrica e) semidefinita positiva in tutti i punti $x \in \Omega$, e precisamente

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = \langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq 0, \quad x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1.2}$$

L'operatore $\mathcal{L}$ si dice ellittico in Ω se la matrice A è simmetrica ed esiste una costante $\lambda > 0$ tale che

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \lambda|\xi|^2, \quad x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1.3}$$

L'operatore $\mathcal{L}$ si dice uniformemente ellittico in Ω se la matrice A è simmetrica ed esistono due costanti $0 < \lambda \leq \Lambda$ tali che

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2, \quad x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1.4}$$

L'operatore di Laplace è uniformemente ellittico con $\lambda = \Lambda = 1$ su qualsiasi aperto.

Teorema 5.1.2 (Principio del Massimo debole). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $\mathcal{L}$ un operatore ellittico-parabolico in Ω tale che:*

i) *$c \leq 0$ in Ω.*
ii) *Esiste una funzione $w \in C^2(\Omega)$ tale che $\mathcal{L}w > 0$ e $w < 0$ in Ω.*

Allora

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}u \geq 0 \text{ in } \Omega \\ \limsup\limits_{y \to x \in \partial\Omega} u(y) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u \leq 0 \text{ in } \Omega \tag{5.1.5}$$

per ogni funzione $u \in C^2(\Omega)$.

DIM. Supponiamo preliminarmente che sia $\mathcal{L}u > 0$ in Ω. Per il Lemma di Weierstrass esiste $x_0 \in \bar{\Omega}$ tale che per ogni $r > 0$

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\Omega\cap B(x_0,r)} u(x).$$

Caso 1): $x_0 \in \Omega$. Poichè x_0 è un punto di massimo interno si ha $\nabla u(x_0) = 0$ e $\nabla^2 u(x_0) \leq 0$, dove $\nabla^2 u$ è la matrice Hessiana di u. Dunque, abbiamo

(5.1.6)

$$0 < \mathcal{L}u(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) + c(x_0)u(x_0) = \mathrm{tr}\big(A(x_0)\nabla u(x_0)\big) + c(x_0)u(x_0).$$

Ricordiamo che se A, B sono due matrici $n \times n$ (simmetriche e) semidefinite positive allora $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$. Infatti, posto $(d_{ij}) = D = \sqrt{B}$, si ha $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}d_{kj}$, e quindi

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} A_{(i)}B^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}d_{ik}d_{jk} \geq 0.$$

Nel caso in esame, abbiamo $A \geq 0$ e $B = -\nabla^2 u(x_0) \geq 0$ e quindi

$$\mathrm{tr}\big(A(x_0)\nabla^2 u(x_0)\big) \leq 0.$$

Dalla (5.1.6) si deduce che $c(x_0)u(x_0) > 0$. Per l'ipotesi i), deve essere $u(x_0) < 0$. Questo prova che $u(x) < 0$ per ogni $x \in \Omega$.

Caso 2): $x_0 \in \partial\Omega$. In questo caso si trova direttamente

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \limsup_{x\to x_0} u(x) \leq 0.$$

Supponiamo ora che sia $\mathcal{L}u \geq 0$ in Ω. La funzione $u(x) + \varepsilon w(x)$ con $\varepsilon > 0$ verifica le ipotesi della prima parte della dimostrazione:

$$\mathcal{L}(u + \varepsilon w) = \mathcal{L}u + \varepsilon\mathcal{L}w > 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{y\to x\in\partial\Omega}(u(y) + \varepsilon w(y)) \leq 0.$$

Dunque $u + \varepsilon w \leq 0$ in Ω, e data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ottiene $u \leq 0$ in Ω. $\square$

OSSERVAZIONE 5.1.3. Supponiamo che $a_{11}(x) > \delta > 0$ per ogni $x \in \Omega$ e che b_1, c siano limitati in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. La funzione $w \in C^2$

$$w(x) = e^{-\lambda x_1} - M$$

verifica $\mathcal{L}w > 0$ e $w < 0$ in Ω, pur di scegliere $\lambda, M \in \mathbb{R}^+$ sufficientemente grandi. Infatti

$$\mathcal{L}w(x) = \big(\lambda^2 a_{11}(x) - \lambda b_1(x) + c(x)\big)e^{-\lambda x_1} - Mc(x).$$

COROLLARIO 5.1.4. *Sia $\mathcal{L}$ un operatore di tipo ellittico-parabolico in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ che verifica le ipotesi Teorema 5.1.2. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una funzione tale che $\mathcal{L}u = 0$ in Ω. Allora*

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |u(x)|.$$

In particolare, se il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 \text{ in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \in C(\partial\Omega), \end{cases}$$

ha soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, allora essa è unica.

2. Lemma di Hopf. Principio del Massimo forte

DEFINIZIONE 5.2.5 (Sfera interna). Un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ha la proprietà della sfera interna in un punto $x_0 \in \partial\Omega$ se esistono $x \in \Omega$ ed $r > 0$ tali che $B(x,r) \subset \Omega$ e $\partial B(x,r) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$. Chiamiamo il vettore $\nu = \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$ normale interna a $\partial\Omega$ in x_0.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto di classe C^2 allora ogni punto del bordo ha la proprietà della sfera interna (Esercizio).

TEOREMA 5.2.6 (Lemma di Hopf). *Sia Ω un aperto con la proprietà della sfera interna in $x_0 \in \partial\Omega$. Sia $\mathcal{L}$ un operatore ellittico in Ω con b_i, a_{ij} limitati e $c = 0$. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ una funzione tale che:*
i) *$\mathcal{L}u \geq 0$ in Ω;*
ii) *$u(x) < u(x_0)$ per ogni $x \in \Omega$.*
Allora si ha

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} < 0,$$

dove ν è una normale interna a $\partial\Omega$ in x_0.

DIM. Siano $y \in \Omega$ ed $r > 0$ tali che $B(y,r) \subset \Omega$ e $\partial B(y,r) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$. Consideriamo la funzione

$$v(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha r^2},$$

con $\alpha > 0$ parametro da discutere. Si calcolano le derivate parziali

$$\begin{aligned} \partial_j v &= -2\alpha e^{-\alpha|x-y|^2}(x_j - y_j), \\ \partial_{ij} v &= -2\alpha\Big[-2\alpha(x_j - y_j)(x_i - y_i) + \delta_{ij}\Big]e^{-\alpha|x-y|^2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}v + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j v \\ &= e^{-\alpha|x-y|^2}\big[4\alpha^2\langle A(x-y),(x-y)\rangle - 2\alpha(\mathrm{tr}(A) + \langle b, x-y\rangle)\big], \end{aligned}$$

dove $A = (a_{ij})$ e $b = (b_1, ..., b_n)$ dipendono da x. Se $|x-y| \geq \varrho > 0$, allora dalla condizione di ellitticità (5.1.3) si ha

$$\langle A(x-y),(x-y)\rangle \geq \lambda|x-y|^2 \geq \lambda\varrho^2,$$

e siccome $\mathrm{tr}(A) + \langle b, x-y\rangle$ è limitata per $x \in \Omega$, è possibile fissare $\alpha > 0$ tale che $\mathcal{L}v(x) > 0$ per $x \in \Omega$ con $|x-y| > \varrho$.

Consideriamo l'anello $\Omega_0 = \big\{x \in \Omega : \varrho < |x-y| < r\big\}$ e per $\varepsilon > 0$ sia $w(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)$. Abbiamo le seguenti proprietà:
(i) $\mathcal{L}w = \mathcal{L}u + \varepsilon\mathcal{L}v > 0$ in Ω_0.

(ii) Se $|x-y|=r$, allora $w(x)=u(x)-u(x_0)\leq 0$, perchè x_0 è un punto di massimo per u.

(iii) Se $|x-y|=\varrho$ allora $w(x)=u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)\leq 0$ pur di prendere $\varepsilon>0$ sufficientemente piccolo. Questo è possibile perchè x_0 è un punto di massimo stretto.

Dal Principio del Massimo debole segue che $w\leq 0$ in Ω_0, ovvero

$$u(x)-u(x_0)\leq -\varepsilon v(x),\quad x\in\Omega_0.$$

Quindi, detta $\nu=\frac{y-x_0}{|y-x_0|}$ la normale interna a $\partial\Omega$ in x_0, si ha

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial\nu}=\lim_{t\to 0^+}\frac{u(x_0+t\nu)-u(x_0)}{t}\leq -\varepsilon\lim_{t\to 0^+}\frac{v(x_0+t\nu)}{t}=-2\varepsilon\alpha r e^{-\alpha r^2}<0.$$

□

Teorema 5.2.7 (Principio del Massimo forte). *Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $\mathcal{L}$ un operatore ellittico in Ω con b_i, a_{ij} limitati e $c=0$. Sia $u\in C^2(\Omega)$ una funzione tale che $\mathcal{L}u\geq 0$ in Ω. Se esiste $x_0\in\Omega$ tale che $u(x_0)=\max_{x\in\Omega}u(x)$, allora $u(x)=u(x_0)$ per ogni $x\in\Omega$.*

Dim. L'insieme $\Omega_0=\big\{x\in\Omega : u(x)<u(x_0)\big\}$ è aperto perchè u è continua. Supponiamo per assurdo che $\Omega_0\neq\emptyset$. Essendo Ω connesso, si ha $\partial\Omega_0\cap\Omega\neq\emptyset$. Infatti, se così non fosse allora

$$\Omega=\Omega_0\cup\Omega\setminus\Omega_0=\Omega_0\cup\Omega\setminus\bar{\Omega}_0,$$

ed Ω sarebbe l'unione di due aperti disgiunti.

Esistono un punto $y\in\Omega_0$ ed $r>0$ tali che $B(y,r)\subset\Omega_0$ e $\partial B(y,r)\cap\partial\Omega_0=\{x_1\}$ per un certo $x_1\in\Omega$. Poichè $u(x_0)=u(x_1)$, si ha $\nabla u(x_1)=0$. D'altra parte, $u(x_1)>u(x)$ per ogni $x\in B(y,r)$ e $\mathcal{L}u\geq 0$ in $B(y,r)$. Il Lemma di Hopf implica che

$$\langle\nabla u(x_1),\nu\rangle=\frac{\partial u(x_1)}{\partial\nu}<0,$$

dove $\nu=\frac{y-x_1}{|y-x_1|}$ è la normale interna ad Ω_0 in $x_1\in\partial\Omega_0$. Questo non è possibile.

□

Osservazione 5.2.8 (Operatori in forma di divergenza). Sia $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice di coefficienti in Ω tale che $a_{ij}\in C^1(\Omega)$. Un operatore $\mathcal{L}$ della forma

$$\mathcal{L}u=\operatorname{div}(A\nabla u)=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\tag{5.2.7}$$

si dice in forma di divergenza. Se la matrice A è simmetrica e verifica la condizione di ellitticità (5.1.3), l'operatore $\mathcal{L}$ si dice ellittico. Sviluppando la derivata del prodotto in (5.2.7) si ottiene un operatore della forma (5.1.1) con $c=0$.

Un operatore ellittico $\mathcal{L}$ in forma di divergenza tale che a_{ij} e le loro derivate sono limitate in Ω verifica sia il Lemma di Hopf che il Principio del Massimo forte.

3. Cenni di teoria della regolarità

DEFINIZIONE 5.3.9 (Soluzione debole). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, ..., n$, ed $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$. Una funzione $u \in H^1(\Omega)$ si dice soluzione debole dell'equazione

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

se per ogni $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ si verifica

$$\int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla\varphi(x)\rangle \, dx = 0.$$

Il problema della regolarità (all'interno) consiste nel provare che una soluzione debole di un equazione differenziale alle derivate parziali ha, sotto determinate ipotesi, un guadagno di regolarità. Ad esempio[1]:

TEOREMA 5.3.10. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, sia $A = (a_{ij})$ una matrice ellittica in Ω con $a_{ij} \in C^\infty(\Omega)$. Se $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole dell'equazione* $\operatorname{div}(A\nabla u) = 0$ *in Ω allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Il principale teorema di regolarità per equazioni alle derivate parziali ellittiche è dovuto ad E. De Giorgi e J. Nash.

TEOREMA 5.3.11 (De Giorgi-Nash-Moser). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $A = (a_{ij})$ una matrice ellittica in Ω con $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Se $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole dell'equazione* $\operatorname{div}(A\nabla u) = 0$ *in Ω, allora per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste* $0 < \alpha \leq 1$ *tale che*

$$\sup_{x,y\in K,\, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

Si veda ad esempio E. De Giorgi, *Selected Papers,* Springer 2005, p. 179.

[1] Cfr. L. C. Evans, *Partial Differential Equations,* AMS 1998, Sez. 6.3.

CAPITOLO 6

Disuguaglianza di Harnack

1. Disuguaglianza di Harnack

TEOREMA 6.1.1 (Disuguaglianza di Harnack). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\sup_K u \le C \inf_K u \tag{6.1.1}$$

per ogni funzione armonica $u \in C^\infty(\Omega)$ positiva.

DIM. Proviamo preliminarmente che per ogni funzione armonica u positiva in Ω e per ogni palla $B = B(\bar{x}, r)$, $r > 0$, tale che $B(\bar{x}, 4r) \subset \Omega$ si ha

$$\sup_B u \le 3^n \inf_B u. \tag{6.1.2}$$

Se, infatti, $x, y \in B$ allora $B(x, r) \subset B(y, 3r) \subset B(\bar{x}, 4r) \subset \Omega$, e dunque dalle formule di media

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(z)dz \le \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(y,3r)} u(z)dz = 3^n \fint_{B(y,r)} u(z)dz = u(y).$$

Prendendo estremo superiore per $x \in B$ ed estremo inferiore per $y \in B$ si ottiene la (6.1.2).

Definiamo la funzione $S : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty]$

$$S(x, y) = \sup \left\{ \frac{u(x)}{u(y)} : u \in C^\infty(\Omega) \text{ armonica e } u > 0 \text{ in } \Omega \right\}.$$

Vogliamo provare che $S(x, y) < +\infty$ per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$. Fissato $y \in \Omega$, sia $\Omega_y = \big\{x \in \Omega : S(x, y) < +\infty\big\}$. Sicuramente $\Omega_y \ne \emptyset$, in quanto $y \in \Omega_y$. Proviamo che Ω_y è aperto. Sia $x \in \Omega_y$, ovvero $u(x) \le Cu(y)$ per una costante finita $C > 0$ e per tutte le funzioni armoniche $u \in C^\infty(\Omega)$, $u > 0$. Preso $r > 0$ sufficientemente piccolo, per la (6.1.2) si ha

$$\sup_{z \in B(x,r)} u(z) \le 3^n \inf_{z \in B(x,r)} u(z) \le 3^n u(x) \le 3^n C u(y),$$

e unque $B(z, r) \subset \Omega_y$. Quindi Ω_y è un insieme aperto.

Proviamo che Ω_y è un insieme chiuso in Ω. Siano $x_k \in \Omega_y$, $k \in \mathbb{N}$, punti tali che $x_k \to x \in \Omega$ per $k \to +\infty$. Preso $r > 0$ sufficientemente piccolo, si ha $x_k \in B(x, r)$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, con $u(x_k) \le Cu(y)$. Dunque:

$$u(x) \le 3^n \inf_{z \in B(x,r)} u(z) \le 3^n u(x_k) \le 3^n C u(y),$$

e quindi $x \in \Omega_y$. Essendo Ω_y non vuoto, aperto e chiuso deve essere $\Omega_y = \Omega$. Siccome $y \in \Omega$ è generico, questo prova che $S(x, y) < +\infty$ per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$.

Se $K \subset \Omega$ è un insieme compatto, allora $K \times K$ è un insieme compatto in $\Omega \times \Omega$. Sia $d = \mathrm{dist}(K; \partial\Omega)$ e sia $0 < r < d/4$. Esistono finite coppie di punti $(x_i, y_i) \in K \times K$, $i = 1, ..., m$, tali che

$$K \times K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r) \times B(y_i, r).$$

Dati $x, y \in K \times K$ avremo $x \in B(x_i, r)$ e $y \in B(y_i, r)$ per qualche $i = 1, ..., m$. Dalla (6.1.2) si ottiene

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leq 9^n \frac{u(x_i)}{u(y_i)} \leq 9^n S(x_i, y_i) \leq 9^n \max\big\{S(x_i, y_i) : i = 1, ..., m\big\}.$$

□

2. Principio di Harnack

TEOREMA 6.2.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni armoniche convergente uniformemente sui compatti ad una funzione u. Allora u è armonica in Ω.*

DIM. La funzione u è continua in Ω. Siano $x \in \Omega$ e $0 < r < \mathrm{dist}(x; \partial\Omega)$. Grazie alla convergenza uniforme è possibile passare al limite sotto al segno di integrale nelle formule di media:
(6.2.3)

$$u(x) = \lim_{k \to +\infty} u_k(x) = \lim_{k \to +\infty} \fint_{B(x,r)} u_k(y) dy = \fint_{B(x,r)} \lim_{k \to +\infty} u_k(y) dy = \fint_{B(x,r)} u(y) dy.$$

Quindi u ha la proprietà della media in Ω e per il Teorema di Koebe u è armonica. □

TEOREMA 6.2.3 (Principio di Harnack). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $u_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, una successione crescente di funzioni armoniche. Se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u_k(x_0)$ converge per $k \to +\infty$ ad un valore finito, allora u_k converge uniformemente sui compatti ad una funzione armonica.*

DIM. Poichè la tesi riguarda compatti, non è restrittivo supporre $u_k > 0$ in Ω per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia $K \subset \Omega$ un compatto contenente x_0. Per la disuguaglianza di Harnack esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in K} u_k(x) \leq C \inf_{x \in K} u_k(x) \leq C u_k(x_0).$$

Siccome la successione è crescente, segue che $u_k(x)$ converge per ogni $x \in K$ (e quindi su tutto Ω) ad una funzione $u(x)$. Dal Teorema della convergenza monotona segue, come in (6.2.3), che u verifica la proprietà della media, e dunque è armonica.

Ora ci sono due casi. Caso 1: esistono $\bar{x} \in \Omega$ e $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tali che $u(\bar{x}) = u_{\bar{k}}(\bar{x})$. Allora $u = u_k$ per ogni $k \geq \bar{k}$.

Caso 2: $u(x) > u_k(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$. In questo caso, per la disuguaglianza di Harnack abbiamo la maggiorazione

$$\sup_{x \in K} \big(u(x) - u_k(x)\big) \leq C\big(u(x_0) - u_k(x_0)\big),$$

da cui segue che la convergenza è uniforme sui compatti. □

CAPITOLO 7

Analiticità delle funzioni armoniche

1. Stime di Cauchy

Un vettore di interi non negativi $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ si dice multi-indice. Il peso di un multi-indice è $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, ed inoltre si pone $\alpha! = \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!$.

L'operatore di derivazione ∂^α in $\mathbb{R}^n$ associato ad un multi-indice α è definito nel seguente modo:

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n},$$

dove $\partial_i = \partial/\partial x_i$ è l'operatore di derivazione parziale nella direzione i-esima.

TEOREMA 7.1.1 (Stime di Cauchy). *Sia Ω una aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in C^\infty(\Omega)$ una funzione armonica. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ si ha*

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha u(x)| \leq \Big(\frac{n|\alpha|}{d}\Big)^{|\alpha|} \sup_{x\in\Omega} |u(x)|, \tag{7.1.1}$$

dove $d = \mathrm{dist}(K; \partial\Omega)$.

DIM. La funzione $\partial_i u$ è armonica per ogni $i = 1, ..., n$. Per le formule di media con notazione vettoriale, si ha per ogni $x \in K$ e per ogni raggio $0 < r < d$

$$\nabla u(x) = \fint_{B(x,r)} \nabla u(y) dy = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\nu(y) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

La seconda disuguaglianza segue dal Teorema della divergenza. Dunque, per ogni $i = 1, ..., n$ abbiamo

$$|\partial_i u(x)| \leq |\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r)) \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \frac{n}{r} \sup_{x\in\Omega} |u(x)|,$$

e con $r \to d$ si ottiene

$$\sup_{x\in K} |\partial_i(x)| \leq \frac{n}{d} \sup_{x\in\Omega} |u(x)|, \tag{7.1.2}$$

che è la (7.1.1) per $|\alpha| = 1$.

Proviamo il caso generale. Le funzioni $\partial^\alpha u$ sono armoniche in Ω per ogni α. Per $i = 1, ..., |\alpha|$ consideriamo gli insiemi aperti

$$\Omega_i = \Big\{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x; K) < \frac{id}{|\alpha|}\Big\},$$

e osserviamo che $\mathrm{dist}(\Omega_i; \partial\Omega_{i+1}) = d/|\alpha|$. Siano $K_0 = K$ e $K_i = \bar{\Omega}_i$ per $i = 1, ..., |\alpha| - 1$. Usiamo la disuguaglianza (7.1.2) $|\alpha|$ volte sugli insiemi K_i e Ω_{i+1} per $i = 0, 1, ..., |\alpha| - 1$ togliendo ad ogni passo una derivata. Si ottiene la (7.1.1).

$\square$

2. Analiticità delle funzioni armoniche

TEOREMA 7.2.2. *Le funzioni armoniche sono analitiche reali.*

DIM. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u \in C^\infty(\Omega)$ una funzione armonica. Siano $x_0 \in \Omega$ ed $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$. Verifichiamo che lo sviluppo di Taylor di u con centro x_0 converge ad u uniformemente in $B(x_0, \varrho)$ per qualche $\varrho > 0$.

Per ogni $p \in \mathbb{N}$ abbiamo lo sviluppo di Taylor

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \le p} \frac{\partial^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha + R_p(x, x_0), \tag{7.2.3}$$

dove

$$R_p(x, x_0) = \sum_{|\alpha| = p+1} \frac{\partial^\alpha u(y)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha \tag{7.2.4}$$

è il resto p-esimo, con $y \in [x, x_0]$.

Scegliamo $\varrho < r/2$, e prendiamo $x \in B(x_0, \varrho)$. Allora $y \in B(x_0, r/2)$ e per il Teorema 7.1.1 con $d = \frac{r}{2}$ si ha

$$|\partial^\alpha u(y)| \le \Big(\frac{2n|\alpha|}{r}\Big)^{|\alpha|} \sup_{z \in B(x_0, r)} |u(z)|.$$

Si trova la maggiorazione per il resto

$$\begin{aligned} |R_p(x, x_0)| &= \Big| \sum_{|\alpha| = p+1} \frac{\partial^\alpha u(y)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha \Big| \\ &\le \sum_{|\alpha| = p+1} \frac{|\partial^\alpha u(y)|}{\alpha!}|x - x_0|^{|\alpha|} \\ &\le \Big(\frac{2n(p+1)}{r}\Big)^{p+1} \varrho^{p+1} \sup_{z \in B(x_0, r)} |u(z)| \sum_{|\alpha| = p+1} \frac{1}{\alpha!}. \end{aligned}$$

Mettendo $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$ nella formula generalizzata per il binomio di Newton

$$(x_1 + ... + x_n)^p = \sum_{|\alpha| = p} \frac{p!}{\alpha!} x^\alpha$$

si ottiene l'identità

$$\sum_{|\alpha| = p} \frac{1}{\alpha!} = \frac{n^p}{p!}.$$

In conclusione, si trova la maggiorazione per il resto

$$|R_p(x, x_0)| \le \Big(\frac{2n\varrho(p+1)}{r}\Big)^{p+1} \frac{n^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{z \in B(x_0, r)} |u(z)| := a_p.$$

Ora osserviamo che

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{a_p}{a_{p-1}} = \lim_{p \to +\infty} \frac{2n^2 \varrho}{r} \Big(\frac{p+1}{p}\Big)^p = \frac{2n^2 \varrho}{r} e.$$

Scegliendo $\varrho < \frac{r}{2n^2 e}$, l'ultima quantità è minore strettamente di 1 e quindi

$$\lim_{p \to +\infty} \sup_{x \in B(x_0, \varrho)} |R_p(x, x_0)| = 0.$$

Dunque, la serie di Taylor converge uniformemente ad u in $B(x_0, \varrho)$.

$\square$

CAPITOLO 8

Problema di Dirichlet. Introduzione

1. Funzione di Green e nucleo di Poisson

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una aperto limitato con frontiera di classe C^1. Data una funzione $\varphi \in C(\partial\Omega)$ si considera il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{8.1.1}$$

Alternativamente, data una funzione $f \in C(\bar{\Omega})$ si ha il problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{8.1.2}$$

Per ottenere *formule di rappresentazione* per le soluzioni di tali problemi si considera, per ogni $x \in \Omega$ fissato, il Problema di Dirichlet ausiliario

$$\begin{cases} \Delta_y h_x = 0 & \text{in } \Omega \\ h_{x|\partial\Omega} = \Gamma_x, \end{cases} \tag{8.1.3}$$

dove $\Gamma_x(y) = \Gamma(y-x)$ è la soluzione fondamentale con polo nel punto x.

Ipotesi. Supponiamo che per ogni $x \in \Omega$ esista una soluzione $h_x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ del Problema (8.1.3).

Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ una funzione di classe C^1 fino al bordo. Poichè $\Delta h_x = 0$ in Ω, dalla formula di Green (2.1.11) si trova

$$0 = -\int_\Omega h_x \Delta u \, dy + \int_{\partial\Omega} \Big(h_x \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial h_x}{\partial \nu} \Big) \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Inoltre, essendo $h_x = \Gamma_x$ su $\partial\Omega$, per la formula di Stokes (3.2.5),

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma_x \Delta u \, dy - \int_{\partial\Omega} \Big(h_x \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Gamma_x}{\partial \nu} \Big) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Sommando le due identità si ottiene la formula di rappresentazione

$$u(x) = \int_\Omega \big(\Gamma_x - h_x\big) \Delta u \, dy + \int_{\partial\Omega} u \Big(\frac{\partial h_x}{\partial \nu} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial \nu} \Big) d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{8.1.4}$$

che suggerisce la definizione della funzione di Green e del nucleo di Poisson relativi ad Ω.

Definizione 8.1.1. Nelle ipotesi precedenti, è possibile definire la funzione di Green $G : \Omega \times \Omega \setminus \{x = y\} \to \mathbb{R}$ relativa ad Ω

$$G(x,y) = G_x(y) = \Gamma_x(y) - h_x(y). \tag{8.1.5}$$

Il nucleo di Poisson relativo ad Ω è la funzione $P : \Omega \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$

$$P(x,y) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}, \tag{8.1.6}$$

dove la derivata normale è rispetto alla variabile $y \in \partial\Omega$.

La definizione del nucleo di Poisson, in particolare, presuppone che la funzione di Green sia di classe C^1 fino al bordo. Con le notazioni (8.1.5) e (8.1.6) la formula di rappresentazione (8.1.4) assume la forma

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\Delta u(y)dy + \int_{\partial\Omega} P(x,y)u(y)d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{8.1.7}$$

In particolare, se $u \in C^2(\bar\Omega)$ è soluzione del Problema di Dirichlet (8.1.1), allora $\Delta u = 0$ in Ω e $u = \varphi$ su $\partial\Omega$ e si ottiene la formula di rappresentazione

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y)P(x,y)d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{8.1.8}$$

Se invece $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ è soluzione del Problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{8.1.9}$$

per una unzione $f \in C(\bar\Omega)$, allora si trova la forma di rappresentazione

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy. \tag{8.1.10}$$

Teorema 8.1.2. *Se esiste, la funzione di Green $G : \Omega\times\Omega\setminus\{x = y\} \to \mathbb{R}$ verifica:*
i) *$G(x,y) = G(y,x)$ per ogni $x,y \in \Omega$ con $x \neq y$;*
ii) *$\Delta_x G(x,y) = 0$.*

Dim. Fissiamo due punti distinti $x_1, x_2 \in \Omega$ ed $\varepsilon > 0$ tale che le palle $B(x_1,\varepsilon)$ e $B(x_2,\varepsilon)$ siano contenute in Ω e siano disgiunte. Sia $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon))$. Le due funzioni $G_1(y) = G(x_1,y)$ e $G_2(y) = G(x_2,y)$ sono armoniche su Ω_ε e per l'identità di Green (2.1.12) si ha

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} (G_1\Delta G_2 - G_2\Delta G_1)dy = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Big(G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu} - G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\Big)\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dal momento che G_1 e G_2 sono identicamente nulle su $\partial\Omega$, si ottiene l'identità

$$\int_{\partial B(x_1,\varepsilon)} \Big(G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu} - G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\Big)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial B(x_2,\varepsilon)} \Big(G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu} - G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}\Big)\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Poichè in x_1 la funzione $G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}$ ha una singolarità di ordine ε^{2-n} (e analogamente $G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}$ in x_2), si ottiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B(x_1,\varepsilon)} G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}\, d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B(x_2,\varepsilon)} G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\, d\mathcal{H}^{n-1} = 0,$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B(x_1,\varepsilon)} G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\, d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B(x_2,\varepsilon)} G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dal momento che le funzioni $h(x_1, y)$ e $h(x_2, y)$ sono regolari su tutto Ω si ottiene infine

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x_1,\varepsilon)} G(x_2,y)\frac{\partial\Gamma(x_1-y)}{\partial\nu}\, d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x_2,\varepsilon)} G(x_1,y)\frac{\partial\Gamma(x_2-y)}{\partial\nu}\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

La derivata normale della soluzione fondamentale è un'approssimazione dell'identità sulle superfici (Cfr. (3.2.6) e (3.2.7)), e si ottiene la tesi $G(x_2, x_1) = G(x_1, x_2)$. La ii) è una conseguenza immediata di i). □

2. Problema di Dirichlet nella palla

Determiniamo la funzione di Green e il nucleo di Poisson per una palla in $\mathbb{R}^n$ centrata nell'origine $B = B(0, r)$, con $r > 0$. Dalle espressioni esplicite per questi nuclei si ottiene la formula di rappresentazione per la soluzione del Problema di Dirichlet.

Sia $x \in B$ un punto fissato e cerchiamo una funzione h_x soluzione del Problema di Dirichlet ausiliario

$$\begin{cases} \Delta h_x = 0 \text{ in } B \\ h_{x|\partial B} = \Gamma_x. \end{cases} \tag{8.2.11}$$

Consideriamo l'inversione sferica $x \mapsto I(x) = \bar{x}$

$$I(x) = \frac{r^2}{|x|^2}x, \qquad x \neq 0.$$

L'inversione I trasforma la palla B nel suo complementare lasciando fissa la frontiera ∂B. Se $y \in \partial B$, allora abbiamo le identità

$$\frac{|x-y|^2}{|\bar{x}-y|^2} = \frac{|x|^2 - 2\langle x,y\rangle + r^2}{|\bar{x}|^2 - 2\langle \bar{x},y\rangle + r^2} = \frac{|x|^2 - 2\langle x,y\rangle + r^2}{r^4|x|^{-4}|x|^2 - 2r^2|x|^{-2}\langle x,y\rangle + r^2} = \frac{|x|^2}{r^2},$$

da cui si ottiente la relazione $|x-y| = r^{-1}|x||\bar{x}-y|$. Quindi, per $y \in \partial B$ la soluzione fondamentale Γ_x verifica l'identità

$$\Gamma_x(y) = \Big(\frac{r}{|x|}\Big)^{n-2}\Gamma_{\bar{x}}(y). \tag{8.2.12}$$

Per ogni $x \in B$ con $x \neq 0$ consideriamo la funzione della variabile y

$$h_x(y) = \Big(\frac{r}{|x|}\Big)^{n-2}\Gamma_{\bar{x}}(y).$$

La funzione $y \mapsto h_x(y)$ è definita per $y \neq \bar{x}$ ed in particolare è armonica in B, perchè lo è $\Gamma_{\bar{x}}$. Inoltre, $h_x = \Gamma_x$ su ∂B, per la (8.2.12). In conlcusione h_x è la soluzione del problema (8.2.11).

Dunque, troviamo la funzione di Green per la sfera (per $n \geq 3$)

$$G(x,y) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\Big[\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \Big(\frac{r}{|x|}\Big)^{n-2}\frac{1}{|y-\bar{x}|^{n-2}}\Big]. \tag{8.2.13}$$

Il nucleo di Poisson è (ora $|y| = r$)

$$P(x,y) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu} = \langle\nabla_y G(x,y), \frac{y}{|y|}\rangle,$$

dove

$$\begin{aligned}\nabla_y G(x,y) &= \frac{1}{n\omega_n}\Big[\frac{y-x}{|x-y|^n} - \Big(\frac{r}{|x|}\Big)^{n-2}\frac{y-\bar{x}}{|\bar{x}-y|^n}\Big]\\ &= \frac{1}{n\omega_n}\Big[\frac{y-x}{|x-y|^n} - \Big(\frac{|x|}{r}\Big)^{2}\frac{1}{|x-y|^n}\Big(y-\frac{r^2}{|x|^2}x\Big)\Big]\\ &= \frac{1}{n\omega_n r^2}\frac{r^2-|x|^2}{|x-y|^n}y.\end{aligned}$$

In conclusione, il nucleo di Poisson per la palla $B = B(0,r)$ è

$$P(x,y) = \frac{1}{n\omega_n r}\frac{r^2-|x|^2}{|x-y|^n}. \tag{8.2.14}$$

Elenchiamo alcune proprietà della funzione di Green e del nucleo di Poisson:

i) $G(x,y) = G(y,x)$. Questa proprietà è un fatto generale (Teorema 8.1.2) e nel caso della palla può essere verificata con un conto diretto.
ii) $\Delta_x G(x,y) = 0$. Deriva da i) e dal fatto che $\Delta_y G(x,y) = 0$.
iii) $\Delta_x P(x,y) = 0$. Segue da ii).
iv) $P(x,y) > 0$ per ogni $x \in B$ e $y \in \partial B$.
v) Per ogni $x \in B$ si ha

$$\int_{\partial B} P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 1. \tag{8.2.15}$$

La prova di (8.2.15) è lasciata come esercizio (Cfr. Esercizio 15).

Teorema 8.2.3 (Problema di Dirichlet per la palla). *Sia $B = B(0,r)$ con $r > 0$ e sia $\varphi \in C(\partial B)$. La funzione*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n r}\int_{\partial B(0,r)} \varphi(y)\frac{r^2-|x|^2}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1} \tag{8.2.16}$$

è armonica in B e inoltre $u \in C(\bar{B})$ con $u = \varphi$ su ∂B.

Dim. Siccome è possibile portare le derivate di ogni ordine sotto il segno di integrale in (8.2.16), si trova

$$\Delta_x u(x) = \Delta_x \int_{\partial B(0,r)} \varphi(y) P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial B(0,r)} \varphi(y)\Delta_x P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Abbiamo usato la proprietà iii). Questo prova che u è armonica in B.

Proviamo che per ogni $x_0 \in \partial B$ si ha

$$\lim_{x\to x_0}\int_{\partial B} \varphi(y)P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \varphi(x_0). \tag{8.2.17}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $\delta > 0$ tale che $|\varphi(y)-\varphi(x_0)| \le \varepsilon$ per ogni $y \in \partial B \cap \{|y - x_0| < \delta\}$. Questo è possibile per la continuità di φ. Grazie alla (8.2.15), possiamo trascrivere l'integrale nel seguente modo

$$\int_{\partial B(0,r)} \varphi(y)P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \varphi(x_0) + \int_{\partial B(0,r)} \big(\varphi(y)-\varphi(x_0)\big)P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

L'integrale di bordo su $|y - x_0| < \delta$ si stima nel seguente modo

$$\Big| \int_{\partial B \cap \{|y-x_0|<\delta\}} \big(\varphi(y) - \varphi(x_0)\big) P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1} \Big| \le \int_{\partial B \cap \{|y-x_0|<\delta\}} \big|\varphi(y) - \varphi(x_0)\big| P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$
$$\le \varepsilon \int_{\partial B} P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1} \le \varepsilon.$$

Abbiamo usato il fatto che $P(x,y) > 0$ e la (8.2.15). Questa stima vale indipendentemente da $x \in B$.

L'integrale di bordo su $|y - x_0| \ge \delta$ si stima nel seguente modo

$$\Big| \int_{\partial B \cap \{|y-x_0|\ge\delta\}} \big(\varphi(y) - \varphi(x_0)\big) P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1} \Big| \le \int_{\partial B \cap \{|y-x_0|\ge\delta\}} \big|\varphi(y) - \varphi(x_0)\big| P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$
$$\le 2 \max_{y \in \partial B} |\varphi(y)| \int_{\partial B \cap \{|y-x_0|\ge\delta\}} P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Per il Teorema della convergenza dominata, è possibile passare al limite dentro il seguente integrale e poichè $|x_0| = r$ si trova

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{n\omega_n r} \int_{|y-x_0|\ge\delta} \frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{n\omega_n r} \int_{|y-x_0|\ge\delta} \frac{r^2 - |x_0|^2}{|x_0-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è generico, la (8.2.17) è provata.

□

CAPITOLO 9

Funzioni armoniche in senso distribuzionale

1. Teorema di Koebe

Teorema 9.1.1 (Koebe). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ una funzione con la proprietà della media in Ω. Allora u è armonica in Ω.*

Dim. La funzione u è continua in Ω. Sia $\bar{x} \in \Omega$ e proviamo che u è armonica in un intorno di $\bar{x}$. Sia $B = B(\bar{x}0, r) \subset\subset \Omega$, con $r > 0$ opportunamente piccolo, e sia $v \in C^\infty(B) \cap C(\bar{B})$ la soluzione del Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B \\ v = u & \text{su } \partial B. \end{cases}$$

Questa soluzione esiste per il Teorema 8.2.3. La funzione $u - v$ ha la proprietà della media in B ed è nulla al bordo. Dal Principio del Massimo debole (Teorema 4.3.8) segue che

$$\max_{x \in \bar{B}} |u(x) - v(x)| = \max_{x \in \partial B} |u(x) - v(x)| = 0,$$

e dunque $u = v$ in B. □

2. Soluzioni distribuzionali dell'equazione $\Delta u = 0$

Definizione 9.2.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Una funzione $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si dice armonica in senso distribuzionale in Ω se

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = 0 \tag{9.2.1}$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Teorema 9.2.3. *Sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ una funzione armonica in senso distribuzionale in Ω. Allora, a meno di ridefinire la funzione in un insieme di misura nulla, u è armonica in Ω.*

La dimostrazione del Teorema 9.2.3 richiede alcune premesse sulla tecnica di regolarizzazione. Sia $\chi \in C_0^\infty(B(0,1))$ una funzione tale che:

i) $\chi \geq 0$;

ii) $\chi(x) = \chi(-x)$;

iii) $\|\chi\|_1 = 1$.

Per $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi(x/\varepsilon)$. Si ha $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(B(0,\varepsilon))$ e $\|\chi_\varepsilon\| = 1$.

Definizione 9.2.4 (Regolarizzazione). Data una funzione $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, definiamo la regolarizzazione di Friedrichs (mollificazione)

$$u_\varepsilon(x) = \chi_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Risulta $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e inoltre si hanno le seguenti proprietà di approssimazione[1]:

i) Per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B(\bar{x},r)} |u_\varepsilon(x) - u(x)| dx = 0. \tag{9.2.2}$$

ii) Per ogni punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e per quasi ogni raggio $r > 0$ si ha

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(\bar{x},r)} |u_\varepsilon(x) - u(x)| d\mathcal{H}^{n-1} = 0. \tag{9.2.3}$$

Dimostrazione del Teorema 9.2.3. Senza perdere di generalità supponiamo $\Omega = \mathbb{R}^n$. Vogliamo mostrare che, a meno di modificare la funzione su un insieme di misura nulla, u verifica la proprietà della media in $\mathbb{R}^n$ e quindi è armonica per il Teorema di Koebe.

Fissiamo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$, e consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x-\bar{x}|^2 - r^2 & |x-\bar{x}| < r \\ 0 & |x-\bar{x}| \geq r. \end{cases}$$

Questa funzione non può essere usata come funzione test in (9.2.1) perchè, pur essendo continua con supporto compatto, non è in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sia φ_ε, $\varepsilon > 0$, la sua regolarizzata. Risulta $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e quindi

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta\varphi_\varepsilon(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \chi_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,dy\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y \chi_\varepsilon(y-x)\varphi(y)\,dy\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta_y \chi_\varepsilon(y-x)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\Delta u_\varepsilon(y)\,dy. \end{aligned}$$

Abbiamo usato la proprietà ii) della regolarizzazione $\chi_\varepsilon(x-y) = \chi_\varepsilon(y-x)$. Poi abbiamo usato il Teorema di Fubini-Tonelli per scambiare l'ordine di integrazione. In $B(\bar{x},r)$ la funzione φ è regolare, e quindi abbiamo l'identità

$$\varphi\Delta u_\varepsilon = \operatorname{div}(\varphi\nabla u_\varepsilon) - \operatorname{div}(u_\varepsilon\nabla\varphi) + u_\varepsilon\Delta\varphi,$$

dove $\nabla\varphi(x) = 2(x-\bar{x})$ e $\Delta\varphi(x) = 2n$. Dal Teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned} 0 = \int_{B(\bar{x},r)} \varphi\,\Delta u_\varepsilon\,dx &= \int_{B(\bar{x},r)} \Big\{\operatorname{div}(\varphi\nabla u_\varepsilon) - \operatorname{div}(u_\varepsilon\nabla\varphi) + u_\varepsilon\Delta\varphi\Big\}\,dx \\ &= -\int_{\partial B(\bar{x},r)} u_\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{B(\bar{x},r)} u_\varepsilon\Delta\varphi\,dx \\ &= -2r\int_{\partial B(\bar{x},r)} u_\varepsilon\,d\mathcal{H}^{n-1} + 2n\int_{B(\bar{x},r)} u_\varepsilon\,dx. \end{aligned}$$

Per $\varepsilon \to 0$ (eventualmente scegliendo una opportuna successione $\varepsilon_j \to 0$ per $j \to +\infty$), usando (9.2.2) e (9.2.3) troviamo l'equazione

$$r\int_{\partial B(\bar{x},r)} u\,d\mathcal{H}^{n-1} = n\int_{B(\bar{x},r)} u\,dx = n\psi(r), \tag{9.2.4}$$

[1] Cfr. Evans & Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions,* CRC Press 1992.

che vale per quasi ogni $r > 0$. Il membro di destra è una funzione continua della variabile r, e senza perdere di generalità possiamo supporre che la relazione precedente valga per ogni $r > 0$. La funzione ψ è derivabile rispetto ad r, e precisamente

$$\begin{aligned}\psi'(r) &= \lim_{\delta\to 0+} \frac{1}{\delta} \int_{r<|x-\bar{x}|<r+\delta} u(x)\,dx \\ &= \lim_{\delta\to 0+} \frac{1}{\delta} \int_r^{r+\delta} \int_{|x-\bar{x}|=s} u(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}\,ds = \int_{|x-\bar{x}|=r} u(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

Per il passaggio a coordinate sferiche si può usare la formula di coarea. Quindi ψ è una funzione derivabile con continuità che verifica l'equazione differenziale $r\psi'(r) - n\psi(r) = 0$ che è equivalente a $(r^{-n}\psi(r))' = 0$. Deduciamo che per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ esiste una costante $C(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ che non dipende da $r > 0$ tale che

$$\fint_{B(\bar{x},r)} u(x)\,dx = C(\bar{x}), \quad r > 0.$$

Per il Teorema di differenziazione di Lebesgue, sia ha per quasi ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$C(\bar{x}) = \lim_{r\to 0} \fint_{B(\bar{x},r)} u(x)\,dx = u(\bar{x}).$$

Dunque, a meno di ridefinire u su un insieme di misura nulla ponendola uguale a $C(\bar{x})$, u verifica la proprietà della media. □

OSSERVAZIONE 9.2.5 (Operatori ipoellittici). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto ed $f \in C^\infty(\Omega)$. È possibile dimostrare che una funzione $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ che verifica in senso distribuzionale l'equazione differenziale $\mathcal{L}u = f$ in Ω con $\mathcal{L} = \Delta$ è di classe C^∞. Gli operatori differenziali $\mathcal{L}$ che verificano questa proprietà si dicono ipoellittici.

COROLLARIO 9.2.6. *Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole dell'equazione differenziale $\Delta u = 0$ in Ω. Allora u è armonica in Ω.*

DIM. Se $u \in H^1(\Omega)$ allora $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Inoltre per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha

$$0 = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle dx = -\int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dx.$$

Quindi u è una funzione armonica in senso distribuzionale. □

CAPITOLO 10

Singolarità isolate

1. Teorema di Bôcher

Indichiamo con $B = B(0,1)$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, centrata nell'origine. Vogliamo provare il seguente teorema.

TEOREMA 10.1.1 (Bôcher). *Sia u una funzione armonica positiva in $B \setminus \{0\}$. Allora esistono una funzione armonica v in B e una costante $a \geq 0$ tali che*

$$u(x) = \begin{cases} v(x) - a\log|x| & n = 2, \\ v(x) + a|x|^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases} \tag{10.1.1}$$

COROLLARIO 10.1.2. *Sia $u \in C^\infty(B \setminus \{0\})$ una funzione armonica limitata. Allora esiste una funzione armonica $v \in C^\infty(B)$ tale che $u = v$ su $B \setminus \{0\}$.*

La dimostrazione del Teorema 10.1.1 richiede alcune definizioni e lemmi preliminari.

DEFINIZIONE 10.1.3 (Operatore di media sferica). Sia $u \in C(B \setminus \{0\})$ una funzione continua. La funzione $M(u) : B \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$M(u)(x) = M_u(x) = \fint_{|y|=|x|} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

si dice media sferica di u.

La media sferica verifica le seguenti proprietà:
1) se $|x_1| = |x_2|$ allora $M_u(x_1) = M_u(x_2)$, cioè $M(u)$ è una funzione radiale;
2) $M(M(u)) = M(u)$, cioè la media sferica è un'operazione involutiva;
3) $u \mapsto M(u)$ è lineare;
4) se $u \in C(B \setminus \{0\})$ allora $M(u) \in C(B \setminus \{0\})$;
5) se u è continua allora $M(u) \leq u$ implica $M(u) = u$.

PROPOSIZIONE 10.1.4. *Sia u una funzione armonica in $B \setminus \{0\}$. Allora esistono due costanti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che*

$$M_u(x) = \begin{cases} a\log|x| + b & n = 2, \\ a|x|^{2-n} + b, & n \geq 3. \end{cases} \tag{10.1.2}$$

In particolare, M_u è armonica in $B \setminus \{0\}$.

DIM. Definiamo la funzione $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$\varphi(r) = \fint_{|x|=r} u(x)\, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{n\omega_n}\int_{|y|=1} u(ry)\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Per ottenere la secondo identità si fa il cambiamento di variabile $x = ry$, con cambiamento (formale) delle misure di integrazione $d\mathcal{H}^{n-1}(x) = r^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}(y)$. In altri termini, abbiamo posto $\varphi(r) = M_u(x)$ con $|x| = r$. Ora osserviamo che per $0 < r < 1$ la funzione φ è derivabile e risulta

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n}\int_{|y|=1}\langle\nabla u(ry), y\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{r}\fint_{|x|=r}\langle\nabla u(x), x\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Siano $0 < r < s < 1$ e $\Omega = \{x \in B : r < |x| < s\}$. Dal Teorema della divergenza troviamo

$$0 = \int_\Omega \Delta u(x)dx = \frac{1}{s}\int_{|x|=s}\langle\nabla u(x), x\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} - \frac{1}{r}\int_{|x|=r}\langle\nabla u(x), x\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Quindi $r^{n-1}\varphi'(r)$ è costante per $r \in (0,1)$. Integrando otteniamo la (10.1.2). □

Lemma 10.1.5. *Esiste una costante $C > 1$ tale che per ogni funzione armonica positiva in $B \setminus \{0\}$ si ha*

$$u(y) < Cu(x) \tag{10.1.3}$$

per ogni $0 < |x| = |y| \le 1/2$.

Dim. Sia $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1/2\}$. Per la Disuguaglianza di Harnack (6.1.1), esiste $C > 1$ tale che

$$\sup_{x\in K} u(x) < C \inf_{x\in K} u(x) \tag{10.1.4}$$

per ogni funzioni armonica positiva u in $B\setminus\{0\}$. Dalla (10.1.4) applicata alla funzione $v(x) = u(rx)$ con $0 < r < 1$ si ottiene la tesi. □

Proposizione 10.1.6. *Sia u una funzione armonica positiva in $B \setminus \{0\}$ tale che $u(x) \to 0$ per $|x| \to 1$. Allora esiste una costante $a \ge 0$ tale che*

$$u(x) = \begin{cases} -a\log|x| & n = 2, \\ a(|x|^{2-n} - 1), & n \ge 3. \end{cases} \tag{10.1.5}$$

Dim. È sufficiente provare che $M(u) \le u$, che implica $M(u) = u$ e quindi (10.1.5), per la Proposizione 10.1.4.

Dalla (10.1.3) segue che per $0 < |x| \le 1/2$ si ha

$$M_u(x) = \fint_{|y|=|x|} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1} < Cu(x).$$

Posto $\beta = C^{-1}$, la funzione $v = T(u) = u - \beta M(u)$ verifica le seguenti proprietà:

i) v è armonica in $B \setminus \{0\}$;
ii) $v(x) > 0$ per $0 \le |x| \le 1/2$;
iii) $v(x) \to 0$ per $|x| \to 1$.

Dal principio del Massimo segue che $v > 0$ in $B \setminus \{0\}$. Poniamo $v_1 = v$. Possiamo iterare l'argomento e dire che la funzione $v_2 = T(v_1) = v_1 - \beta M(v_1)$ verifica $v_2 > 0$. Precisamente, abbiamo

$$0 < v_1 - \beta M(v_1) = u - \beta M(u) - \beta M(u - \beta M(u)) = u - (2\beta - \beta^2)M(u).$$

Sia $\varphi(\beta) = 2\beta - \beta^2$ e definiamo la successione ricorsiva $\beta_0 = \beta \in (0,1)$ e $\beta_k = \varphi(\beta_{k-1})$, $k \ge 1$. L'argomento ricorsivo fornisce la disuguaglianza

$$u > \beta_k M(u), \qquad \text{in } B \setminus \{0\},$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. La successione $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente e verifica $\beta_k < 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi $\beta_k \to 1$. Questo prova la tesi.

□

Dimostrazione del Teorema 10.1.1. Senza perdere generalità supponiamo che $u \in C(\bar{B} \setminus \{0\})$. Sia $v \in C^\infty(B) \cap C(\bar{B})$ la soluzione del Problema di Dirichlet $\Delta v = 0$ in B e $v = u$ su ∂B. La funzione $w(x) = u(x) - v(x) + |x|^{2-n} - 1$ verifica le seguenti proprietà:

i) w è armonica in $B \setminus \{0\}$;
ii) $w(x) \to +\infty$ per $|x| \to 0$;
iii) $w(x) \to 0$ per $|x| \to 1$.

Dal Principio del Massimo debole segue che $w > 0$ in $B \setminus \{0\}$. Per la Proposizione 10.1.6, w ha la forma (10.1.5), e quindi u è della forma (10.1.1).

□

CAPITOLO 11

Integrale di Poisson nel semispazio

1. Nucleo di Poisson del semispazio

In $\mathbb{R}^{n+1}$ indichiamo le variabili con $z = (x, y)$ dove $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$. Consideriamo il semispazio $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y > 0\}$.

Fissiamo un punto $z \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ e cerchiamo una funzione $h_z \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta h_z = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ h_z = \Gamma_z & \text{in } \partial\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{11.1.1}$$

dove Γ_z è la soluzione fondamentale con polo z. Defininiamo $\bar{z} = \overline{(x, y)} = (x, -y)$ e osserviamo che

$$\Gamma_z(\zeta) = \Gamma_{\bar{z}}(\zeta) \quad \text{se} \quad \zeta \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+.$$

Se $\zeta = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, allora $\zeta \in \partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ equivale a dire $\eta = 0$. Inoltre $\Gamma_{\bar{z}}$ è armonica in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ e dunque una soluzione del problema (11.1.1) è

$$h_z(\zeta) = \Gamma_{\bar{z}}(\zeta) = \frac{1}{(n+1)\omega_{n+1}(1-n)}|\zeta - \bar{z}|^{1-n}.$$

In analogia alla (8.1.5), definiamo la funzione di Green del semispazio $G : \mathbb{R}^{n+1}_+ \times \mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \{\zeta = z\} \to \mathbb{R}$

$$G(z, \zeta) = \Gamma_z(\zeta) - h_z(\zeta) = \Gamma_z(\zeta) - \Gamma_{\bar{z}}(\zeta),$$

e il nucleo di Poisson $P : \mathbb{R}^{n+1}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$P(z, \xi) = -\frac{\partial G(z, (\xi, 0))}{\partial \eta} = C_n \frac{y}{\big(|x - \xi|^2 + y^2\big)^{(n+1)/2}}, \quad C_n = \frac{2}{(n+1)\omega_{n+1}}.$$

Il nucleo di Poisson verifica le seguenti proprietà:

1) $\Delta_z P(z, \xi) = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

2) $P(z, \xi) > 0$ per $z \in \mathbb{R}^{n+1}_+$.

3) Per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $y > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} P((x, y), \xi) dx &= C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{\big(|x - \xi|^2 + y^2\big)^{(n+1)/2}} dx \\ &= C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{\big(|x|^2 + y^2\big)^{(n+1)/2}} dx \\ &= C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\big(|x|^2 + 1\big)^{(n+1)/2}} dx = 1. \end{aligned} \tag{11.1.2}$$

La verifica dell'ultima identità è lasciata come (Cfr. Esercizio 16).

2. Integrale di Poisson. Convergenza in L^p

Con abuso di notazione, definiamo $P_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y > 0$,

$$P_y(x) = P((x,y),0) = C_n \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Se $z = (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, abbiamo l'identità $P(z,\xi) = P_y(x-\xi)$.

Definizione 11.2.1 (Integrale di Poisson). Qualora esso esista, l'integrale di Poisson di una funzione misurabile $\varphi : \mathbb{R}^n \to [-\infty,+\infty]$ è la funzione $u : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$ definita come

$$u(x,y) = P_y * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{(|x-\xi|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\varphi(\xi)d\xi.$$

Teorema 11.2.2. *Sia $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per qualche $1 \le p \le +\infty$. Allora l'integrale di Poisson u di φ esiste finito in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ e inoltre:*
(i) *u è armonica in $\mathbb{R}^{n+1}_+$;*
(ii) *$\|u(\cdot,y)\|_p \le \|\varphi\|_p$ per ogni $y > 0$;*
(iii) *Se $1 \le p < +\infty$ si ha $\lim_{y\to 0^+} u(\cdot,y) = \varphi$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Dim. Osserviamo che per ogni $z = (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ si ha $P(z,\cdot) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ per ogni $1 \le q \le +\infty$. Sia q l'esponente coniugato di p, ovvero $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Dalla disuguaglianza di Hölder si trova

$$|u(z)| \le \int_{\mathbb{R}^n} P(z,\xi)|\varphi(\xi)|d\xi \le \|P(z,\cdot)\|_q \|\varphi\|_p < +\infty.$$

Inoltre per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ esiste $r > 0$ tale che per ogni $1 \le q \le +\infty$

$$\sup_{z\in B_r(z_0)} |\nabla_z P(z,\xi)| \in L^q(\mathbb{R}^n),$$
$$\sup_{z\in B_r(z_0)} |\nabla^2_z P(z,\xi)| \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Dunque si possono portare derivate prime e seconde dentro l'integrale e si trova

$$\Delta_z u(z) = \Delta_z \int_{\mathbb{R}^n} P(z,\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_z P(z,\xi)\varphi(\xi)d\xi = 0.$$

Infatti, $\Delta_z P(z,\xi) = 0$.

Proviamo (ii). Con il cambiamento di variabile $\xi' = (x-\xi)/y$ si trova

$$u(x,y) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{(|x-\xi|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\varphi(\xi)d\xi = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|\xi'|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\varphi(x-y\xi')d\xi',$$

e dunque, con la disuguaglianza integrale di Minkowski si ottiene

$$\|u(\cdot,y)\|_p \le C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|\xi|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y\xi)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} d\xi = \|\varphi\|_p.$$

Abbiamo usato la proprietà 3) del nucleo di Poisson.

La prova di (iii) è analoga. Dal momento che

$$u(x,y) - \varphi(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|\xi|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}(\varphi(x-y\xi) - \varphi(x))d\xi,$$

come sopra si ottiene

$$\|u(\cdot,y)-\varphi\|_p \le C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|\xi|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y\xi)-f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} d\xi. \tag{11.2.3}$$

Ora, per la convergenza in media si ha per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ fissato

$$\lim_{y\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y\xi)-f(x)|^p dx = 0,$$

e passando al limite sotto segno di integrale nella (11.2.3) con il Teorema della convergenza dominata si ottiene la tesi. □

Osservazione 11.2.3. Il Teorema 11.2.2 può essere rovesciato. Precisamente, sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ e supponiamo che per qualche $C>0$ e $1\le p\le +\infty$ risulti $\|u(\cdot,y)\|_p \le C$ per ogni $y>0$. Allora u è l'integrale di Poisson di una funzione $\varphi\in L^p(\mathbb{R}^n)$ se $p>1$. Nel caso $p=1$, u è l'integrale di Poisson di una misura su $\mathbb{R}^n$. Cfr. Stein & Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton 1971.

3. Convergenza puntuale

Teorema 11.3.4. *Sia u l'integrale di Poisson in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ di una funzione $\varphi\in C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora, $\lim\limits_{y\to 0^+} u(x,y)=\varphi(x)$ con convergenza uniforme sui compatti.*

Dim. Sia $\varepsilon>0$ e fissiamo $R>0$ tale che

$$\int_{|\xi|\ge R} \frac{1}{(|\xi|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \le \varepsilon.$$

Come nella dimostrazione del Teorema 11.2.2, abbiamo

$$\begin{aligned} |u(x,y)-\varphi(x)| &\le C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|\xi|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} |\varphi(x-y\xi)-\varphi(x)| d\xi \\ &\le \int_{|\xi|<R} \{\dots\} d\xi + \int_{|\xi|\ge R} \{\dots\} d\xi = I_1+I_2. \end{aligned}$$

Da un lato si ha

$$I_2 \le 2\|\varphi\|_\infty \int_{|\xi|\ge R} \frac{C_n}{(|\xi|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \le 2\varepsilon C_n \|\varphi\|_\infty. \tag{11.3.4}$$

Questa stima non dipende da $y>0$.

Siano ora $|\xi|<R$ e $x\in K$ con $K\subset\mathbb{R}^n$ compatto. Per l'uniforme continuità di φ esiste $\delta>0$ tale che $|\varphi(x-y\xi)-\varphi(x)|\le\varepsilon$ per ogni $0<y<\delta$. Dunque, per la proprietà 3) del nucleo di Poisson

(11.3.5)

$$I_1 = C_n \int_{|\xi|<R} \frac{1}{(|\xi|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} |\varphi(x-y\xi)-\varphi(x)| d\xi \le \varepsilon \int_{|\xi|<R} \frac{C_n}{(|\xi|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \le \varepsilon.$$

Da (11.3.4) e (11.3.5) segue la convergenza uniforme. □

Definizione 11.3.5 (Cono positivo). Il cono positivo $\Gamma_\alpha(x_0)\subset\mathbb{R}^{n+1}_+$ con vertice $x_0\in\mathbb{R}^n$ e apertura $\alpha>0$ è l'insieme

$$\Gamma_\alpha(x_0) = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ : |x-x_0|<\alpha y\big\}.$$

TEOREMA 11.3.6 (Convergenza non tangenziale). *Sia u l'integrale di Poisson in* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *di una funzione* $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$. *Allora, per quasi ogni* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\alpha > 0$ *si ha*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = \varphi(x_0)$$

con convergenza per $(x, y) \in \Gamma_\alpha(x_0)$.

La dimostrazione di questo teorema richiede il Teorema della funzione massimale ed è omessa. Cfr. Stein & Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton 1971.

CAPITOLO 12

Problema di Dirichlet

1. Costruzione di Perron-Wiener

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $\varphi \in C(\partial\Omega)$ una funzione continua. Il problema dell'esistenza di una soluzione $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{12.1.1}$$

si può suddividere in due sottoproblemi:

A) Dimostrare l'esistenza di una soluzione generalizzata u dell'equazione differenziale $\Delta u = 0$ all'interno di Ω;
B) Studiare sotto quali ipotesi su Ω la soluzione generalizzata verifica $u \in C(\bar{\Omega})$ e $u = \varphi$ su $\partial\Omega$.

In questa sezione illustriamo la costruzione di Perron-Wiener, che risolve il Problema A).

Fissiamo l'insieme aperto Ω. Introduciamo l'insieme delle sottosoluzioni relativo ad una generica funzione $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$

$$U_\varphi = \big\{u \in \mathrm{Sub}(\Omega) \,:\, \limsup_{x\to y} u(x) \le \varphi(y) \text{ per ogni } y \in \partial\Omega\big\},$$

e l'insieme delle soprasoluzioni relativo a φ

$$U^\varphi = \big\{u \in \mathrm{Sup}(\Omega) \,:\, \liminf_{x\to y} u(x) \ge \varphi(y) \text{ per ogni } y \in \partial\Omega\big\}.$$

Se φ è limitata allora esistono sotto- e soprasoluzioni (ad esempio funzioni costanti) e quindi $U_\varphi \neq \emptyset$ e $U^\varphi \neq \emptyset$. Se $u \in U_\varphi$ e $v \in U^\varphi$, allora $u \le v$ in Ω. Infatti, $u - v \in \mathrm{Sub}(\Omega)$ e inoltre per ogni $y \in \partial\Omega$

$$\limsup_{x\to y} \big(u(x) - v(x)\big) \le \limsup_{x\to y} u(x) - \liminf_{x\to y} v(x) \le \varphi(y) - \varphi(y) = 0.$$

Dal Principio del Massimo per le funzioni subarmoniche segue che $u - v \le 0$ in Ω.

Definiamo gli inviluppi superiore e inferiore

$$\begin{aligned} H_\varphi(x) &= \sup\big\{u(x) \,:\, u \in U_\varphi\big\}, \\ H^\varphi(x) &= \inf\big\{v(x) \,:\, v \in U^\varphi\big\}. \end{aligned} \tag{12.1.2}$$

Si ha $H_\varphi \le H^\varphi$.

Definizione 12.1.1 (Funzioni risolutive). Una funzione $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ si dice risolutiva se:

i) $H_\varphi = H^\varphi$;
ii) H_φ è armonica in Ω.

La funzione H_φ si dice soluzione generalizzata del Problema di Dirichlet (12.1.1). Indichiamo con R l'insieme di tutte le funzioni risolutive (relativamente ad Ω).

OSSERVAZIONE 12.1.2. Le soluzioni classiche, se esistono, coincidono con le soluzioni generalizzate. Sia $\varphi \in C(\partial\Omega)$ e supponiamo che esista $h \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluzione del Problema di Dirichlet (12.1.1). Allora $h \in U_\varphi \cap U^\varphi$ e quindi

$$H^\varphi \leq h \leq H_\varphi \leq H^\varphi.$$

Dunque, $H_\varphi = H^\varphi = h$.

TEOREMA 12.1.3 (Perron-Wiener). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Le funzioni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ sono risolutive.*

Dunque, per ogni funzione continua $\varphi \in C(\partial\Omega)$ esiste una soluzione generalizzata $H_\varphi \in H(\Omega)$ del Problema di Dirichlet (12.1.1). Affinchè la soluzione generalizzata sia una soluzione classica deve essere verificata la condizione al bordo

$$\lim_{x\to y} H_\varphi(x) = \varphi(y), \qquad y \in \partial\Omega.$$

Questa proprietà dipende dalla geometria di Ω.

ESEMPIO 12.1.4. Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$ e sia $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ così definita: $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(x) = 0$ per $|x| = 1$.

Proviamo che φ è risolutiva e $H_\varphi = 0$. Infatti, $0 \in U_\varphi$ e quindi $0 \leq H_\varphi$. Per $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione

$$w_\varepsilon(x) = -\varepsilon \log|x|, \quad x \neq 0.$$

Si ha $w_\varepsilon \in H(\Omega)$, $w_\varepsilon(x) = 0$ per $|x| = 1$ e $w_\varepsilon(x) \to +\infty$ per $x \to 0$. Dunque $w_\varepsilon \in U^\varphi$ e quindi $0 \leq H^\varphi \leq w_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Per $\varepsilon \to 0$ si deduce che $H^\varphi = 0$.

La soluzione generalizzata $H_\varphi = 0$ non verifica la condizione al bordo nel punto $x = 0$.

TEOREMA 12.1.5 (Perron). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora le funzioni H_φ e H^φ sono armoniche in Ω.*

DIM. Essendo φ limitata, le funzioni H_φ e H^φ sono finite. È sufficiente dimostrare il teorema per H_φ, infatti $H^\varphi = -H_{-\varphi}$.

1) Introduciamo la regolarizzata di Perron. Sia $u \in C(\Omega)$ e sia $B \subset\subset \Omega$ una palla. La regolarizzata di Perron di u relativamente a B è la funzione $u_B : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u_B(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus B, \\ h(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

dove $h \in H(B) \cap C(\bar{B})$ verifica $h = u$ su ∂B. La regolarizzata di Perron ha le seguenti proprietà:

i) $u \leq v \Rightarrow u_B \leq v_B$;
ii) Se $u \in \mathrm{Sub}(\Omega)$ allora $u \leq u_B$;
iii) Se $u \in \mathrm{Sub}(\Omega)$ allora $u_B \in \mathrm{Sub}(\Omega)$.

Verifichiamo la proprietà iii). Sicuramente $u_B \in C(\Omega)$. Dobbiamo provare che per ogni palla $B' \subset\subset \Omega$, detta $z \in H(B') \cap C(\bar{B}')$ la funzione armonica tale che $z = u_B$ su $\partial B'$, risulta $u_B \leq z$ in B'.

a) Si ha $u_B \geq u$ in B, per il Principio del Massimo, e quindi in particolare $z \geq u = u_B$ su $\partial B' \cap B$.

b) In B' abbiamo, per il Principio del Massimo:

$$\left.\begin{array}{l} z = u_B = u \text{ su } \partial B' \setminus B \\ z = u_B \geq u \text{ su } \partial B' \cap \bar{B} \\ u - z \in \mathrm{Sub}(B') \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad z \geq u \text{ in } B'.$$

Quindi in particolare si ha $z \geq u = u_B$ in $B' \setminus B$.

c) In $B' \cap B$ abbiamo per il Principio del Massimo:

$$\left.\begin{array}{l} z \geq u_B \text{ su } \partial B \cap \bar{B}' \\ z = u_B \text{ su } \partial B' \cap \bar{B} \\ \Delta(z - u_B) = 0 \text{ in } B \cap B' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad z \geq u_B \text{ in } B \cap B'.$$

Questo termina a prova di iii).

2) Proviamo che la funzione $h = H_\varphi$ è armonica in Ω. È sufficiente provare che h è armonica in una generica palla $B \subset\subset \Omega$. Sia $x \in B$ un punto fissato. Esiste una successione $u_k \in U_\varphi$, $k \in \mathbb{N}$, tale che

$$h(x) = \lim_{k \to +\infty} u_k(x). \tag{12.1.3}$$

Le funzioni

$$v_k = \max\{u_1, ..., u_k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

formano una successione crescente. Inoltre $v_k \in U_\varphi$, perchè lo spazio delle funzioni subarmoniche è chiuso rispetto alla operazione di massimo.

Le funzioni regolarizzate di Perron

$$w_k = (v_k)_B, \quad k \in \mathbb{N},$$

formano una successione crescente. Inoltre $w_k \in \mathrm{Sub}(\Omega)$, come mostrato al punto 1), e quindi $w_k \in U_\varphi$. Dalle relazioni

$$u_k(x) \leq v_k(x) \leq w_k(x) \leq h(x)$$

e dalla (12.1.3) deduciamo che $w_k(x) \to h(x)$ per $k \to +\infty$. Siccome le funzioni w_k sono armoniche in B, convergono in $x \in B$ e formano una successione crescente, dal Principio di Harnack segue che esiste una funzione h_1 armonica in B tale che $w_k \to h_1$ uniformemente sui compatti di B.

Si ha $h_1 \leq h$ in B e inoltre $h_1(x) = h(x)$. Vogliamo provare che $h_1 = h$ in B. Sia $y \in B$ un altro punto nella palla. Come sopra si prova l'esistenza di una successione di funzioni $z_k \in U_\varphi$, $k \in \mathbb{N}$, tali che: i) $z_k(y) \to h(y)$ per $k \to +\infty$; ii) $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente; iii) $z_k \geq w_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$; iv) le funzioni z_k sono armoniche in B.

Per il Principio di Harnack, esiste una funzione h_2 armonica in B tale che $z_k \to h_2$ uniformemente sui compatti di B. Inoltre, $h_2(y) = h(y)$ e, per la iii), $h_1 \leq h_2 \leq h$. Dunque

$$h(x) = h_1(x) \leq h_2(x) \leq h(x),$$

da cui segue che $h_1(x) = h_2(x)$. Siccome $h_1 \leq h_2$, dal Principio del Massimo segue che $h_1 = h_2$ in B e quindi $h_1(y) = h_2(y) = h(y)$. Siccome $y \in B$ è generico, $h_1 = h$ in B. □

Dimostrazione del Teorema di Perron-Wiener.

1) L'insieme R delle funzioni risolutive è non vuoto.

2) L'insieme R forma uno spazio vettoriale.

Siano $\varphi, \psi \in R$ e proviamo che $\varphi + \psi \in R$. Se $u \in U_\varphi$ $v \in U_\psi$ allora $u + v \in U_{\varphi+\psi}$ e dunque $u+v \leq H_{\varphi+\psi}$, da cui si deduce $H_\varphi + H_\psi \leq H_{\varphi+\psi}$. In modo analogo si prova che $H^\varphi + H^\psi \geq H^{\varphi+\psi}$. Se $\varphi, \psi \in R$ allora abbiamo

$$H_\varphi + H_\psi \leq H_{\varphi+\psi} \leq H^{\varphi+\psi} \leq H^\varphi + H^\psi = H_\varphi + H_\psi,$$

e quindi si hanno tutte uguaglianze. Segue che $\varphi + \psi \in R$ e $H_{\varphi+\psi} = H_\varphi + H_\psi$.

In modo analogo si prova che $\varphi \in R$ implica $\lambda\varphi \in R$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e inoltre $H_{\lambda\varphi} = \lambda H_\varphi$.

In particolare, l'applicazione $H : R \to H(\Omega)$, $H(\varphi) = H_\varphi$ è lineare.

3) Lo spazio R è chiuso rispetto alla convergenza uniforme. Precisamente, se $\varphi_k \in R$, $k \in \mathbb{N}$, e $\varphi_k \to \varphi$ uniformemente per $k \to +\infty$, allora $\varphi \in R$.

Dato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_k - \varepsilon \leq \varphi \leq \varphi_k + \varepsilon$ per ogni $k \geq \bar{k}$. Dunque,

$$H_{\varphi_k} - \varepsilon = H_{\varphi_k - \varepsilon} \leq H_\varphi \leq H^\varphi \leq H^{\varphi_k+\varepsilon} = H^{\varphi_k} + \varepsilon = H_{\varphi_k} + \varepsilon, \quad k \geq \bar{k}.$$

Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario segue che $H_\varphi = H^\varphi$. Inoltre $H_{\varphi_k} \in H(\Omega)$ converge uniformemente ad H_φ. Siccome la convergenza uniforme preserva l'armonicità, si ha $H_\varphi \in H(\Omega)$.

4) Sia $\Phi \in \mathrm{Sub}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e sia $\varphi = \Phi_{|\partial\Omega}$. Allora $\varphi \in R$.

Infatti, siccome $\Phi \in U_\varphi$ si ha $\Phi \leq H_\varphi$. Dunque,

$$\liminf_{x\to y} H_\varphi(x) \geq \lim_{x\to y} \Phi(x) = \varphi(y), \quad y \in \partial\Omega.$$

Per il Teorema di Perron, $H_\varphi \in H(\Omega)$ e quindi $H_\varphi \in U^\varphi$. Questo implica che $H^\varphi \leq H_\varphi$ e quindi $H^\varphi = H_\varphi$.

5) La restrizione su $\partial\Omega$ di un polinomio p di $\mathbb{R}^n$ è risolutiva.

Per una costante $M \in \mathbb{R}$ da determinare si considera

$$p(x) = \big(p(x) - M|x|^2\big) + M|x|^2.$$

La funzione $|x|^2$ è risolutiva, perchè è subarmonica. Per linearità $M|x|^2$ è risolutiva per ogni $M \in \mathbb{R}$. Siccome Ω è limitato esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\Delta\big(p(x) - M|x|^2\big) = \Delta p(x) - 2nM \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Quindi $p(x) - M|x|^2 \in \mathrm{Sub}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e dunque è risolutiva. Siccome R è uno spazio vettoriale segue che $p \in R$.

6) Le funzioni continue $\varphi \in C(\partial\Omega)$ sono risolutive.

Per il Teorema di Stone-Weierstrass[1] esiste una successione di polinomi p_k, $k \in \mathbb{N}$, tali che $p_k \to \varphi$ per $k \to +\infty$ uniformemente su $\partial\Omega$. Siccome R è chiuso rispetto alla convergenza uniforme, segue che $\varphi \in R$.

□

[1]Cfr. Dunford & Schwartz, *Linear Operators. Part I. General Theory*, Wiley 1988, p.272.

2. Regolarità al bordo. Barriere

DEFINIZIONE 12.2.6. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Un punto $x_0 \in \partial\Omega$ si dice Δ-regolare se

$$\lim_{x \to x_0} H_\varphi(x) = \varphi(x_0)$$

per ogni funzione $\varphi \in C(\partial\Omega)$, dove H_φ è la soluzione generalizzata di Perron.

DEFINIZIONE 12.2.7 (Barriera). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $x_0 \in \partial\Omega$. Una funzione $w : \Omega \to \mathbb{R}$ è una barriera per Ω in x_0 se:

i) Esiste un intorno V di x_0 tale che $w \in \mathrm{Sup}(\Omega \cap V)$;
ii) Per ogni $\delta > 0$ si ha $\inf\big\{w(x) : x \in \Omega \cap V,\ |x - x_0| \geq \delta\big\} > 0$;
iii) $w(x) \to 0$ per $x \to x_0$.

TEOREMA 12.2.8 (Bouligand). *Un punto $x_0 \in \partial\Omega$ è Δ-regolare se e solo se esiste una barriera per Ω in x_0.*

DIM. A) Supponiamo che $x_0 \in \partial\Omega$ sia Δ-regolare. Vogliamo costruire una barriera per Ω in x_0. Sia $\Phi(x) = |x - x_0|^2$ e $\varphi = \Phi_{|\partial\Omega}$. Siccome $\Phi \in \mathrm{Sub}(\mathbb{R}^n)$, si ha in particolare $\Phi \in U_\varphi$. Proviamo che la funzione $w = H_\varphi$ è una barriera. Infatti:

i) $w \in H(\Omega)$ per il Teorema di Perron;
ii) $w \geq \Phi$ in Ω, e quindi, fissato $\delta > 0$, si ha

$$w(x) \geq \Phi(x) = |x - x_0|^2 \geq \delta^2 > 0, \quad \text{per } |x - x_0| \geq \delta.$$

iii) Infine, siccome x_0 è Δ-regolare, $w(x) \to \varphi(x_0) = 0$ per $x \to x_0$.

B) Supponiamo che esista una barriera in x_0 e proviamo che il punto è Δ-regolare. È sufficiente mostrare che

$$\limsup_{x \to x_0} H_\varphi(x) \leq \varphi(x_0) \tag{12.2.4}$$

per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$. In questo caso, infatti, si ha anche

$$\liminf_{x \to x_0} H_\varphi(x) = \liminf_{x \to x_0} -H_{-\varphi}(x) = -\limsup_{x \to x_0} H_{-\varphi}(x) \geq -(-\varphi(x_0)) = \varphi(x_0).$$

Sia $w : \Omega \cap V \to \mathbb{R}$ la barriera per Ω in x_0. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon$ per $|x - x_0| \leq \delta$, $x \in \partial\Omega$, e in corrispondenza di tale $\delta > 0$ sia $C > 0$ una costante tale che

$$Cw(x) \geq 2 \max_{\partial\Omega} |\varphi|, \quad \text{per } |x - x_0| \geq \delta, \quad x \in \Omega \cap V.$$

Questa costante esiste grazie alla proprietà ii) della barriera.

Supponiamo di poter provare che ogni $u \in U_\varphi$ verifica

$$u(x) \leq Cw(x) + \varphi(x_0) + \varepsilon, \quad x \in \Omega \cap V. \tag{12.2.5}$$

Allora la stessa stima vale anche per H_φ e quindi, per la proprietà iii) della barriera,

$$\limsup_{x \to x_0} H_\varphi(x) \leq \lim_{x \to x_0} Cw(x) + \varphi(x_0) + \varepsilon = \varphi(x_0) + \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario, e la (12.2.4) segue.

Proviamo la (12.2.5). Siccome $u(x) - Cw(x) \in \mathrm{Sub}(\Omega \cap V)$, è sufficiente mostrare che

$$L(y) = \limsup_{x \to y} \big(u(x) - Cw(x)\big) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

per ogni $y \in \partial(\Omega \cap V)$. Distinguiamo due casi:

Caso 1: $|y - x_0| \leq \delta$. In particolare si può supporre che $y \in \partial\Omega$. In questo caso si usano $Cw(x) \geq 0$ e il fatto che $\limsup_{x \to y} u(x) \leq \varphi(y)$ per ottenere

$$L(y) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Caso 2: $|y - x_0| > \delta$. In questo caso si ha "definitivamente" $|x - x_0| > \delta$ e quindi $Cw(x) \geq 2 \max |\varphi|$. Inoltre, dal fatto che per ogni $y \in \partial\Omega$ si ha

$$\limsup_{x \to y} u(x) \leq \varphi(y) \leq \max |\varphi|,$$

segue che $u(x) \leq \max |\varphi|$ per ogni $x \in \Omega$, per il Principio del Massimo. Dunque,

$$L(y) = \limsup_{x \to y} \big(u(x) - Cw(x)\big) \leq -\max |\varphi| \leq \varphi(x_0).$$

Questo termina la dimostrazione. □

3. Criteri geometrici di regolarità

Definizione 12.3.9 (Palla tangente esterna). Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ha la proprietà della palla tangente esterna nel punto $x_0 \in \partial\Omega$ se esistono $y \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$ tali che $\bar{B}(y, r) \cap \bar{\Omega} = \{x_0\}$.

Se Ω è un insieme aperto non vuoto di classe C^2, allora Ω ha la proprietà della palla tangente esterna in ogni punto $x_0 \in \partial\Omega$. Lo stesso vale se Ω è un insieme convesso.

Proposizione 12.3.10 (Poincaré). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato con la proprietà della palla tangente esterna in $x_0 \in \partial\Omega$. Allora x_0 è un punto Δ-regolare.*

Dim. Sia $B(y, r)$ una palla tangente in $x_0 \in \partial\Omega$ esterna ad Ω. Per $x \neq y$, definiamo la funzione (nel caso $n \geq 3$)

$$w(x) = \Gamma_y(x) - \Gamma(r) = \frac{1}{n\omega_n(2-n)} \big\{|x - y|^{2-n} - r^{2-n}\big\}.$$

La funzione w è armonica in Ω e $w \in C(\bar{\Omega})$. Inoltre

$$\lim_{x \to x_0} w(x) = 0,$$

e per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\inf \big\{w(x) : x \in \Omega,\ |x - x_0| \geq \delta\big\} > 0.$$

Infatti, w è continua in $\bar{\Omega}$ e, in questo insieme, si annulla solo nel punto x_0. Dunque, w è una barriera per Ω in x_0 e per il Teorema di Bouligand x_0 è Δ-regolare. □

Nel caso speciale $n = 2$, il Criterio della palla esterna può essere migliorato.

Definizione 12.3.11 (Segmento esterno). Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ha la proprietà del segmento esterno nel punto $z_0 \in \partial\Omega$ se esiste $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, tale che $[z_0, z_1] \cap \bar{\Omega} = \{z_0\}$, dove $[z_0, z_1] = \big\{tz_1 + (1-t)z_0 \in \mathbb{C} : t \in [0, 1]\big\}$.

Proposizione 12.3.12. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto e limitato con la proprietà del segmento esterno in $z_0 \in \partial\Omega$. Allora z_0 è un punto Δ-regolare.*

Dim. Senza perdere di generalità possiamo supporre che $z_0 = 0$ che $z_1 = -1 \in \mathbb{C}$. Definiamo la funzione $w : \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Im} z = 0 \text{ e } \mathrm{Re} z \leq 0\} \to \mathbb{R}$

$$w(z) = -\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{\log z}\Big),$$

dove $\log z = \log|z| + i \arg z$ con $\arg z \in (-\pi, \pi)$. La funzione w è armonica in $\mathbb{C}^*$ ed è positiva in $\mathbb{C}^* \cap \{|z| < 1\}$, infatti

$$w(z) = \frac{-\log|z|}{\log^2|z| + \arg^2 z}.$$

Inoltre $\lim_{z\to 0} w(z) = 0$ e per ogni $0 < \delta < 1$ si ha $\inf\{w(z) : \delta \leq |z| < 1/2, z \in \mathbb{C}^*\} > 0$. Quindi w è una barriera per Ω in $z_0 = 0$. $\square$

Definizione 12.3.13 (Cono). 1) Un insieme $H \subset \mathbb{R}^n$ è un cono (convesso) se: i) $x, y \in H \Rightarrow x + y \in H$; ii) $\lambda x \in H$ per ogni $\lambda > 0$ e $x \in H$.

2) Un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ è un cono troncato se esistono un cono $H \subset \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$ tali che $K = H \cap \bar{B}(0, r)$.

Definizione 12.3.14. Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ha la proprietà del cono esterno in $x_0 \in \partial\Omega$ se esiste un cono troncato K con $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$ tale che $x_0 + K \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$

Definizione 12.3.15. Un aperto (limitato) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ha frontiera Lipschitziana se per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x_0 tale che a meno di una trasformazione ortogonale si ha

$$\partial\Omega \cap U = \big\{(x', \varphi(x') \in \mathbb{R}^n : x' \in D\big\}$$

con $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto limitato e $\varphi : D \to \mathbb{R}$ Lipschitziana su D:

$$L = \sup_{x', y' \in D,\, x' \neq y'} \frac{|\varphi(x') - \varphi(y')|}{|x' - y'|} < +\infty.$$

Il numero $L = \mathrm{Lip}(\varphi)$ si dice costante di Lipschitz di φ.

Se Ω è un aperto limitato con frontiera Lipschitziana, allora ha la proprietà del cono esterno in ogni punto.

Teorema 12.3.16 (Criterio del cono esterno). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con la proprietà del cono esterno in $x_0 \in \partial\Omega$. Allora x_0 è Δ-regolare.*

Dim. Possiamo supporre $x_0 = 0$. Esistono $r > 0$ ed un cono H tali che $K = H \cap \bar{B}(0, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ e $\mathrm{int}(H) \neq \emptyset$. Senza perdere di generalità assumiamo che H sia un cono circolare retto. Possiamo inoltre supporre $\Omega \subset B(0, r)$. Infatti, $x_0 = 0$ è Δ-regolare per Ω se e solo se lo è per $\Omega \cap B(0, r)$.

Sia $\Omega^* = B(0, r) \setminus K$. Se esiste una barriera per Ω^* in $x_0 = 0$, allora esiste anche una barriera per Ω in $x_0 = 0$. Senza perdere di generalità possiamo in conclusione supporre che $\Omega = \Omega^*$. Tutti i punti $x \in \partial\Omega \setminus \{0\}$ sono Δ-regolari per il criterio di Poincaré.

Sia $\varphi(x) = |x|$ e definiamo la funzione $w : \bar{\Omega} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$w(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega,\ x \neq 0, \\ H_\varphi(x) & \text{se } x \in \Omega. \end{cases}$$

Allora risulta $w \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$, infatti tutti i punti $x \in \partial\Omega$, $x \neq 0$, sono Δ-regolari. Per il Principio del Massimo risulta $0 < w(x) < r$ per $x \in \Omega$.

Per $\lambda \in (0,1)$ fissato definiamo $\Omega_\lambda = \lambda\Omega \subset \Omega$ e consideriamo la funzione $w_\lambda : \Omega_\lambda \to \mathbb{R}$,

$$w_\lambda(x) = w(x/\lambda), \quad w_\lambda \in H(\Omega_\lambda).$$

Vogliamo provare che esiste $\varepsilon \in (0,1)$ tale che $w \leq \varepsilon w_\lambda$ in Ω_λ. Ne segue che

$$\limsup_{x\to 0} w(x) \leq \varepsilon \limsup_{x\to 0} w_\lambda(x) = \varepsilon \limsup_{x\to 0} w(x),$$

da cui $\limsup_{x\to 0} w(x) \leq 0$ e quindi $\lim_{x\to 0} w(x) = 0$. La funzione w è una barriera per Ω in $x_0 = 0$.

Osserviamo che, per il Principio del Massimo,

$$M = \frac{1}{r} \max_{y\in\bar{\Omega}, |y|=\lambda r} w(y) < 1,$$

e quindi possiamo scegliere $\varepsilon \in [M, 1)$. Con tale scelta, per $y \in \Omega_\lambda$ con $|y| = \lambda r$, si ha

$$\lim_{x\to y} \big(w(x) - \varepsilon w_\lambda(x)\big) = w(y) - \varepsilon r \leq 0.$$

Inoltre, se $y \in \partial\Omega_\lambda$ con $0 < |y| < \lambda r$, allora

$$\lim_{x\to y} \big(w(x) - \varepsilon w_\lambda(x)\big) = |y| - \frac{\varepsilon}{\lambda}|y| = |y|(1 - \varepsilon/\lambda) \leq 0$$

per $\varepsilon \geq \lambda$. Le due condizioni su ε sono compatibili.

Osserviamo infine che $w - \varepsilon w_\lambda$ è limitata. Dalla seguente proposizione segue che $w - \varepsilon w_\lambda \geq 0$ in Ω_λ. □

PROPOSIZIONE 12.3.17. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un aperto limitato tale che $0 \in \partial\Omega$ e sia $u \in H(\Omega)$ una funzione limitata tale che*

$$\liminf_{x\to y} u(x) \geq 0$$

per ogni $y \in \partial\Omega$, $y \neq 0$. Allora $u \geq 0$ in Ω.

DIM. La dimostrazione è lasciata come esercizio. Per $n \geq 3$, dato $\varepsilon > 0$, si consideri $u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^{2-n}$, etc. □

4. Misure armoniche

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Δ–regolare. Per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{12.4.6}$$

ha una soluzione unica $u \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Definiamo l'operatore $T : C(\partial\Omega) \to H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ponendo $T(\varphi) = u$ se e solo se u risolve il Problema (12.4.6). L'operatore T ha le seguenti proprietà:

i) T è lineare.

ii) T è un operatore isometrico rispetto alle norme del max. In particolare, se $\varphi_k \to \varphi$ uniformemente in $C(\partial\Omega)$ allora $u_k = T(\varphi_k)$ converge uniformemente a $u = T(\varphi)$ in $\bar{\Omega}$. Infatti, per il Principio del Massimo

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} |u_k(x) - u(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |\varphi_k(x) - \varphi(x)|.$$

iii) T è un operatore positivo. Ovvero $\varphi \geq 0$ su $\partial\Omega$ implica $u = T(\varphi) \geq 0$ in $\bar{\Omega}$. Anche questo segue dal Principio del Massimo.

Fissiamo un punto $x \in \Omega$ e definiamo $T_x : C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ ponendo $T_x(\varphi) = T(\varphi)(x)$. Questo funzionale è lineare, continuo e positivo. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz[2] esiste una misura Boreliana μ_x su $\partial\Omega$ tale che

$$u(x) = T_x(\varphi) = \int_{\partial\Omega} \varphi \, d\mu_x \tag{12.4.7}$$

per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Inoltre, scegliendo $\varphi = 1$ si ha $u = T(\varphi) = 1$ e quindi $\mu_x(\partial\Omega) = 1$. La misura μ_x è una misura di probabilità su $\partial\Omega$. La misura μ_x si dice *misura armonica* associata all'aperto Ω relativamente al punto $x \in \Omega$.

ESEMPIO 12.4.18. Ad esempio, se $\Omega = B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$, allora

$$\mu_x = \frac{1}{n\omega_n r} \frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \, \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial\Omega.$$

[2]Cfr. Dunford & Schwartz, *Linear Operators. Part I. General Theory,* Wiley 1988, p.493.

CAPITOLO 13

Problema della capacità

In questo Capitolo sarà sempre $n \geq 3$.

1. Traformazione di Kelvin

DEFINIZIONE 13.1.1. Data una funzione $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiamo la trasformata di Kelvin $u^* : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$u^*(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \qquad x \neq 0. \tag{13.1.1}$$

La mappa $x \mapsto x/|x|^2$ è l'inversione sferica in $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIZIONE 13.1.2. *Se $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ allora $u^* \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e inoltre*

$$\Delta u^*(x) = |x|^{-2-n} \Delta u(x/|x|^2), \quad x \neq 0. \tag{13.1.2}$$

In particolare, u è armonica se e solo se u^* è armonica.

DIM. Introduciamo le coordinate sferiche (r, ϑ) con $r > 0$ and $\vartheta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Data u, definiamo $v, v^* : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$

$$v(r, \vartheta) = u(r\vartheta), \qquad v^*(r, \vartheta) = u^*(r\vartheta) = r^{2-n} v(1/r, \vartheta).$$

L'operatore di Laplace in coordinate sferiche è

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

dove $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ è l'operatore di Laplace sulla sfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Scriviamo $v^* = v^*(r, \vartheta)$ e $v = v(1/r, \vartheta)$ omettendo gli argomenti. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\partial_r v^* &= (2-n) r^{1-n} v - r^{-n} \partial_r v \\
\partial_r^2 v^* &= (2-n)(1-n) r^{-n} v + 2(n-1) r^{-n-1} \partial_r v + r^{-n-2} \partial_r^2 v,
\end{aligned}$$

e quindi troviamo

$$\partial_r^2 v^* + \frac{n-1}{r}\partial_r v^* = r^{-n-2}\Big(\partial_r^2 v + (n-1) r \partial_r v\Big).$$

Dal fatto che $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} v^* = r^{2-n} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} v$ it follows

$$\Delta u^*(x) = r^{-n-2}\Big(\partial_r^2 v + (n-1) r \partial_r v + r^2 \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} v\Big) = |x|^{-n-2} \Delta u\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$

Questo prova la formula (13.1.2). $\square$

2. Problema della capacità

TEOREMA 13.2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitziana e sia $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Allora il problema esterno*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Inoltre esiste una costante $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che per $|x| \to +\infty$

$$u(x) = \frac{\alpha}{|x|^{n-2}} + O\Big(\frac{1}{|x|^{n-1}}\Big), \quad \nabla u(x) = (2-n)\alpha \frac{x}{|x|^n} + O\Big(\frac{1}{|x|^n}\Big). \tag{13.2.3}$$

DIM. Se u e v sono due soluzioni, allora la funzione $w = u - v$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, verifica $w(x) = 0$ per $x \in \partial\Omega$ e inoltre $w(x) \to 0$ per $|x| \to +\infty$. Dal Principio del Massimo segue che $w = 0$, se così non fosse w avrebbe un punto di massimo o di minimo interno, cosa non possibile.

Proviamo l'esistenza di una soluzione. Senza perdere di generalità possiamo supporre che $0 \in \Omega$. Consideriamo l'insieme

$$\Omega^* = \big\{x/|x|^2 \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}\big\} \cup \{0\},$$

e la funzione $\varphi^* \in C(\partial\Omega^*)$, $\varphi^*(x) = |x|^{2-n}\varphi(x/|x|^2)$.

L'insieme Ω^* è limitato con frontiera Lipschitziana (Esercizio) e quindi è Δ-regolare. Dunque, il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u^* = 0 & \text{in } \Omega^* \\ u^* = \varphi^* & \text{su } \partial\Omega^* \end{cases}$$

ha una soluzione unica $u^* \in C^\infty(\Omega^*) \cap C(\bar{\Omega}^*)$. La funzione $u(x) = |x|^{2-n}u^*(x/|x|^2)$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ per la Proposizione 13.1.2 e verifica (13.2.3) con $\alpha = u^*(0)$ (Esercizio). □

DEFINIZIONE 13.2.4 (Capacità). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitziana. La soluzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ del Problema esterno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \\ u = 1 & \text{su } \partial\Omega \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{13.2.4}$$

si dice *potenziale capacitario di* Ω. Inoltre, si definisce la *capacità di* Ω

$$\mathrm{cap}(\Omega) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{u(x)}{-\Gamma(x)} = n(n-2)\omega_n \lim_{|x|\to+\infty} |x|^{n-2}u(x).$$

OSSERVAZIONE 13.2.5 (Proprietà della capacità).

(i) $\mathrm{cap}(\Omega) > 0$ per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera Lipschitz.
(ii) Se u è il potenziale capacitario di Ω allora $0 < u(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Inoltre esiste $R > 0$ tale che $|\nabla u(x)| \neq 0$ per ogni $|x| \geq R$.
(iii) $\mathrm{cap}(\Omega) = \mathrm{cap}(x_0 + \Omega)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(iv) $\text{cap}(\lambda\Omega) = \lambda^{n-2}\text{cap}(\Omega)$ per ogni $\lambda > 0$. Infatti, se u è il potenziale capacitario di Ω allora $u_\lambda(x) = u(x/\lambda)$ è il potenziale capacitario di $\lambda\Omega$ e inoltre

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^{n-2}u_\lambda(x) = \lambda^{n-2} \lim_{|x|\to+\infty} |x/\lambda|^{n-2}u(x/\lambda).$$

(v) Se $\Omega_1 \subset \Omega_2$ allora $\text{cap}(\Omega_1) \le \text{cap}(\Omega_2)$. Infatti, se u_1, u_2 sono i potenziali di Ω_1, Ω_2 allora $u_2 = 1$ mentre $u_1 \le 1$ su $\partial\Omega_2$. Dal Principio del Massimo segue che $u_1 \le u_2$ su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2$.

(vi) $\text{cap}(B_r) = r^{n-2}\text{cap}(B_1) = r^{n-2}n(n-2)\omega_n$, per ogni $r > 0$. Infatti, $u(x) = |x|^{2-n}$ è potenziale capacitario di B_1.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe C^1 e sulla classe di funzioni

$$\mathcal{A}(\Omega) = \Big\{ v \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) : v = 1 \text{ su } \partial\Omega, \lim_{|x|\to+\infty} v(x) \to 0, \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla v|^2 dx < +\infty \Big\}$$

consideriamo il funzionale $E : \mathcal{A}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$

$$E(v) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

PROPOSIZIONE 13.2.6. *Se esiste $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ tale che $E(u) \le E(v)$ per ogni $v \in \mathcal{A}(\Omega)$, allora u risolve il Problema esterno* (13.2.4). *Inoltre si ha*

$$\text{cap}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla u|^2 dx, \tag{13.2.5}$$

dove ν è la normale interna a $\partial\Omega$.

DIM. Il fatto che u risolva il problema (13.2.4) si prova esattamente come nel Teorema 2.3.11. Proviamo le identità (13.2.5).

Per $R > 0$ sufficientemente grande, definiamo $\Omega_R = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Usando il fatto che $\Delta u = 0$ in Ω_R si trova con il Teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\Omega_R} \text{div}(u\nabla u) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{|x|=R} u\langle \nabla u, x/|x| \rangle d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned} \tag{13.2.6}$$

Abbiamo usato il fatto che $u = 1$ su $\partial\Omega$. Per le (13.2.3) esistono $C > 0$ e $\bar{R} > 0$ tali che per $|x| \ge \bar{R}$

$$|u(x)| \le C|x|^{2-n}, \quad |\nabla u(x)| \le C|x|^{1-n}.$$

Quindi per $R \ge \bar{R}$ si ottiene

$$\Big| \int_{|x|=R} u\langle \nabla u, x/|x| \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \Big| \le \int_{|x|=R} |u||\nabla u| \, d\mathcal{H}^{n-1} \le C^2 n\omega_n R^{2-n}.$$

Facendo tendere $R \to +\infty$ nella (13.2.6), si trova l'indentità

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

D'altra parte, usando di nuovo il Teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\langle\nabla u,\nu\rangle d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\Omega_R}\Delta u\,dx - \int_{|x|=R}\langle\nabla u, x/|x|\rangle d\mathcal{H}^{n-1}\\ &= -\int_{|x|=R}\langle\nabla u, x/|x|\rangle d\mathcal{H}^{n-1},\end{aligned}$$

dove, per la (13.2.3),

$$\nabla u(x) = (2-n)\alpha\frac{x}{|x|^n} + O\Big(\frac{1}{|x|^n}\Big), \quad \alpha = \frac{\mathrm{cap}(\Omega)}{n(n-2)\omega_n},$$

e quindi

$$-\int_{|x|=R}\langle\nabla u, x/|x|\rangle d\mathcal{H}^{n-1} = \mathrm{cap}(\Omega) + O\Big(\frac{1}{R}\Big).$$

A posteriori, si deduce che l'ultimo $O(1/R)$ in effetti è zero per ogni R sufficientemente grande. □

3. Disuguaglianza di Brunn-Minkowski per la capacità

LEMMA 13.3.7. *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $G : X \to \mathbb{R}_0^+$ una funzione che verifica:*

(i) *$G(\lambda x) = \lambda^\alpha G(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda \geq 0$;*
(ii) *$G((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \geq \min\{G(x_0), G(x_1)\}$ per ogni $x_0, x_1 \in X$ e $\lambda \in [0,1]$.*

Allora si ha la disuguaglianza di concavità

$$G((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1)^{1/\alpha} \geq (1-\lambda)G(x_0)^{1/\alpha} + \lambda G(x_1)^{1/\alpha}. \tag{13.3.7}$$

DIM. È sufficiente provare che

$$G(x_0 + x_1)^{1/\alpha} \geq G(x_0)^{1/\alpha} + G(x_1)^{1/\alpha},$$

e la (13.3.7) segue dalla proprietà (i). Per ogni $0 < \lambda < 1$ si ha

$$\begin{aligned}G(x_0+x_1) &= G\Big((1-\lambda)\frac{x_0}{1-\lambda} + \lambda\frac{x_1}{\lambda}\Big) \geq \min\Big\{G\Big(\frac{x_0}{1-\lambda}\Big), G\Big(\frac{x_1}{\lambda}\Big)\Big\}\\ &\geq \min\Big\{\frac{1}{(1-\lambda)^\alpha}G(x_0), \frac{1}{\lambda^\alpha}G(x_1)\Big\}.\end{aligned}$$

Se scegliamo il λ che rende uguali i due argomenti del minimo, e cioè

$$\lambda = \frac{G(x_1)^{1/\alpha}}{G(x_0)^{1/\alpha} + G(x_1)^{1/\alpha}},$$

si ottiene

$$G(x_0 + x_1) \geq \big(G(x_0)^{1/\alpha} + G(x_1)^{1/\alpha}\big)^\alpha.$$

□

LEMMA 13.3.8. *Sia u il potenziale capacitario di un insieme convesso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora $\nabla u(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$.*

DIM. Senza perdere di generalità possiamo supporre che $0 \in \Omega$. La funzione $w(x) = \langle x, \nabla u(x)\rangle$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$:

$$w_{ii} = \Big(\sum_{j=1}^n x_j u_j\Big)_{ii} = \Big(\sum_{j=1}^n \delta_{ij} u_j + x_j u_{ij}\Big)_i = \sum_{j=1}^n \big(2\delta_{ij} u_{ij} + x_j u_{iij}\big),$$

e quindi $\Delta w = 2\Delta u = 0$. Proviamo che $w(x) \le 0$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Infatti, per $0 < \lambda < 1$ sia ha $u(x) < u(\lambda x)$ e dunque

$$\langle \nabla u(x), x\rangle = \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{u(x) - u(\lambda x)}{1-\lambda} \le 0.$$

Ora dal Principio del Massimo forte segue che $w(x) < 0$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. □

La capacità verifica una disuguaglianza di concavità nota come disuguaglianza di Brunn-Minkowski[1].

TEOREMA 13.3.9 (Borell). *Siano* $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ *due insiemi convessi limitati e sia* $\Omega_\lambda = (1-\lambda)\Omega_0 + \lambda\Omega_1$ *con* $0 \le \lambda \le 1$. *Allora*

$$\mathrm{cap}(\Omega_\lambda)^{\frac{1}{n-2}} \ge (1-\lambda)\mathrm{cap}(\Omega_0)^{\frac{1}{n-2}} + \lambda \mathrm{cap}(\Omega_1)^{\frac{1}{n-2}}.$$

DIM. *Step 1.* Sia u_λ il potenziale capacitario di Ω_λ e conveniamo di estendere u_λ su tutto $\mathbb{R}^n$ ponendo $u_\lambda(x) = 1$ se $x \in \Omega_\lambda$. Vogliamo provare che per ogni $\lambda \in [0,1]$ e per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$u_\lambda((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \ge \min\{u_0(x_0), u_1(x_1)\}. \tag{13.3.8}$$

In particolare, prendendo $x_0 = x_1 = x$ si trova

$$u_\lambda(x) \ge \min\{u_0(x), u_1(x)\}.$$

Moltiplicando per $|x|^{n-2}$ e facendo $|x| \to +\infty$ si trova

$$\mathrm{cap}(\Omega_\lambda) \ge \min\{\mathrm{cap}(\Omega_0), \mathrm{cap}(\Omega_1)\},$$

e la tesi segue dal Lemma 13.3.7.

Step 2. Definiamo la funzione $\widehat{u}_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\widehat{u}_\lambda(x) = \sup\big\{ \min\{u_0(x_0), u_1(x_1)\} : x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n,\ (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 = x\big\}.$$

Affermiamo che vale

$$u_\lambda \ge \widehat{u}_\lambda \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{13.3.9}$$

Dalla (13.3.9) segue la (13.3.8) e quindi la tesi.

Supponiamo per assurdo che la (13.3.9) sia falsa: esistono $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ ed $\varepsilon \in (0,1)$ tali che

$$\max_{\mathbb{R}^n}(\widehat{u}_\lambda - u_\lambda^\varepsilon) = \widehat{u}_\lambda(\widehat{x}) - u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}) > 0. \tag{13.3.10}$$

Per continuità, esistono $\widehat{x}_0, \widehat{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\widehat{u}_\lambda(\widehat{x}) = \min\{u_0(\widehat{x}_0), u_1(\widehat{x}_1)\} \tag{13.3.11}$$

con $\widehat{x} = (1-\lambda)\widehat{x}_0 + \lambda\widehat{x}_1$.

[1]C. Borell, *Capacitary inequalities of the Brunn-Minkowski type,* Math. Ann. **263**, 179–184, 1983.

Step 3. Deve essere $\widehat{x}_0 \notin \bar{\Omega}_0$ e $\widehat{x}_1 \notin \bar{\Omega}_1$:

1) Se fosse $\widehat{x}_0 \in \bar{\Omega}_0$ e $\widehat{x}_1 \in \bar{\Omega}_1$ allora $\widehat{x} \in \bar{\Omega}_\lambda$ e quindi $u_\lambda(\widehat{x}) = 1$: non può valere la (13.3.10).

2) Se fosse $\widehat{x}_0 \in \bar{\Omega}_0$ e $\widehat{x}_1 \notin \bar{\Omega}_1$ si contraddice la condizione di massimalità di $\widehat{x}_0$ e $\widehat{x}_1$ in (13.3.11). Infatti, $v = \nabla u(\widehat{x}_1) \neq 0$ per il Lemma 13.3.8 e dunque per ogni $s > 0$ piccolo, posto $\widehat{y}_1 = \widehat{x}_1 + sh$ si ha $u(\widehat{x}_1) < u(\widehat{y}_1)$. Definiamo $\widehat{y}_0$ tramite la relazione $\widehat{x} = (1-\lambda)\widehat{y}_0 + \lambda\widehat{y}_1$. Allora per $s > 0$ piccolo $\min\{u_0(\widehat{y}_0), u_1(\widehat{y}_1)\} = u_1(\widehat{y}_1)$.

Step 4. I vettori $\nabla u_0(\widehat{x}_0), \nabla u_1(\widehat{x}_1), \nabla u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x})$ sono paralleli.

Sia $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $\langle h, \nabla u_0(\widehat{x}_0)\rangle > 0$. Allora per $s > 0$ piccolo si ha $u_0(\widehat{x}_0 + sh) > u_0(\widehat{x}_0)$. Siccome

$$\widehat{y} := \widehat{x} + s(1-\lambda)h = (1-\lambda)(\widehat{x}_0 + sh) + \lambda\widehat{x}_1,$$

segue che $\widehat{u}_\lambda(\widehat{y}) = \widehat{u}_\lambda(\widehat{x} + s(1-\lambda)h) \geq \widehat{u}_\lambda(\widehat{x})$.

Dalla (13.3.10) si ha $\widehat{u}_\lambda(\widehat{y}) - u_\lambda^\varepsilon(\widehat{y}) \leq \widehat{u}_\lambda(\widehat{x}) - u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x})$, e quindi

$$u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x} + s(1-\lambda)h) - u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}) \geq \widehat{u}_\lambda(\widehat{x}) - u_\lambda^\varepsilon(\widehat{y}) \geq 0.$$

Si deduce che $\langle \nabla u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}), h\rangle \geq 0$. Quindi $\nabla u_0(\widehat{x}_0)$ e $\nabla u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x})$ sono paralleli con stessa orientazione.

Supponiamo che $\widehat{u}_\lambda(\widehat{x}) = \min\{u_0(\widehat{x}_0), u_1(\widehat{x}_1)\} = u_0(\widehat{x}_0)$. Poniamo

$$a = |\nabla u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x})|, \quad a_0 = |\nabla u_0(\widehat{x}_0)|, \quad a_1 = |\nabla u_1(\widehat{x}_1)|,$$
$$v = \frac{\nabla u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x})}{a} = \frac{\nabla u_0(\widehat{x}_0)}{a_0} = \frac{\nabla u_1(\widehat{x}_1)}{a_1}.$$

Step 5. Sia $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $k = \langle h, v\rangle \neq 0$. Per $r, s \in \mathbb{R}$ piccoli, sia

$$f(r,s) = u_0(\widehat{x}_0 + sh/a_0) - u_0(\widehat{x}_0) - \big\{u_1(\widehat{x}_1 + rh/a_1) - u_1(\widehat{x}_1)\big\}.$$

Poichè $f(0) = 0$ e

$$f_r(0) = -\frac{1}{a_1}\langle \nabla u_1(\widehat{x}_1), h\rangle = -\langle v, h\rangle = -k \neq 0,$$

per il Teorema della funzione implicita esiste una funzione di classe C^∞ $s \mapsto r(s)$ tale che $f(s, r(s)) \equiv 0$. Derivando una e due volte l'identità $f(s, r(s)) = 0$ si trovano le relazioni (con $r = r(s)$)

$$f_s(s,r) + f_r(s,r)r' = 0,$$
$$f_{ss}(s,r) + 2f_{sr}(s,r)r' + f_{rr}(s,r)(r')^2 + f_r(s,r)r'' = 0,$$

e per $s = 0$ si ottiene

$$r'(0) = 1, \qquad r''(0) = \frac{1}{k}\Big\{\frac{1}{a_0^2}\langle \nabla^2 u_0(\widehat{x}_0)h, h\rangle - \frac{1}{a_1^2}\langle \nabla^2 u_1(\widehat{x}_1)h, h\rangle\Big\}. \tag{13.3.12}$$

Step 6. Definiamo la curva in s

$$\widehat{x}(s) = (1-\lambda)(\widehat{x}_0 + sh/a_0) + \lambda(\widehat{x}_1 + r(s)h/a_1)$$

e osserviamo che le variazioni di u_0 e u_1 lungo $\widehat{x}_0 + sh/a_0$ e $\widehat{x}_1 + r(s)h/a_1$ sono uguali. Dunque, si ha

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= u_0(\widehat{x}_0 + sh/a_0) - u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}(s)) \\ &\le \widehat{u}_\lambda(\widehat{x}(s)) - u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}(s)) \\ &\le \widehat{u}_\lambda(\widehat{x}) - u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}) \\ &= u_0(\widehat{x}_0) - u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}) = \varphi(0).\end{aligned}$$

Ovvero φ ha un massimo in $s = 0$ e pertanto $\varphi''(0) \le 0$.

Step 7. Conti preliminari:

(13.3.13)

$$u_0(\widehat{x}_0 + sh/a_0) = u_0(\widehat{x}_0) + \frac{1}{a_0}\langle \nabla u_0(\widehat{x}_0), h\rangle s + \frac{1}{2a_0^2}\langle \nabla^2 u_0(\widehat{x}_0)h, h\rangle s^2 + o(s^2).$$

Inoltre

$$\frac{d}{ds}u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}(s))\bigg|_{s=0} = \langle \nabla u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}(s)), (1-\lambda)h/a_0 + \lambda r' h/a_1\rangle\bigg|_{s=0} = p\langle \nabla u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}), h\rangle,$$

dove $p = (1-\lambda)/a_0 + \lambda/a_1$. Poi

(13.3.14)
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{ds^2}u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}(s))\bigg|_{s=0} &= p^2\langle \nabla^2 u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x})h, h\rangle + \langle \nabla u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}), \lambda r''(0)h/a_1\rangle \\ &= p^2\langle \nabla^2 u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x})h, h\rangle + \frac{ak\lambda r''(0)}{a_1}.\end{aligned}$$

Step 8. Esistono due numeri ξ_0, ξ_1 indipendenti da h tali che

$$\xi_0\langle \nabla^2 u_0(\widehat{x}_0)h, h\rangle + \xi_1\langle \nabla^2 u_1(\widehat{x}_1)h, h\rangle - p^2\langle \nabla^2 u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x})h, h\rangle \le 0.$$

Questo segue da $\varphi''(0) \le 0$, tenuto conto di (13.3.12)–(13.3.14). Per continuità, la disuguaglianza vale per ogni $h \in \mathbb{R}^n$. Dunque, nel senso delle forme quadratiche si ha

$$\xi_0\nabla^2 u_0(\widehat{x}_0) + \xi_1\nabla^2 u_1(\widehat{x}_1) - p^2\nabla^2 u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}) \le 0,$$

e prendendo la traccia si ottiene

$$\xi_0\Delta u_0(\widehat{x}_0) + \xi_1\Delta u_1(\widehat{x}_1) - p^2\Delta u_\lambda^\varepsilon(\widehat{x}) \le 0,$$

dove $\Delta u_0(\widehat{x}_0) = \Delta u_1(\widehat{x}_1) = 0$.

Step 9. Dal momento che

$$\Delta u_\lambda^\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon-1)u_\lambda^{\varepsilon-2}|\nabla u_\lambda|^2 + \varepsilon u_\lambda^{\varepsilon-1}\Delta u_\lambda = \varepsilon(\varepsilon-1)u_\lambda^{\varepsilon-2}|\nabla u_\lambda|^2,$$

si ottiene $|\nabla u_\lambda(\widehat{x})| = 0$, che è l'assurdo cercato. □

CAPITOLO 14

Problemi sovradeterminati e metodo dei piani mobili

1. Problema di Serrin

In questo Capitolo ci proponiamo due obiettivi: 1) Illustrare la tecnica dei "piani mobili" per lo studio della simmetria nelle equazioni alle derivate parziali; 2) Studiare un esempio di problema sovradeterminato. In particolare, ogliamo dimostrare il seguente Teorema[1].

TEOREMA 14.1.1 (Serrin). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, una aperto limitato e connesso di classe C^2. Supponiamo che esista una funzione $u \in C^2(\bar{\Omega})$ che risolve il problema sovradeterminato*

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = c & \textit{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14.1.1}$$

per una costante $c > 0$ (ν indica la normale interna a $\partial\Omega$). Allora per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^n$ risulta $\Omega = B(x_0, r)$ e $u(x) = \frac{1}{2n}\big(r^2 - |x - x_0|^2\big)$ con $r = nc$.

Per il Lemma di Hopf, la costante c in (14.1.1) deve essere necessariamente positiva. Il problema è sovradeterminanto, in quanto il problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{14.1.2}$$

ha soluzione unica. La differenza di due soluzioni, infatti, è una funzione armonica nulla al bordo e dunque identicamente nulla.

La dimostrazione del Teorema 14.1.1 utilizza il metodo dei piani mobili e un raffinamento del Lemma di Hopf per domini che non hanno la proprietà della palla interna.

2. Principio del Massimo negli angoli

Siano $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ un aperto di classe C^2, $x_0 \in \partial\Omega^*$ e $\bar{\nu}$ normale interna a $\partial\Omega^*$ nel punto x_0. Sia $T \subset \mathbb{R}^n$ un iperpiano di $\mathbb{R}^n$ passante per x_0 e contenente $\bar{\nu}$. L'iperpiano T suddivide Ω^* in due aperti. Sia Ω uno di questi due aperti e supponiamo che sia connesso. In un intorno di x_0 l'ultima richiesta è automaticamente soddisfatta.

LEMMA 14.2.2 (Serrin). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \partial\Omega$ come sopra e sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una funzione tale che:*

i) *$u \geq 0$ e non identicamente nulla in $\Omega \cap B(x_0, \delta)$, per qualche $\delta > 0$;*
ii) *$u(x_0) = 0$;*

[1] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 304–318.

iii) $\Delta u \leq 0$ *in* Ω.

Se ν *un vettore entrante in* Ω *da* x_0 *in modo non tangenziale, allora*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0 \quad \textit{oppure} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x_0) > 0. \tag{14.2.3}$$

Esempio 14.2.3. La situazione tipica del Lemma 14.2.2 è descritta dal seguente esempio. Si consideri il primo quadrante nel piano $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0\}$. La funzione $u(x) = x_1 x_2$ è armonica e sia annulla sugli assi. Inoltre $\nabla u(0) = 0$. Sia $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ con $\nu_1 > 0$ e $\nu_2 > 0$ un vettore entrante nel quadrante e consideriamo la funzione $\varphi(t) = u(t\nu) = \nu_1 \nu_2 t^2$. Allora si verifica $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) = 2\nu_1\nu_2 > 0$.

Prova del Lemma 14.2.2. A meno di una rotazione e di una traslazione possiamo supporre che $x_0 = 0$, $\bar{\nu} = (0, ..., 0, 1)$ e $T = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$. In un intorno $B(0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta\}$, $\delta > 0$, di $x_0 = 0$ abbiamo

$$\Omega \cap B(0, \delta) = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > f(x'),\, x_1 > 0\} \cap B(0, \delta),$$

per una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tale che $f(0) = 0$ e $\nabla f(0) = 0$. (Stiamo supponendo che Ω sia nella regione dove $x_1 > 0$.)

Posto $x_r = (0, ..., 0, r)$, esiste $r > 0$ tale che $B_1 = B(x_r, r) \subset \Omega^*$ e $\bar{B}(x_r, r) \cap \partial\Omega^* = \{0\}$.[2] Sia $B_2 = B(0, r/2)$ e consideriamo l'insieme

$$D = \Omega \cap B_1 \cap B_2.$$

La funzione u non è identicamente nulla in D. Dunque, per il Principio del Massimo

$$\begin{cases} u \geq 0 & \text{in } D \\ \Delta u \leq 0 & \text{in } D \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u > 0 \text{ in } D. \tag{14.2.4}$$

Proviamo che per ogni punto $\bar{x} \in T \cap \partial D \cap \partial B_2$ esistono $\eta > 0$ e $\varrho > 0$ tali che

$$u(x) \geq \eta x_1 \quad \text{per ogni } x \in B(\bar{x}, \varrho) \cap D. \tag{14.2.5}$$

Se $u(\bar{x}) > 0$, la (14.2.5) si verifica con un argomento di continuità. Se $u(\bar{x}) = 0$, siamo nelle ipotesi del Lemma di Hopf. Infatti, dal momento che $\mathrm{dist}(T \cap \partial D \cap \partial B_2; \partial\Omega^*) > 0$, esiste una palla $B \subset \Omega$ tale che $\bar{B} \cap T = \{\bar{x}\}$. Dunque $\partial_1 u(\bar{x}) > 0$ e per continuità si ha $\partial_1 u(x) \geq 2\eta$ per qualche $\eta > 0$ e per ogni $x \in \bar{D} \cap B(\bar{x}, \varrho)$, per qualche $\varrho > 0$. Per integrazione segue la (14.2.5). Siccome $u > 0$ in D, dalla (14.2.5) segue che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$u(x) \geq \varepsilon x_1, \quad \text{per } x \in \partial B_2 \cap \partial D. \tag{14.2.6}$$

Consideriamo la funzione di confronto

$$w(x) = x_1 \big(e^{-\alpha|x - x_r|^2} - e^{-\alpha r^2}\big)$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro da fissare. La funzione w verifica le seguenti proprietà

a) $w(x) \leq x_1$, per $x \in D$;

[2] Posto $g(x') = r - \sqrt{r^2 - |x'|^2}$ si hanno gli sviluppi di Taylor

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle Hg(0)x', x'\rangle + o(|x'|^2), \quad f(x) = \frac{1}{2}\langle Hf(0)x', x'\rangle + o(|x'|^2).$$

Si verifica $\langle Hg(0)x', x'\rangle = r^{-1}|x'|^2$ e $\langle Hf(0)x', x'\rangle \leq C|x'|^2$ per una costante $C > 0$, etc.

b) $w(x) > 0$ per $x \in D$ e $w(x) = 0$ per $x \in T \cup \partial B_1$;
c) $\nabla w(0) = 0$;
d) $\Delta w(x) > 0$ per $x \in D$, con una scelta opportuna di α.

Proviamo d). Poniamo $E = E(x) = e^{-\alpha|x-x_r|^2} = e^{-\alpha(|x|^2-2rx_n+r^2)}$. Calcoliamo le derivate di w:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \partial_1 w = (E - E(0)) - 2\alpha x_1^2 E = (1-2\alpha x_1^2)E - E(0)\\
w_{11} &= -4\alpha x_1 E - 2\alpha x_1(1-2\alpha x_1^2)E = -2\alpha x_1(3-2\alpha x_1^2)E\\
w_n &= -2\alpha x_1(x_n - r)E\\
w_{nn} &= -2\alpha x_1 E + 4\alpha^2 x_1(x_n-r)^2 E = -2\alpha x_1(1-2\alpha(x_n-r)^2)E.
\end{aligned}$$

Inoltre per $i = 2, ..., n-1$

$$\begin{aligned}
w_i &= -2\alpha x_1 x_i E\\
w_{ii} &= -2\alpha x_1 E + 4\alpha^2 x_1 x_i^2 E = -2\alpha x_1(1-2\alpha x_i^2)E.
\end{aligned}$$

Dunque $\nabla w(0) = 0$ e inoltre

$$\Delta w = -2\alpha x_1(n+2-2\alpha|x-x_r|^2)E.$$

Per $x \in D$ risulta $|x - x_r| > r/2$ e dunque $n + 2 - 2\alpha|x - x_r|^2 < n + 2 - \alpha r^2/2$. Scegliendo $\alpha = 2(n+2)/r^2$ si ottiene $\Delta w > 0$ in D.

Sia $z = u - \varepsilon w$. Verifichiamo che $z \geq 0$ su ∂D. Infatti

$$z = u - \varepsilon w \geq \begin{cases} u \geq 0 & \text{su } \partial D \cap \partial B_1\\ u \geq 0 & \text{su } \partial D \cap \partial T\\ \varepsilon x_1 - \varepsilon w \geq 0 & \text{su } \partial D \cap \partial B_2.\end{cases}$$

Nelle prime due disuguaglianze si usa la b). Per la terza si usano (14.2.6) e la proprietà a) di w. Nel punto $x_0 = 0$ sia ha $z(0) = u(0) - \varepsilon w(0) = 0$. Inoltre in D si verifica

$$\Delta z = \Delta u - \varepsilon \Delta w < 0.$$

Dal Principio del Massimo segue che $z \geq 0$ su tutto D.

Sia $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ una direzione che entra in Ω (e quindi in D) in modo non tangenziale, ovvero $\nu_1 > 0$ e $\nu_n > 0$. Consideriamo la funzione $\varphi(t) = z(t\nu)$. Dalla discussione precedente risulta $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(t) > 0$ per $t \in (0, t_0)$, per qualche $t_0 > 0$. Dunque,

$$\begin{aligned}
&\varphi'(0) \geq 0,\\
&\varphi'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi''(0) \geq 0.
\end{aligned}$$

Siccome $\nabla w(0) = 0$, si ha $\varphi'(0) = \langle \nabla u(0), \nu\rangle = \frac{\partial u}{\partial \nu}(0)$. Con uno sviluppo di Taylor elementare

$$w(t\nu) = t\nu_1\big(e^{-\alpha|t\nu - x_r|^2} - e^{-\alpha r^2}\big) = t^2\nu_1 e^{-\alpha r^2}(2\alpha\nu_n r + o(1)),$$

con $o(1) \to 0$ per $t \to 0$. Dunque, se $\varphi'(0) = 0$ si ottiene

$$0 \leq \varphi''(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(0) - 4\varepsilon\alpha\nu_1\nu_n r e^{-\alpha r^2}.$$

Questo prova (14.2.3). $\square$

3. Dimostrazione del Teorema di Serrin

Iniziamo con il seguente Lemma, la cui prova è lasciata come esercizio.

LEMMA 14.3.4 (di simmetria). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme simmetrico rispetto a tutti gli iperpiani passanti per l'origine. Allora Ω ha simmetria radiale, ovvero $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \in R\}$ per qualche $R \subset [0, +\infty)$.*

PROVA DEL TEOREMA 14.1.1. Essendo Ω limitato, per ogni direzione $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\nu} \neq 0$, esiste un iperpiano $S \subset \mathbb{R}^n$ normale a $\bar{\nu}$ e disgiunto da Ω. Inoltre, esiste un (unico) iperpiano T parallelo a S che "tocca" $\partial\Omega$ e lascia Ω dalla stessa parte di S. A meno di una rotazione e di una traslazione, possiamo supporre che $T = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ e che $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0\}$. L'obiettivo è provare che Ω è simmetrico rispetto a un iperpiano parallelo a T.

Indichiamo con $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ il primo versore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Dato $\lambda \geq 0$, siano $\Omega_\lambda = \lambda e_1 + \Omega$, $\Gamma_\lambda = \{(-x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in \Omega_\lambda\}$, e $D_\lambda = \Omega_\lambda \cap \{x_1 > 0\}$. Definiamo

$$\bar{\lambda} = \sup\{\lambda > 0 : D_\lambda \subset \Gamma_\lambda\}.$$

Risulta $0 < \bar{\lambda} < +\infty$, infatti per ogni $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo si ha $D_\lambda \subset \Gamma_\lambda$.

Si possono verificare solo i seguenti due casi:

1) $\partial D_{\bar{\lambda}}$ "tocca" $\partial \Gamma_{\bar{\lambda}}$ in almeno un punto $\bar{x} \in \{x_1 > 0\}$ (le due frontiere hanno in $\bar{x}$ la stessa normale interna);
2) $\partial\Omega_{\bar{\lambda}}$ e $\partial\Gamma_{\bar{\lambda}}$ hanno la stessa normale interna in almeno un punto $\bar{x} \in \{x_1 = 0\}$.

Se né il caso 1) né il caso 2) è verificato, si contraddice la massimalità di $\bar{\lambda}$.

Proveremo in seguito che il caso 2) non può presentarsi. Studiamo il caso 1). A partire dalla funzione u, si definiscono per traslazione e riflessione due funzioni $v \in C^2(\bar{\Omega}_{\bar{\lambda}})$ e $w \in C^2(\bar{\Gamma}_{\bar{\lambda}})$ tali che

$$\begin{cases} \Delta v = -1 & \text{in } \Omega_{\bar{\lambda}} \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega_{\bar{\lambda}} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = c & \text{su } \partial\Omega_{\bar{\lambda}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta w = -1 & \text{in } \Gamma_{\bar{\lambda}} \\ w = 0 & \text{su } \partial\Gamma_{\bar{\lambda}} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = c & \text{su } \partial\Gamma_{\bar{\lambda}}, \end{cases} \tag{14.3.7}$$

dove ν indica la normale interna. Dal Principio del Massimo segue che $v > 0$ in $\Omega_{\bar{\lambda}}$ e $w > 0$ in $\Gamma_{\bar{\lambda}}$. Inoltre, per la costruzione simmetrica, si ha

$$w(x_1, x_2, ..., x_n) = v(-x_1, x_2, ..., x_n), \quad x \in \Gamma_{\bar{\lambda}}. \tag{14.3.8}$$

La funzione differenza $z = w - v$ verifica $z \geq 0$ su $\partial D_{\bar{\lambda}}$ e $\Delta z = 0$ in $D_{\bar{\lambda}}$. Per il Principio del Massimo si hanno due casi:

1A) $z > 0$ in $D_{\bar{\lambda}}$;
1B) $z = 0$ identicamente in $D_{\bar{\lambda}}$.

Mostriamo che il caso 1A) non può verificarsi. In questo caso, infatti, la funzione z soddisfa

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \text{in } D_{\bar{\lambda}} \\ z > 0 & \text{in } D_{\bar{\lambda}} \\ z(\bar{x}) = 0. \end{cases} \tag{14.3.9}$$

Per il Lemma di Hopf deve essere

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(\bar{x}) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\bar{x}) = \frac{\partial z}{\partial \nu}(\bar{x}) > 0.$$

Ma questo non è possibile perchè v e w hanno derivata normale uguale nel punto $\bar{x}$.

Dunque, deve necessariamente verificarsi il caso 1B). In questo caso, $v = w$ in $D_{\bar{\lambda}}$, ma allora $\Omega_{\bar{\lambda}} = \Gamma_{\bar{\lambda}}$ e quindi Ω è simmetrico rispetto a un piano parallelo al piano T. Essendo il vettore normale a T generico, dal Lemma di simmetria e del fatto che Ω è connesso segue che Ω è una palla.

Mostriamo che il caso 2) non può verificarsi. Proveremo che le funzioni v e w hanno derivate seconde uguali e quindi derivate direzionali seconde entranti uguali nel punto $\bar{x}$. Allora la funzione differenza $z = w - v$ vìola il Teorema 14.2.2.

A meno di una traslazione e di una rotazione, possiamo supporre che $\bar{x} = 0$ e che in un intorno di 0 la frontiera $\partial\Omega_{\bar{\lambda}}$ sia il grafico $x_n = f(x')$ di una funzione $f \in C^2(\{|x'| < \delta\})$, $\delta > 0$, tale che $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$ e con normale interna a $\partial\Omega_{\bar{\lambda}}$ data da

$$\nu = \nu(x', f(x')) = \frac{(-\nabla f(x'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}}. \tag{14.3.10}$$

Calcoliamo le derivate seconde di v nel punto 0 in funzione delle derivate seconde di f nel punto 0. Precisamente, abbiamo:

a) $v_{ij}(0) = -cf_{ij}(0)$, $i, j = 1, ..., n-1$;
b) $v_{in}(0) = 0$, $i = 1, ..., n-1$;
c) $v_{nn}(0) = c\Delta f(0) - 1$.

Derivando in x_i l'identità $v(x', f(x')) = 0$ si trova

$$v_i + f_i v_n = 0, \qquad i = 1, ..., n-1,$$

e derivando nuovamente in x_j

$$v_{ij} + f_j v_{in} + f_{ij} v_n + (v_{nj} + v_{nn} f_j) f_i = 0, \qquad i, j = 1, ..., n-1.$$

Usando $\nabla f(0) = 0$ e $v_n = c$ si ottiene a).

Usando (14.3.10), dalla condizione $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \langle \nabla v, \nu \rangle = c$ si ottiene

$$v_n = c\sqrt{1 + |\nabla f|^2} + \sum_{j=1}^{n-1} v_j f_j.$$

Derivando in x_i, e usando $v_j(0) = f_j(0) = 0$ si trova b). Infine dalla equazione $\Delta v = -1$ e dalla a), troviamo

$$v_{nn}(0) = -\sum_{i=1}^{n-1} v_{ii}(0) - 1 = c\Delta f(0) - 1.$$

Ora consideriamo w e $\partial\Gamma_{\bar{\lambda}}$. La funzione $g(x') = f(-x_1, x_2, ..., x_n)$ parametrizza il grafico di $\partial\Gamma_{\bar{\lambda}}$ in un intorno di 0. Inoltre, $g_{ij}(0) = f_{ij}(0)$ se $i, j \geq 2$ oppure se $i = j = 1$, e $g_{1i}(0) = -f_{1i}(0)$, $i \geq 2$. Proviamo che $f_{1i}(0) = 0$. Per $x_1 \geq 0$ si ha

$g(x') \leq f(x')$, in quanto $\Omega_{\bar{\lambda}} \cap \{x_1 \geq 0\} \subset \Gamma_{\bar{\lambda}} \cap \{x_1 \geq 0\}$. Usando sviluppi di Taylor elementari si ottiene

$$f(x') - g(x') = \sum_{i=2}^{n-1} f_{1i}(0) x_1 x_i + o(|x'|^2) \geq 0, \qquad x_1 \geq 0.$$

Se $f_{1i}(0) \neq 0$ per qualche $2 \leq i \leq n-1$, la disuguaglianza non può essere verificata.

Dunque v e w hanno derivate seconde uguali nel punto $\bar{x} = 0$. Il caso 2) non può presentarsi. Questo termina la dimostrazione del Teorema. □

CAPITOLO 15

Funzione massimale e teorema di Lebesgue

1. Funzione massimale

DEFINIZIONE 15.1.1 (Funzione massimale). Da una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, definiamo la funzione massimale

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Osserviamo che per $r > 0$ fissato, la funzione

$$x \mapsto \varphi(x;r) = \fint_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

è continua, e dunque $M(f)(x) = \sup_{r>0} \varphi(x;r)$ è semicontinua inforiormente, ovvero gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > t\}$ sono aperti per ogni $t > 0$. In particolare, la funzione massimale è misurabile.

TEOREMA 15.1.2 (della Funzione Massimale).
(i) Esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\mathcal{L}^n\{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > t\} \leq \frac{3^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy. \tag{15.1.1}$$

(ii) Per ogni $p > 1$ e per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\|M(f)\|_p \leq \frac{p2^p3^n}{p-1}\|f\|_p. \tag{15.1.2}$$

OSSERVAZIONE 15.1.3. Per $p = 1$ la stima (15.1.2) per la funzione massimale non vale. Infatti, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esistono $C, M > 0$ tali che per $|x| \geq M$ si ha $M(f)(x) \geq C|x|^{-n}$.

LEMMA 15.1.4. *(Lemma di ricoprimento) Sia $\mathcal{F} = \{B_1, ..., B_k\}$, $k \geq 1$, una famiglia finita di palle di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una sottofamiglia disgiunta $\mathcal{G} = \{B_1^*, ..., B_h^*\} \subset \mathcal{F}$, $1 \leq h \leq k$, tale che*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B^* \in \mathcal{G}} 3B^*, \tag{15.1.3}$$

dove $3B^*$ indica la palla con raggio 3 volte quello di B^* e stesso centro.

DIM. Selezioniamo $B_1^* \in \mathcal{F}$ in modo tale che $r(B_1^*) = \max\{r(B) : B \in \mathcal{F}\}$. Quindi, selezioniamo $B_2^* \in \mathcal{F}$ disgiunta da B_1^* tale che

$$r(B_2^*) = \max\{r(B) : B \in \mathcal{F} \text{ disgiunta da } B_1^*\}.$$

In generale, selezionate $B_1^*, ..., B_p^*$, scegliamo $B_{p+1}^* \in \mathcal{F}$ disgiunta da $B_1^*, ..., B_p^*$ in modo tale che

$$r(B_{p+1}^*) = \max\big\{r(B) : B \in \mathcal{F} \text{ disgiunta da } B_1^*, ..., B_p^*\big\}.$$

Ad un certo passo $h \in \mathbb{N}$ il processo di selezione termina.

Proviamo la proprietà di ricoprimento (15.1.3). Data $B \in \mathcal{F}$ esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $B \cap (B_1^* \cup ... \cup B_{q-1}^*) = \emptyset$ e $B \cap B_q^* \neq \emptyset$. Allora $r(B) \le r(B_q^*)$ e quindi $B \subset 3B_q^*$. □

Dim. del Teorema 15.1.2. La misura di Lebesgue è regolare, e quindi posto $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > t\}$, $t > 0$, si ha

$$\mathcal{L}^n(\Omega_t) = \sup\big\{\mathcal{L}^n(K) : K \subset \Omega_t \text{ compatto}\big\}. \tag{15.1.4}$$

Sia dunque $K \subset \Omega_t$ un compatto. Per ogni $x \in K$ esiste una palla aperta B_x centrata in x tale che

$$⨍_{B_x} |f(y)|dy > t.$$

Le palle $\{B_x : x \in K\}$ formano un ricoprimento aperto di K dal quale è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Per il Lemma di ricoprimento, è possibile selezionare un numero finito di palle disgiunte $B_i = B_{x_i}$, $i = 1, ..., h$, tali che

$$K \subset \bigcup_{i=1}^h 3B_i.$$

Dunque, si ha

$$\mathcal{L}^n(K) \le \sum_{i=1}^h \mathcal{L}^n(3B_i) = 3^n \sum_{i=1}^h \mathcal{L}^n(B_i) \le \frac{3^n}{t} \sum_{i=1}^h \int_{B_i} |f(y)|dy \le \frac{3^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy.$$

La (15.1.1) segue ora dalla (15.1.4).

Proviamo l'affermazione (ii). Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$ e per $t > 0$ sia $\Omega_t = \big\{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > t\big\}$. Con il Teorema di Fubini-Tonelli si trova

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(f)^p dx = p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{M(f)} t^{p-1} dt\, dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathcal{L}^n(\Omega_t) dt.$$

Allo scopo di stimare $\mathcal{L}^n(\Omega_t)$ introduciamo la funzione troncata

$$f_1(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{se } |f(x)| > t/2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Risulta $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, infatti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|dx = \int_{\{|f|>t/2\}} |f(x)|dx \le \|f\|_p\, \mathcal{L}^n\{|f| > t/2\}^{1/p'} < +\infty.$$

Dal momento che $|f| \le f_1 + t/2$, segue che $M(f) \le M(f_1) + t/2$, e dunque

$$\{M(f) > t\} \subset \{M(f_1) > t/2\}.$$

Applicando la prima parte della dimostrazione alla funzione f_1 si ottiene

$$\mathcal{L}^n(\Omega_t) = \mathcal{L}^n\{M(f) > t\} \le \mathcal{L}^n\{M(f_1) > t/2\} \le \frac{2 \cdot 3^n}{t} \|f_1\|_1,$$

e dal momento che

$$\|f_1\|_1 = \int_{\{|f|>t/2\}} |f(x)|dx,$$

sostituendo sopra si trova

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} M(f)^p dx &\le 2p3^n \int_0^{+\infty} t^{p-2} \int_{\{|f|>t/2\}} |f(x)|dx\,dt \\ &= 2p3^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^{2|f(x)|} t^{p-2} dt\,dx = \frac{p2^p3^n}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx.\end{aligned}$$

□

2. Teorema di differenziazione di Lebesgue

TEOREMA 15.2.5. *Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ una funzione localmente integrabile. Allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x). \tag{15.2.5}$$

DIM. Senza perdere di generalità possiamo supporre $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $\eta > 0$ esiste una funzione $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|f-g\|_1 \le \eta$. Questa funzione si può trovare nel seguente modo: 1) esiste $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto tale che $\|h - f\|_1 \le \eta/2$; 2) La regolarizzione di Friedrichs h_ε, $\varepsilon > 0$, di h è continua con supporto compatto e inoltre $\|h_\varepsilon - h\|_1 \le \eta/2$ per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.

Per ogni $r > 0$ introduciamo la funzione di media

$$f_r(x) = \fint_{B(x,r)} f(y)\,dy = \fint_{B(0,r)} f(y+x)\,dy.$$

Risulta $\lim_{r\to 0} \|f_r - f\|_1 = 0$, infatti

$$\|f_r - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\fint_{B(0,r)} \big(f(y+x) - f(x)\big)dy\Big|dx \le \fint_{B(0,r)} \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y+x) - f(x)\big|dx\,dy,$$

e per la continuità in media per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar r > 0$ tale che per $|y| \le \bar r$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y+x) - f(x)\big|dx \le \varepsilon.$$

Di conseguenza, esiste una successione di raggi $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ infinitesima tale che per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k\to+\infty} f_{r_k}(x) = f(x). \tag{15.2.6}$$

Vogliamo provare che si ha convergenza per $r \to 0$. Introduciamo la funzione di oscillazione locale

$$\Omega(f)(x) = \limsup_{r\to 0} f_r(x) - \liminf_{r\to 0} f_r(x).$$

La funzione di oscillazione ha le seguenti proprietà:

1) Se $g \in C(\mathbb{R}^n)$ è continua allora $\Omega(g)(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
2) Se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ allora $\Omega(f)(x) \le 2M(f)(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

3) Se $\Omega(f)(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ allora il limite $\lim_{r\to 0} f_r(x)$ esiste per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e coincide con $f(x)$ in virtù di (15.2.6).

Proviamo che $\Omega(f) = 0$ quasi ovunque. In effetti, si ha

$$\Omega(f) = \Omega(f-g) + \Omega(g) = \Omega(f-g) \leq 2M(f-g)$$

e dunque per ogni $t > 0$ dal Teorema 15.1.2 si trova

$$\mathcal{L}^n\{\Omega(f) > t\} \leq \mathcal{L}^n\{M(f-g) > t/2\} \leq \frac{2\cdot 3^n}{t}\|f-g\|_1 \leq \frac{2\cdot 3^n \eta}{t}$$

con $\eta > 0$ arbitrario. Segue che $\mathcal{L}^n\{\Omega(f) > t\} = 0$ per ogni $t > 0$ ovvero $\Omega(f)(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$. □

3. Teorema dell'integrale singolare.

Definizione 15.3.6 (Integrale frazionario). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e sia $0 < \alpha < n$. Se l'integrale converge, si definisce l'integrale frazionario di f di indice α (o potenziale di Riesz) la funzione

$$I_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Teorema 15.3.7 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Siano $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha < n/p$ e sia $q = \frac{pn}{n-p\alpha}$. Esiste una costante $C = C(n,p,\alpha) > 0$ tale che*

$$\|I_\alpha(f)\|_q \leq C\|f\|_p$$

per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Dim. Sia $\delta > 0$ una parametro da determinare in seguito e scomponiamo l'integrale frazionario isolando la singolarità

$$\begin{aligned}|I_\alpha(f)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy &= \int_{|x-y|>\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int_{|x-y|<\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &= E_\delta(x) + I_\delta(x).\end{aligned}$$

Iniziamo a stimare la parte esterna. Con una disuguaglianza di Hölder si trova

$$E_\delta(x) \leq \|f\|_p \Big(\int_{|x-y|>\delta} |x-y|^{-(n-\alpha)p'} dy\Big)^{\frac{1}{p'}} = C(n,p)\|f\|_p \Big(\int_\delta^{+\infty} r^{-(n-\alpha)p'+n-1} dr\Big)^{\frac{1}{p'}}$$

dove $p' = \frac{p}{p-1}$, e quindi

$$-(n-\alpha)p' + n = (\alpha - n)\frac{p}{p-1} + n = \frac{p}{p-1}\Big(\alpha - \frac{n}{p}\Big) < 0 \quad \text{se} \quad \alpha < \frac{n}{p}.$$

Questo implica che l'integrale converge per ogni $\delta > 0$ e precisamente si ottiene

$$E_\delta(x) \leq C(n,p,\alpha)||f||_p \delta^{\alpha - \frac{n}{p}}.$$

Per stimare la parte interna si introducono le corone per $k = 0, 1, 2, \dots$

$$C_k = \Big\{y \in \mathbb{R}^n : \frac{\delta}{2^{k+1}} \leq |x-y| \leq \frac{\delta}{2^k}\Big\}.$$

Con questa scomposizione si trova:

$$\begin{aligned}
I_\delta(x) &= \int_{|x-y|<\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{C_k} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\frac{\delta}{2^{k+1}}\Big)^{\alpha-n} \int_{B(x,\delta/2^k)} |f(y)| dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\frac{\delta}{2^{k+1}}\Big)^{\alpha-n} \Big(\frac{\delta}{2^k}\Big)^n \omega_n ⨍_{B(x,\frac{\delta}{2^k})} |f(y)| dy \\
&\leq \omega_n M(f)(x) \frac{1}{2^{\alpha n}} \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\frac{\delta}{2^k}\Big)^\alpha = C(n,\alpha)\delta^\alpha M(f)(x).
\end{aligned}$$

In conclusione si ottiene la maggiorazione

$$|I_\alpha(f)(x)| \leq C\big(\|f\|_p \delta^{\alpha-\frac{n}{p}} + M(f)(x)\delta^\alpha\big)$$

per ogni $\delta > 0$ con C costante indipendente da δ. Scegliamo δ in modo tale che risulti $\|f\|_p \delta^{\alpha-\frac{n}{p}} = M(f)(x)\delta^\alpha$ e cioè

$$\delta = \Big(\frac{\|f\|_p}{M(f)(x)}\Big)^{\frac{p}{n}}.$$

Si trova

$$|I_\alpha(f)(x)| \leq CM(f)(x)\Big(\frac{\|f\|_p}{M(f)(x)}\Big)^{\frac{p\alpha}{n}} = C\|f\|_p^{\frac{p\alpha}{n}} M(f)(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}},$$

e prendendo la norma in L^q, e di seguito utilizzando la maggiorazione per la funzione massimale si ottiene

$$\|I_\alpha(f)\|_q^q \leq C^q \|f\|_p^{\frac{pq\alpha}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} M(f)^p dx \leq C^q \|f\|_p^{\frac{pq\alpha}{n}} \|f\|_p^p = C^q \|f\|_p^q.$$

In conclusione si ottiene la tesi $\|I_\alpha(f)\|_q \leq C\|f\|_p$.

$\square$

CAPITOLO 16

Esercizi

ESERCIZIO 1. Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche nei domini specificati e calcolarne l'armonica coniugata:

1) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ in $\mathbb{R}^2$;

2) $u(x,y) = e^y \sin x$ in $\mathbb{R}^2$;

3) $u(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

ESERCIZIO 2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e connesso di classe C^1 e sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una funzione armonica tale che

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Verificare che u è costante.

ESERCIZIO 3. 1) Sia $u \in C^3(\mathbb{R}^n)$ una funzione a supporto compatto. Verificare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx,$$

dove $|\nabla^2 u|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}^2$ è la norma della matrice Hessiana.

2) Dedurre dal punto 1) che una funzione armonica con supporto compatto è identicamente nulla.

ESERCIZIO 4. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera di classe C^1 e sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tale che $u = 0$ su $\partial\Omega$. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ vale la disuguaglianza

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \varepsilon \int_\Omega u^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega (\Delta u)^2 dx.$$

Dedurre che se $u \in C^2(\bar{\Omega})$ è armonica in Ω e nulla al bordo allora $u = 0$.

ESERCIZIO 5. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $g \in C(\Omega)$ una funzione continua e limitata. Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una funzione tale che

$$\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + (u-g)^2\big) dx \le \int_\Omega \big(|\nabla v|^2 + (v-g)^2\big) dx$$

per ogni $v \in C^1(\Omega)$. Provare che u risolve l'equazione differenziale $\Delta u = u - g$ in Ω.

ESERCIZIO 6 (Laplaciano in coordinate polari). Siano $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ coordinate nel piano e siano $r \ge 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ le corrispondenti coordinate polari, cioè $x = r\cos\vartheta$ e $y = r \sin\vartheta$. Verificare che

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

ESERCIZIO 7 (Esempio di Hadamard). Sia $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e sia $\beta \in \mathbb{N}$ un parametro. Definiamo la funzione u in B tramite coordinate polari

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n^\beta} \frac{\sin(n^\beta \vartheta)}{n^2}, \quad 0 \le r \le 1,\ \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Verificare che:

i) $u \in C(\bar{B})$ e $\Delta u = 0$ in B;

ii) $\displaystyle\int_B |\nabla u|^2 dxdy < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \beta < 3.$

Suggerimenti. Considerare la funzione a valori complessi

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n^\beta}}{n^2}, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| \le 1,$$

e osservare che $|\nabla u|^2 = |\partial_z f|^2$. Si può (deve) usare l'identità di Parseval

$$\int_B \Big| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \Big|^2 dxdy = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_B |c_n z^n|^2 dxdy.$$

ESERCIZIO 8. Sia u una funzione armonica non negativa nella palla $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Stimare $u(x)$ per $|x| = 1/2$ in rapporto a $u(0)$.

ESERCIZIO 9. Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione subarmonica. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\varphi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

è monotona crescente.

ESERCIZIO 10. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione ortogonale rispetto al prodotto scalare standard. Verificare che $\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T$ per una qualsiasi $u \in C^2$.

ESERCIZIO 11. Sia $\beta \ge 0$ un parametro e sia $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Si consideri il problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = |x|^{2\beta} & \text{in } B \\ u = 0 & \text{su } \partial B. \end{cases}$$

i) Verificare che se il Problema di Poisson precedente ha una soluzione $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ allora essa è unica e verifica $u(x) = u(y)$ se $|x| = |y|$.

ii) Calcolare la soluzione del Problema.

iii) Sia ora $-1 < \beta < 0$. Producendo un esempio, mostrare che l'equazione differenziale in forma debole

$$-\int_B \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle\, dx = \int_B \varphi\, |x|^{2\beta}\, dx, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^1(B),$$

ha una soluzione $u \in H^1(B) \cap C(\bar{B})$ che verifica il dato al bordo $u = 0$ su ∂B.

ESERCIZIO 12. Sia u una funzione subarmonica in $\mathbb{R}^n$ e sia f una funzione convessa e crescente in $\mathbb{R}$. Dimostrare che $v = f \circ u$ è subarmonica in $\mathbb{R}^n$.

i) Provare il caso $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ed $f \in C^2(\mathbb{R})$.

ii) Provare il caso generale [1].

ESERCIZIO 13. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ una soluzione del Problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Provare che per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$u(x) \geq \frac{1}{2n}\text{dist}(x;\partial\Omega)^2.$$

ESERCIZIO 14. Sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$ tale che per qualche $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{1+|x|^k} < +\infty.$$

Provare che u è un polinomio di grado al più k.

ESERCIZIO 15. Sia $B = B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ e si consideri il nucleo di Poisson di B

$$P(x,y) = \frac{1}{n\omega_n r}\frac{r^2-|x|^2}{|x-y|^n}, \quad x \in B,\ y \in \partial B.$$

Verificare che per ogni $x \in B$ si ha

$$u(x) := \int_{\partial B} P(x,y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 1.$$

Suggerimento: u è armonica in B, calcolare $u(0)$ ed esaminare le simmetrie di u.

ESERCIZIO 16. Verificare le seguenti identità:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\big(|x|^2+1\big)^{(n+1)/2}}dx = n\omega_n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\vartheta\, d\vartheta = \frac{(n+1)\omega_{n+1}}{2}.$$

ESERCIZIO 17 (Teorema di Liouville). Provare che una funzione armonica e non negativa in $\mathbb{R}^n$ è costante.

ESERCIZIO 18. Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ insiemi aperti e sia $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una funzione olomorfa. Provare che se u è armonica in Ω_2, allora $v = u \circ f$ è armonica in Ω_1.

ESERCIZIO 19 (Teorema di Liouville in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$). Provare che una funzione armonica e non negativa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è costante.

ESERCIZIO 20. Sia $\varphi \in C([0,\pi])$ una funzione continua della forma

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx), \qquad a_n \in \mathbb{R},$$

con serie convergente uniformemente.

[1] Ricordiamo la disuguaglianza di Jensen. Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura con $\mu(X)=1$ e sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora

$$f\Big(\int_X u(x)\,d\mu(x)\Big) \leq \int_X f(u(x))\,d\mu(x),$$

per ogni funzione $u : X \to \mathbb{R}$ integrabile con $f \circ u$ integrabile.

Risolvere il Problema di Dirichlet nel rettangolo $R = (0,\pi) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } R \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,\pi] \\ u = 0 & \text{su } \partial R \setminus [0,\pi] \times \{0\}. \end{cases}$$

Suggerimento: cercare soluzioni dell'equazione $\Delta u = 0$ con il metodo della separazione delle variabili: $u(x,y) = f(x)g(y)$, da cui $(f'' - \lambda f)g + (g'' - \lambda g)f = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, separare le equazioni, determinare λ in base ai dati al bordo, etc.

Esercizio 21. (Principio di simmetria di Schwarz) Siano $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $B^+ = \{x \in B : x_n > 0\}$ e $B^- = \{x \in B : x_n < 0\}$. Sia $C(\bar{B}^+)$ una funzione armonica in B^+ tale che $u(x) = 0$ per $x_n = 0$. Definiamo la funzione $\bar{u} : \bar{B} \to \mathbb{R}$:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \bar{B}^+, \\ -u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in \bar{B}^-. \end{cases}$$

Dimostrare che $\bar{u}$ è armonica in B.

Esercizio 22. Sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^2$ tale che l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 : u(x) = 0\}$ è l'unione di due rette non coincidenti. Determinare la funzione u.

Esercizio 23. Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus (-1,0]$ il disco aperto meno un segmento e sia $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Verificare che il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha soluzione (unica).

Esercizio 24 (Nucleo di Poisson del disco). Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco unitario e sia $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ c_n z^n + \bar{c}_n \bar{z}^n \right\}, \quad |z| = 1,$$

con serie convergente uniformemente, dove $c_0 \in \mathbb{R}$ e $c_n \in \mathbb{C}$ per $n \geq 1$.

1) Verificare che

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \varphi(\zeta) \bar{\zeta}^n d\mathcal{H}^1.$$

2) Dedurre che la soluzione del Problema di Dirichlet $\Delta u = 0$ in D e $u = \varphi$ su ∂D ha la forma

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (z\bar{\zeta})^n + (\bar{z}\zeta)^n \right\} \varphi(\zeta) d\mathcal{H}^1.$$

3) Calcolare il nucleo $\{...\}$ nell'integrale precedente.

Esercizio 25. Sia u il potenziale capacitario di $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aperto limitato di classe C^1. Verificare che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla v|^2 dx$$

per ogni funzione $v \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ tale che $v = 1$ su $\partial\Omega$ e $\lim_{|x| \to +\infty} v(x) = 0$.